PROBLEMA1

Nel sistema di riferimento cartesiano *Oxy* si consideri il quadrato *OABC*, dove *A= (1; 0)* e *C=(0; 1)*.

1. Sia *P* un punto appartenente al lato *AB*. Si considerino le parabole, con asse parallelo all'asse *y*, passanti per *O* e per *P* e tangenti al lato *BC*. Quali sono i possibili vertici di tali parabole, al variare di *P* su *AB*?
2. Tra quelle sopra indicate, si dimostri che la parabola Γ_1, tale che il segmento parabolico limitato dalla corda *OP* abbia area pari alla metà del quadrato *OABC*, ha equazione: $y = -3x^2 + 2\sqrt{3}x$
3. Si determini l'equazione della parabola Γ_2 simmetrica di Γ_1 rispetto all'asse y e si calcoli l'area della regione piana delimitata dalle due parabole e dalla comune retta tangente nei loro vertici.
4. Sia *r* una retta di equazione *y = k*, $k \in [0,1]$ e siano *Q* e *R* i punti (più vicini all'asse *y*) in cui *r* taglia, rispettivamente, le parabole Γ_1 e Γ_2. Si determini il valore di *k* per cui risulti massima l'area del triangolo QCR.

RISOLUZIONE

Punto 1

Il punto B ha coordinate $B = (1,1)$ e il punto P appartenente alla retta AB di equazione $x = 1$ ha coordinate $P(1,t), \quad 0 \le t \le 1$.

Una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate ha equazione $y = ax^2 + bx + c$. Imponendo il passaggio per $O = (0,0)$ otteniamo $c = 0$; imponendo il passaggio per $P(1,t)$ otteniamo $a + b + c = t$ e ricordando che $c = 0$ la condizione diventa $a + b = t \Rightarrow b = t - a$.
Quindi l'equazione della famiglia di parabole diventa
$y = ax^2 + (t - a)x$.
La tangenza al lato BC impone tre condizioni sulla famiglia di parabole di equazione $y = ax^2 + (t - a)x$:

- devono avere concavità verso il basso e cioè $a<0$, altrimenti se avessero concavità verso l'alto, il passaggio per O e P escluderebbe la tangenza al lato BC e viceversa;
- l'ascissa del vertice deve essere compresa tra 0 ed 1, $0<x_V\le 1$, altrimenti le parabole potrebbero essere tangenti alla retta di equazione $y=1$ esternamente al lato BC, cioè l'ascissa del vertice non apparterrebbe all'intervallo $(0,1)$;
- l'ordinata del vertice sarà pari a 1 in quanto solo nel vertice la famiglia di parabole può essere tangente al lato BC di equazione $y=1$.

L'intersezione di $y=1$ con la famiglia di parabole di equazione $y=ax^2+(t-a)x$ fornisce $ax^2+(t-a)x=1 \Rightarrow ax^2+(t-a)x-1=0$ per cui imponendo la condizione di tangenza si ha:

$$(t-a)^2+4a=0 \Rightarrow a^2-2a(t-2)+t^2=0 \Rightarrow a_{1,2}=(t-2)\pm 2\sqrt{1-t}\,.$$

Le ascisse dei possibili vertici della famiglia di parabole sono quindi:

$$x_{V+}=\frac{a_1-t}{2a_1}=\frac{\sqrt{1-t}-1}{t-2+2\sqrt{1-t}}=\frac{\left(\sqrt{1-t}-1\right)\left(t-2-2\sqrt{1-t}\right)}{\left(t-2+2\sqrt{1-t}\right)\left(t-2-2\sqrt{1-t}\right)}=\frac{1+\sqrt{1-t}}{t}=\frac{1}{1-\sqrt{1-t}}$$

$$x_{V-}=\frac{a_2-t}{2a_2}=\frac{-\sqrt{1-t}-1}{t-2-2\sqrt{1-t}}=\frac{\left(-\sqrt{1-t}-1\right)\left(t-2+2\sqrt{1-t}\right)}{\left(t-2-2\sqrt{1-t}\right)\left(t-2+2\sqrt{1-t}\right)}=\frac{1-\sqrt{1-t}}{t}=\frac{1}{1+\sqrt{1-t}}$$

