PROBLEMA1

Data una semicirconferenza di diametro $AB = 2$, si prenda su di essa un punto P e sia M la proiezione di P sulla retta perpendicolare in B ad AB.

1. Si esprima la somma $AP + PM$ in funzione di $P\hat{A}B = x$
2. Si studi la funzione f(x) e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$, mettendo in evidenza poi la parte di grafico compatibile con i dati del problema.
3. Si verifichi che la curva γ è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = \pi$
4. Si calcoli l'area della regione piana, limitata dalla curva γ, dagli assi cartesiani e dalla retta di equazione $x = \frac{\pi}{3}$.

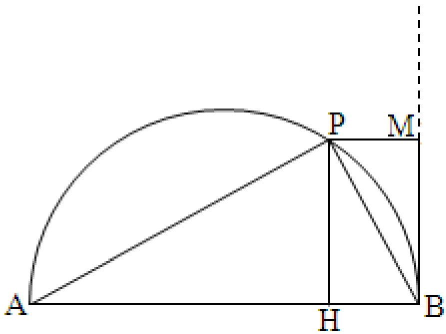
RISOLUZIONE

Punto 1

Con riferimento alla figura,

posto $P\hat{A}B = x$ con $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$,

poiché il triangolo APB è rettangolo in quanto inscritto in una semicirconferenza, applicando il teorema sui triangoli rettangoli



$$\overline{AP} = \overline{AB} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\cos x;$$

applicando lo stesso teorema al triangolo APH si ha

$$\overline{AH} = \overline{AP} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\cos^2 x \text{ per cui}$$

$\overline{PM} = \overline{AB} - \overline{AH} = 2 - 2\cos^2 x$. Di conseguenza

$$f(x) = \overline{AP} + \overline{PM} = 2\left(-\cos^2 x + \cos x + 1\right).$$

Punto 2

Studiamo la funzione $f(x)=2\left(-\cos^2 x+\cos x+1\right)$ in $[0,2\pi]$

Dominio: $[0,2\pi]$;

Intersezione asse ascisse:

$f(x)=0 \Rightarrow \left(-\cos^2 x+\cos x+1\right)=0 \Rightarrow \cos(x)=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; la soluzione

$\cos(x)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}>1$ mentre è accettabile $\cos(x)=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ cui corrisponde nell'intervallo $[0,2\pi]$

$$x_1=\pi-\arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right), x_2=\pi+\arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right);$$

Intersezione asse ordinate: $x=0 \Rightarrow f(0)=2$

Simmetrie: la funzione è periodica di periodo $T=2\pi$ e pari in quanto

$f(-x)=2\left[-\cos^2(-x)+\cos(-x)+1\right]=2\left[-\cos^2(x)+\cos(x)+1\right]=f(x)$;

Positività:

$$f(x)>0 \to -\cos^2 x+\cos x+1>0 \to \frac{1-\sqrt{5}}{2}<\cos(x)<\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\cos(x)>\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

per cui

$$f(x)>0 \to 0<x<\pi-\arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \vee \pi+\arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)<x<2\pi;$$

Asintoti verticali: non ve ne sono in quanto la funzione è periodica e limitata;

Asintoti orizzontali: non ve ne sono in quanto la funzione è periodica e limitata;

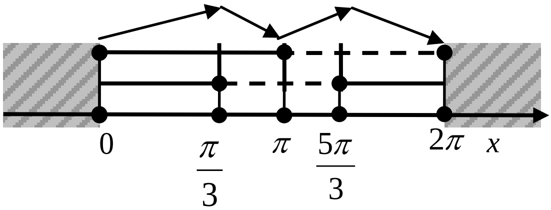
Asintoti obliqui: non ve ne sono in quanto la funzione è periodica e limitata;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $f'(x)=4\sin(x)\cos(x)-2\sin(x)=2\sin(x)\cdot[2\cos(x)-1]$; di seguito il quadro dei segni

$$\sin(x)>0\Rightarrow 0<x<\pi$$

$$\cos(x)>\frac{1}{2}\Rightarrow 0<x<\frac{\pi}{3}\vee\frac{5\pi}{3}<x<2\pi$$

$$f'(x)>0\Rightarrow 0<x<\frac{\pi}{3}\vee\pi<x<\frac{5\pi}{3}$$



Dal quadro soprastante deduciamo che la funzione presenta un minimo relativo in $\mathrm{m}=(\pi,-2)$ e due massimi relativi in

$$\mathrm{M}_1=\left(\frac{\pi}{3},\frac{5}{2}\right),\mathrm{M}_2=\left(\frac{5\pi}{3},\frac{5}{2}\right);$$