e poiché per ipotesi deve aversi $0<x_V\le 1$ con $0\le t\le 1$, l'ascissa del vertice accettabile è $x_V=\dfrac{1-\sqrt{1-t}}{t}=\dfrac{1}{1+\sqrt{1-t}}$ in quanto $1+\sqrt{1-t}>1\ \forall t\in(0,1)$ per cui $0<\dfrac{1}{1+\sqrt{1-t}}\le 1\ \forall t\in[0,1]$; l'ordinata del vertice come già osservato è pari a 1 e possiamo ricavarlo anche attraverso il calcolo diretto: infatti

$$y\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-t}}\right)=\left(t-2-2\sqrt{1-t}\right)\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-t}}\right)^2+\left(2+2\sqrt{1-t}\right)\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-t}}\right)$$

$$=\left(t-2-2\sqrt{1-t}\right)\cdot\frac{1}{\left(2-t+2\sqrt{1-t}\right)}+2\left(1+\sqrt{1-t}\right)\cdot\frac{1}{\left(1+\sqrt{1-t}\right)}$$

$$=-\left(2-t+2\sqrt{1-t}\right)\frac{1}{\left(2-t+2\sqrt{1-t}\right)}+2\left(1+\sqrt{1-t}\right)\cdot\frac{1}{\left(1+\sqrt{1-t}\right)}=-1+2=1$$

Quindi al variare di $0\le t\le 1$, i possibili vertici sono

$V(t)=\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-t}},1\right)$ e la famiglia di parabole ha equazione

$$y=\left(t-2-2\sqrt{1-t}\right)x^2+\left(2+2\sqrt{1-t}\right)x$$

Punto 2

La retta OP ha equazione $y=tx$. L'area del segmento parabolico limitato dalla corda OP e dalla parabola di equazione $y=\left(t-2-2\sqrt{1-t}\right)x^2+\left(2+2\sqrt{1-t}\right)x$ è pari a:

$$\int_0^1\left[\left(t-2-2\sqrt{1-t}\right)x^2+\left(2+2\sqrt{1-t}\right)x-tx\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[\left(t-2-2\sqrt{1-t}\right)x^2-\left(t-2-2\sqrt{1-t}\right)x\right]dx=$$

$$=\left(t-2-2\sqrt{1-t}\right)\int_0^1\left(x^2-x\right)dx=\left(t-2-2\sqrt{1-t}\right)\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=$$

$$=\left(t-2-2\sqrt{1-t}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{2-t+2\sqrt{1-t}}{6}\right)$$

L'area del quadrato di lato unitario è pari a 1, per cui imponendo che l'area del segmento parabolico sia la metà di quella del quadrato si ha:

$$\left(\frac{2-t+2\sqrt{1-t}}{6}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow 2-t+2\sqrt{1-t}=3\Rightarrow 2\sqrt{1-t}=1+t\,.$$

Tale equazione ha senso di esistere in quanto per ipotesi $0\le t\le 1$, per cui elevando ambo i membri al quadrato si ha:

$4(1-t)=(1+t)^2\Rightarrow t^2+6t-3=0\Rightarrow t_{\pm}=-3\pm 2\sqrt{3}$ e la soluzione accettabile che rispetta la condizione $0<t<1$ è $t_+=-3+2\sqrt{3}$. Con tale valore di *t*, calcoliamo i coefficienti della parabola dati dalle seguenti espressioni:

$$\left[t-2-2\sqrt{1-t}\right]_{t=-3+2\sqrt{3}}=-3+2\sqrt{3}-2-2\sqrt{4-2\sqrt{3}}=-3+2\sqrt{3}-2-2\left(\sqrt{3}-1\right)=-3$$

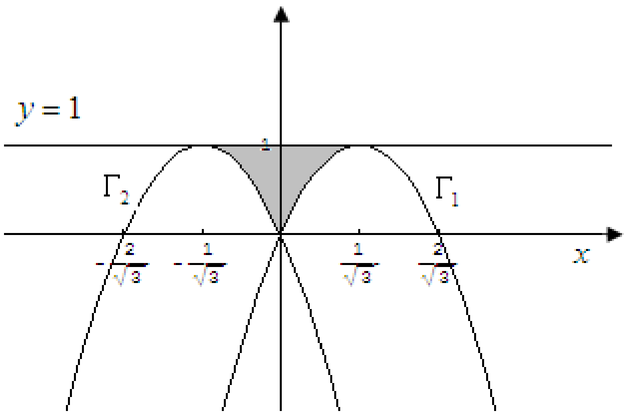
$$\left[2+2\sqrt{1-t}\right]_{t=-3+2\sqrt{3}}=2+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2+2\left(\sqrt{3}-1\right)=2\sqrt{3}$$

in cui abbiamo sfruttato che $\left(4-2\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$.

In conclusione l'equazione della parabola Γ_1 è $y=-3x^2+2\sqrt{3}x$ così come indicato dalla traccia.

Punto 3

L'equazione di Γ_2 simmetrica di Γ_1 rispetto all'asse y si ottiene da $y=-3x^2+2\sqrt{3}x$ con la trasformazione $\begin{cases} X=-x \\ Y=y \end{cases}$ per cui Γ_2 è $Y=-3X^2-2\sqrt{3}X$ e ritornando al formalismo con ascissa ed ordinate minuscole l'equazione di Γ_2 è $y=-3x^2-2\sqrt{3}x$.



L'area da calcolare è raffigurata in grigio.

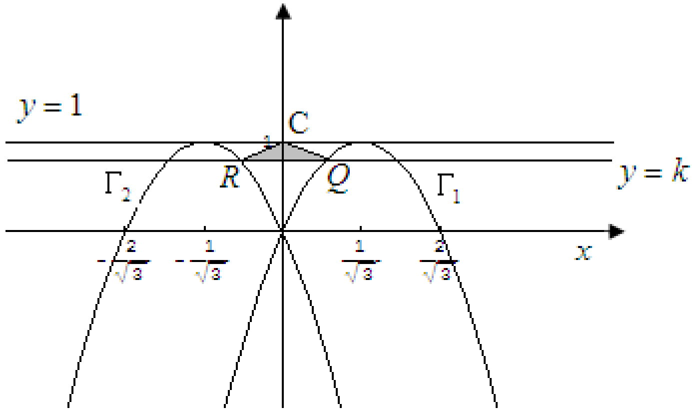
Per simmetria l'area da calcolare è pari a

$$Area = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left[1-\left(-3x^2+2\sqrt{3}x\right)\right]dx = 2\left[x+x^3-\sqrt{3}x^2\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = .$$

$$= 2\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{9}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Punto 4

Consideriamo la figura a lato.
Siano R l'intersezione della retta $y=k$, $0<k<1$, con la parabola di equazione $y=-3x^2-2\sqrt{3}x$ e Q con la parabola di equazione $y=-3x^2+2\sqrt{3}x$.



Calcoliamo le ascisse di suddetti punti.
Calcolo punto R:
Bisogna risolvere l'equazione

$$-3x^2-2\sqrt{3}x=k \Rightarrow 3x^2+2\sqrt{3}x+k=0 \Rightarrow x_{\pm}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-1\pm\sqrt{1-k}\right) \text{ e}$$

l'ascissa accettabile è $x_R = x_+ = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-1+\sqrt{1-k}\right)$ per cui il punto R ha coordinate $R=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-1+\sqrt{1-k}\right),k\right)$;

Calcolo punto Q:
Bisogna risolvere l'equazione

$-3x^2+2\sqrt{3}x=k \Rightarrow 3x^2-2\sqrt{3}x+k=0 \Rightarrow x_{\pm}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1\pm\sqrt{1-k}\right)$ e

l'ascissa accettabile è $x_Q=x_-=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1-\sqrt{1-k}\right)$ per cui il punto Q ha

coordinate $Q=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1-\sqrt{1-k}\right),k\right)$;

La base RQ del triangolo QCR misura

$|RQ|=|x_Q-x_R|=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left|1-\sqrt{1-k}\right|$ mentre l'altezza misura $h=(1-k)$

per cui l'area è pari a

$$S(k)=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}\left|1-\sqrt{1-k}\right|\cdot(1-k)}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left|1-\sqrt{1-k}\right|\cdot(1-k).$$

Per $k\in(0,1)$ $\left|1-\sqrt{1-k}\right|=1-\sqrt{1-k}$ per cui l'area da massimizzare

diventa $S(k)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1-\sqrt{1-k}\right)\cdot(1-k)$.

La derivata prima della funzione area è

$$S'(k)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{1}{2\sqrt{1-k}}\cdot(1-k)-\left(1-\sqrt{1-k}\right)\right]=\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{(1-k)-2\sqrt{1-k}+2(1-k)}{2\sqrt{1-k}}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(3\sqrt{1-k}-2\right)$$

ed è positiva se $\sqrt{1-k}>\frac{2}{3}\Rightarrow 1-k>\frac{4}{9}\Rightarrow 0<k<\frac{5}{9}$ e negativa se

$\frac{5}{9}<k<1$ per cui l'area massima è raggiunta per $k=\frac{5}{9}$ e vale

$$S\left(\frac{5}{9}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1-\sqrt{1-\frac{5}{9}}\right)\cdot\left(1-\frac{5}{9}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{81}.$$

PROBLEMA2

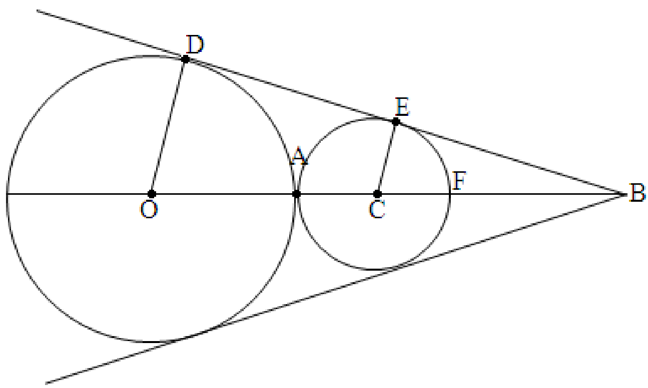
Una circonferenza di centro O e raggio 4 è tangente esternamente nel punto A ad un'altra circonferenza di raggio *x* minore di 4. Le tangenti comuni, non passanti per A, si incontrano in un punto B.

1. Si provi che, al variare di *x*, la distanza $f(x)$ di B da O è data da $f(x)=\frac{4x+16}{4-x}$; si disegni il grafico Γ di $f(x)$ prescindendo dai limiti posti ad *x* dal problema.
2. Sia P un punto di Γ. Si dimostri che la retta tangente a Γ in P incontra gli asintoti di Γ in due punti equidistanti da P. Si verifichi altresì che Γ ammette un centro di simmetria di cui si chiedono le coordinate.
3. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra Γ e gli assi coordinati.
4. Sia infine $g(x)=f(|x|)$. Quale il grafico di $g(x)$? Si determini, al variare di *k* il numero delle radici dell'equazione $g(x)=k$

RISOLUZIONE

Punto 1

Consideriamo la figura a lato.



Sia $\overline{FB}=y$; i triangoli DOB ed ECB sono simili per cui vale la seguente proporzione tra lati omologhi $OD:OB=EC:CB$ che può essere riscritta come

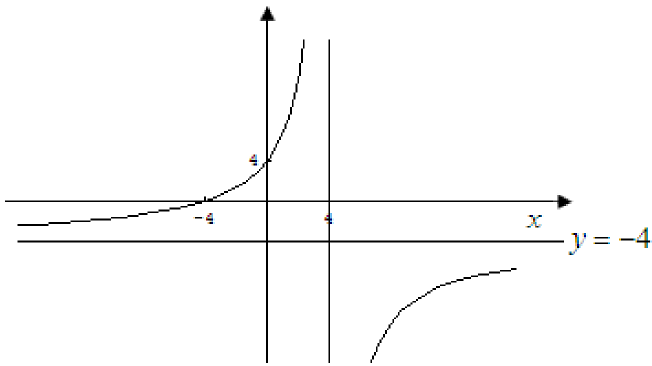
$4:(4+2x+y)=x:(x+y)$; uguagliando il prodotto dei medi e degli estremi si ha $4x+4y=4x+2x^2+xy$ da cui

$$y(4-x)=2x^2 \Rightarrow y=\frac{2x^2}{(4-x)}.$$

La funzione $f(x)$ di conseguenza vale

$$f(x)=4+2x+y=4+2x+\frac{2x^2}{(4-x)}=\frac{(4+2x)(4-x)+2x^2}{(4-x)}=\frac{16+4x}{(4-x)}.$$

La funzione $f(x)=\dfrac{4x+16}{4-x}$ è una classica funzione omografica definita in $R-\{4\}$, positiva in $(-4,4)$, con asintoti di equazione $x=4$ e $y=-4$ e centro di simmetria $(4,-4)$. Il grafico è a lato mostrato.



Punto 2

Un generico punto P di Γ ha coordinate $P=\left(t,\dfrac{4t+16}{4-t}\right)$ e la retta tangente a Γ in P ha equazione $y=m(x-t)+\dfrac{4t+16}{4-t}$ dove

$m=f'(t)=\dfrac{32}{(4-t)^2}$ per cui $y=\dfrac{32}{(4-t)^2}(x-t)+\dfrac{4t+16}{4-t}$. Tale tangente incontra l'asintoto di equazione $x=4$ in

$y=\dfrac{32}{(4-t)^2}(4-t)+\dfrac{4t+16}{4-t}=\dfrac{4t+48}{4-t}$ e l'asintoto $y=-4$ all'ascissa

tale per cui $\dfrac{32}{(4-t)^2}(x-t)+\dfrac{4t+16}{4-t}=-4$ e cioè all'ascissa

$x = t + \frac{(4-t)^2}{32}\left(-4 - \frac{4t+16}{4-t}\right) = t + \frac{(4-t)^2}{32}\left(\frac{-32}{4-t}\right) = 2t-4$. I punti di incontro sono quindi $A = \left(4, \frac{4t+48}{4-t}\right)$ e $B = (2t-4, -4)$ e il punto medio tra i due è

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{4+2t-4}{2}, \frac{\frac{4t+48}{4-t} - 4}{2}\right) = \left(t, \frac{4t+16}{4-t}\right)$$

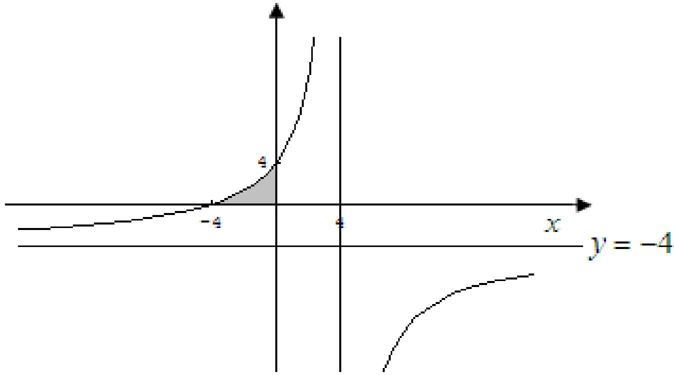
che coincide con P. Di conseguenza P è equidistante dai due punti in cui la retta tangente a Γ, e passante per esso, incontra gli asintoti di Γ.
Il centro di simmetria di una qualsiasi funzione omografica è data dal punto di incontro degli asintoti, e nel caso in esame è $(4,-4)$. Per dimostrarlo consideriamo la trasformazione $\begin{cases} X = 2\cdot 4 - x = 8 - x \\ Y = 2\cdot(-4) - y = -8 - y \end{cases}$ e sostituiamo in essa la funzione $y = \frac{4x+16}{4-x}$. Si ha:

$$Y = -8 - \frac{4(8-X)+16}{4-(8-X)} = -8 - \frac{48-4X}{X-4} = \frac{-8X+32-48+4X}{X-4} = \frac{16+4X}{4-X}$$

e poiché la funzione trasformata coincide con la funzione di partenza, possiamo affermare che il punto $(4,-4)$ è centro di simmetria per $y = \frac{4x+16}{4-x}$.

Punto 3

L'area da calcolare è di seguito raffigurata in grigio.



L'area è data da

$$\int_{-4}^{0}\left(\frac{4x+16}{4-x}\right)dx=\int_{-4}^{0}\left(-4+\frac{32}{4-x}\right)dx=$$

$$=\int_{-4}^{0}(-4)dx+\int_{-4}^{0}\left(\frac{32}{4-x}\right)dx=$$

$$=-16-\left[32\ln|4-x|\right]_{-4}^{0}=$$

$$=-16-32\ln 4+32\ln 8=32\ln 2-16$$

Punto 4

La funzione

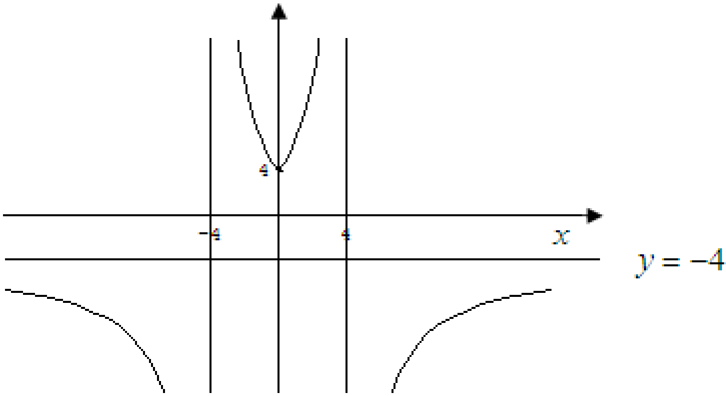
$$g(x)=f(|x|)=\frac{4|x|+16}{4-|x|}=\begin{cases} g_1(x)=\dfrac{4x+16}{4-x} & \text{se } \; x\geq 0\wedge x\neq 4 \\ g_2(x)=g_1(-x)=\dfrac{-4x+16}{4+x} & \text{se } \; x<0\wedge x\neq -4 \end{cases}$$

Quindi

1. nell'intervallo $[0,4)\cup(4,+\infty)$ il grafico di $g_1(x)=\dfrac{4x+16}{4-x}$ coincide con quello di $f(x)$;

2. nell'intervallo $(-\infty,-4)\cup(-4,0)$ il grafico di $g_2(x)=g_1(-x)=\dfrac{4x+16}{4-x}$ è il simmetrico rispetto all'asse delle ordinate del grafico di $g_1(x)$ del punto 1) per la parità della funzione $g(x)$.

$$g(x)=f(|x|)=\frac{4|x|+16}{4-|x|}$$



Dal grafico soprastante possiamo anche individuare quali sono le radici dell'equazione $g(x)=k$.

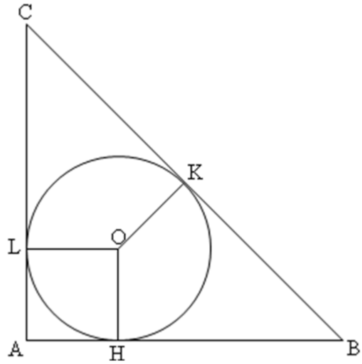
1. Se $k<-4$ l'equazione $g(x)=k$ ha due soluzioni reali simmetriche rispetto all'asse delle ordinate, una positiva α appartenente all'intervallo $(4,+\infty)$ e l'altra negativa $\beta=-\alpha$ appartenente a $(-\infty,-4)$;
2. Se $-4\le k<4$ l'equazione $g(x)=k$ non ha soluzioni reali;
3. Se $k=4$ l'equazione $g(x)=k$ ha due soluzioni reali coincidenti corrispondenti a $x=0$;
4. Se $k>4$ l'equazione $g(x)=k$ ha due soluzioni reali simmetriche rispetto all'asse delle ordinate, una positiva δ appartenente all'intervallo $(0,4)$ e l'altra negativa $\gamma=-\delta$ appartenente a $(-4,0)$.

QUESTIONARIO

Quesito 1

Si provi che se i lati di un triangolo rettangolo sono in progressione aritmetica di ragione d allora il raggio della circonferenza inscritta è uguale a d.

Consideriamo la figura a lato.



I lati del triangolo rettangolo sono in progressione aritmetica di ragione *d*, per cui misurano rispettivamente

$\overline{AB} = x, \overline{AC} = x + d, \overline{BC} = x + 2d$.

Per il teorema di Pitagora deve aversi $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ per cui otteniamo:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow x^2 + (x+d)^2 = (x+2d)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2 + 2xd + d^2 = x^2 + 4xd + 4d^2 \Rightarrow x^2 - 2xd - 3d^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x+d)(x-3d) = 0 \Rightarrow x = -d \vee x = 3d$$

Escludendo la soluzione $x = -d$, i lati del triangolo rettangolo in progressione aritmetica di ragione d misurano

$\overline{AB} = 3d, \overline{AC} = 4d, \overline{BC} = 5d$.

Per il teorema delle tangenti condotte a una circonferenza si ha $\overline{BH} = \overline{BK}$ e $\overline{LC} = \overline{KC}$ per cui l'ipotenusa del triangolo è $\overline{BC} = \overline{BK} + \overline{KC} = \left(\overline{AB} - \overline{AH}\right) + \left(\overline{AC} - \overline{AL}\right) = \overline{AB} + \overline{AC} - 2\overline{AL}$ in quanto $\overline{AH} = \overline{AL}$ poiché coincidenti con il raggio della circonferenza inscritta. Di conseguenza il raggio della circonferenza inscritta è pari a

$$\overline{AL} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}}{2} = \frac{3d + 4d - 5d}{2} = d .$$

Quesito 2

Sia W il solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y la parte di piano compresa, per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, fra il grafico di $y = \sin x$ e l'asse x.

Quale dei seguenti integrali definiti fornisce il volume di W?

A) $2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$; B) $\pi \int_0^1 (\arcsin x)^2 dx$; C) $\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$; D) nessuno di questi

Si motivi la risposta.

La risposta esatta è la A).
Pensiamo la regione R decomposta in tanti ognuno dei quali genera un solido pari alla differenza di due cilindretti, in modo che, intuitivamente potremo pensare W come somma progressiva di infiniti gusci cilindrici coassiali di spessore dx, dove il raggio x varia da 0 a $\frac{\pi}{2}$.

Il volume del guscio (infinitesimo) può essere calcolato come prodotto dell'area circolare di base di raggio esterno $(x_i + \Delta x_i)$ e raggio interno x_i , per l'altezza:

$V_i = \pi \cdot \left[(x_i + \Delta x_i)^2 - x_i^2\right] \cdot \sin x_i$. Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore a $\Delta x_i^{\ 2}$ il volume infinitesimo sarà $V_i = 2\pi \cdot x_i \cdot \sin x_i \cdot \Delta x_i$. Se il numero di gusci cilindrici in cui

suddividiamo l'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ è N il volume richiesto sarà:

$$V = \lim_{N \to +\infty} \sum_{i=1}^{N} V_i = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} 2\pi \cdot x_i \cdot \sin x_i \cdot \Delta x_i \right) = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$= 2\pi \left[-x \cos x + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$$

Quesito 3

Fra tutti i parallelepipedi rettangoli, a base quadrata, di superficie totale a^2 quale è quello di volume massimo?

Indichiamo con $0 < x < a$ il lato del quadrato di base del parallelepipedo; il perimetro di base e l'area di base sono di conseguenza rispettivamente $2p(x) = 4x$ e $A_b(x) = x^2$. La superficie totale è somma della superficie laterale e del doppio dell'area di base, dove la superficie laterale è il prodotto del perimetro di base per l'altezza: $S_T(x) = S_L(x) + 2A_b(x) = 2p(x) \cdot h(x) + 2A_b(x) = 4x \cdot h(x) + 2x^2$.

Imponendo che la superficie totale sia pari ad a^2 si ha che l'altezza del parallelepipedo è pari a $h(x) = \frac{S_T(x) - 2x^2}{4x} = \frac{a^2 - 2x^2}{4x}$; il volume del parallelepipedo è pari al prodotto delle tre dimensioni, cioè dell'area di base per l'altezza: $V(x) = A_b(x) \cdot h(x) = x^2 \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{4x} = \frac{a^2 x - 2x^3}{4}$.

Cerchiamo il volume massimo studiando la derivata:

$$V'(x) = \frac{a^2 - 6x^2}{4} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Il volume è massimo quando il lato del quadrato di base è $x = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

esso vale $V\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{a^2\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right) - 2\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^3}{4} = \frac{\frac{a^3\sqrt{6}}{6} - \frac{a^3\sqrt{6}}{18}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$.

In questo caso notiamo che il parallelepipedo di volume massimo coincide con il cubo di spigolo $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Quesito 4

La curva di equazione $y=\sqrt{x\ln x}$ ammette punti con tangente parallela all'asse x? Ammette punti con tangente parallela all'asse y? In caso affermativo si determinino.

Il dominio della funzione $y=\sqrt{x\ln x}$ è dato da:

$$D_f:\begin{cases} x\ln x\geq 0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x\geq 0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[1,+\infty).$$

I punti con tangente parallela all'asse *x* o a tangente orizzontale sono i punti in cui si annulla la derivata prima; quest'ultima è

$$y'=\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}}{2\sqrt{x\ln x}}=\frac{\ln x+1}{2\sqrt{x\ln x}}$$

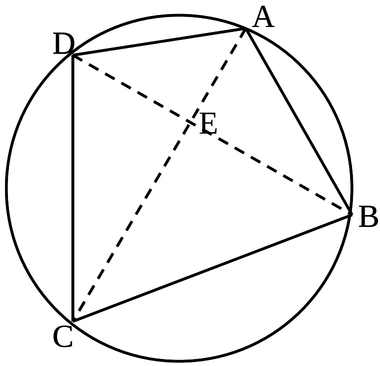
si annulla nei punti in cui $\ln x+1=0\Rightarrow x=e^{-1}$ ma poiché tale ascissa non appartiene al dominio $[1,+\infty)$ possiamo dire che la funzione non presenta punti a tangente orizzontale. Infatti la funzione $y=\sqrt{x\ln x}$ è strettamente crescente in tutto il dominio $[1,+\infty)$.

I punti a tangente verticale sono i punti in cui la derivata prima diverge, e poiché $\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x+1}{2\sqrt{x\ln x}}=\frac{\ln 1+1}{2\cdot 0^+}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ deduciamo che $x=1$ è un flesso a tangente verticale crescente.

In conclusione la funzione $y=\sqrt{x\ln x}$ non presenta punti a tangente orizzontale e presenta $x=1$ come punto a tangente verticale.

Quesito 5

In una circonferenza di centro O e raggio r sono date due corde prive di punti comuni $AB = r$ e $CD = r\sqrt{3}$. Si dimostri che il quadrilatero ABCD ha le diagonali perpendicolari.



Consideriamo la figura a lato.

Applicando il teorema della corda ai triangoli ABC e DBC, si ha

$$D\hat{C}A = \arcsin\left(\frac{\overline{AB}}{2r}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$D\hat{B}C = \arcsin\left(\frac{\overline{CD}}{2r}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

; di conseguenza $C\hat{E}B = \pi - D\hat{C}A - D\hat{B}C = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ per cui le diagonali del quadrilatero sono perpendicolari.

Quesito 6

Sia P un punto del piano di coordinate $\left(t+\frac{1}{t}, t-\frac{1}{t}\right)$. Quale è l'equazione cartesiana del luogo descritto da P al variare di $t\,(t \neq 0)$?

Poniamo $\begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases}$ da cui sommando e sottraendo $\begin{cases} x + y = 2t \\ x - y = \frac{2}{t} \end{cases}$

Infine, eliminando il parametro *t*, $x + y = 2 \cdot \left(\frac{2}{x-y}\right) \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$;

il luogo è, quindi, una iperbole equilatera con asintoti le bisettrici di equazione $y = \pm x$.

Quesito 7

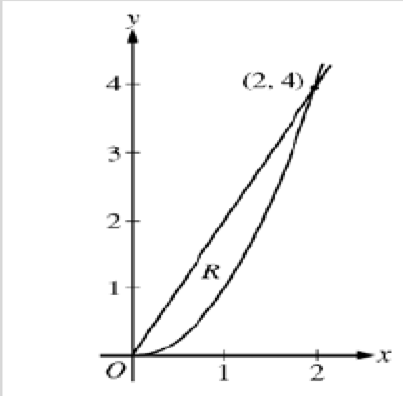
Si calcoli il valor medio della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ nell'intervallo $[-1,1]$ e se ne indichi il significato geometrico.

Il valor medio della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ nell'intervallo $[-1,1]$ è pari a $V_M = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ in cui abbiamo sfruttato la parità della funzione integranda. Geometricamente tale valore coincide con la somma delle aree dei rettangolini di base 2 ed altezza pari a $f(x_0)$ con $x_0 \in [-1,1]$.

Quesito 8

La regione R è delimitata da $y = 2x$ e $y = x^2$ come mostrato nella figura a lato.
R è la base di un solido W
le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari
all'asse x, hanno area $A(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Si determini il volume di W.



Il volume richiesto è

$$V = \int_0^2 A(x)dx = \int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^2 = \left[\left(\frac{2}{\pi}\right) - \left(-\frac{2}{\pi}\right)\right] = \frac{4}{\pi}$$