Concavità e convessità: la derivata seconda è

$f''(x)=2\left[4\cos^2(x)-\cos(x)-2\right]$ per cui

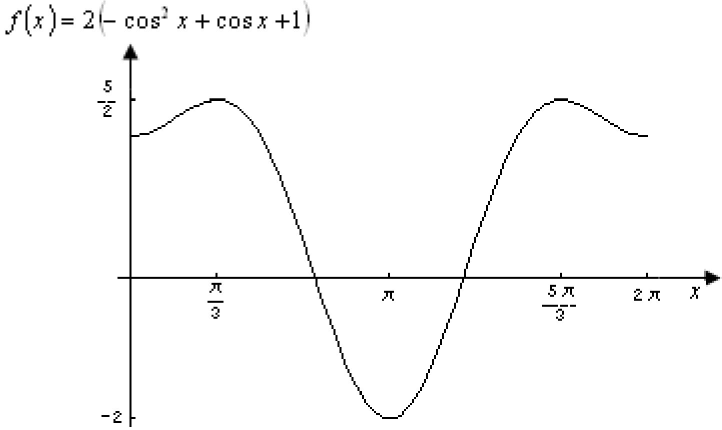
$$f''(x)>0\rightarrow\cos(x)<\frac{1-\sqrt{33}}{8}\vee\cos(x)>\frac{1+\sqrt{33}}{8}\Rightarrow 0<x<\arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\vee$$

$$\vee\pi-\arccos\left(\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)<x<\pi+\arccos\left(\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)\vee 2\pi-\arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)<x<2\pi$$

Quindi la funzione presenta concavità verso l'alto in

$$\left(0,\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\cup\left(\pi-\arccos\frac{\sqrt{33}-1}{8},\pi+\arccos\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)\cup\left(2\pi-\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8},2\pi\right)$$

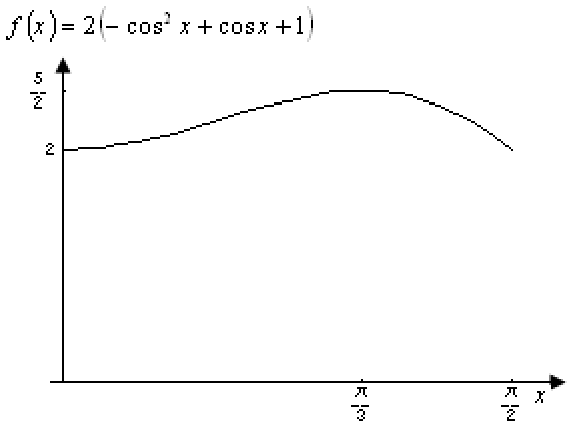
e presenta quattro flessi a tangente obliqua in



$$x=\arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\cong 32{,}5°, x=\pi-\arccos\left(\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)\cong 126{,}4°,$$

$$x=\pi+\arccos\left(\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)\cong 233{,}4°, x=2\pi-\arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\cong 327{,}5°$$

Il grafico è presentato a fianco.
La parte di grafico rispondente alle limitazioni geometriche $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ è di seguito presentata:



Punto 3

Una funzione è simmetrica rispetto alla retta $x = k$ se $f(x) = f(2k - x)$. Nel caso in esame

$$f(2\pi - x) = -2\cos^2(2\pi - x) + 2\cos(2\pi - x) + 2 =$$

$$= -2\cos^2(x) + 2\cos(x) + 2 = f(x)$$

per cui $f(x)$ è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.

Punto 4

L'area richiesta è pari a

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[-2\cos^2(x) + 2\cos(x) + 2\right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[-2\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right) + 2\cos(x) + 2\right] dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[-\cos(2x) + 2\cos(x) + 1\right] dx = \left[-\frac{\sin(2x)}{2} + 2\sin(x) + x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

PROBLEMA2

Sia data la funzione $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*.
2. Si scrivano l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso e quella della retta ad essa parallela, passante per il punto di γ avente ascissa $\sqrt{3}$; si calcoli l'area del parallelogramma formato da queste due rette, dall'asse x e dall'asintoto orizzontale destro. 3
3. Si calcoli l'area della regione A_k, delimitata dalla curva γ, dall'asse y, dall'asintoto orizzontale destro e dalla retta $x = k$ con $k > 0$. Si calcoli poi il limite di A_k quando $k \to +\infty$.
4. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva γ, dalla tangente inflessionale e dalla retta $x = 1$.

RISOLUZIONE

Punto 1

Studiamo la funzione $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Dominio: R;

Intersezione asse ascisse: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=0 \Rightarrow x=0$

Intersezione asse ordinate: $x=0 \Rightarrow f(0)=0$

Simmetrie: la funzione è dispari in quanto

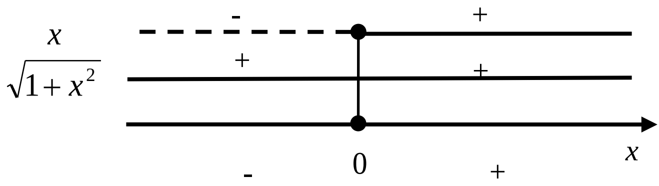
$$f(-x)=-\frac{x}{\sqrt{1+(-x)^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=-f(x)$$

Positività:

$$x > 0$$

$$\sqrt{1+x^2} > 0 \Rightarrow \forall x \in R$$

$$f(x) > 0 \Rightarrow x > 0$$



Asintoti verticali: non ve ne sono in quanto il dominio è R;

Asintoti orizzontali: la funzione $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ può essere scritta anche come $f(x) = \frac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ per cui $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right) = -1$ per cui la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale destro e $y = -1$ asintoto orizzontale sinistro.

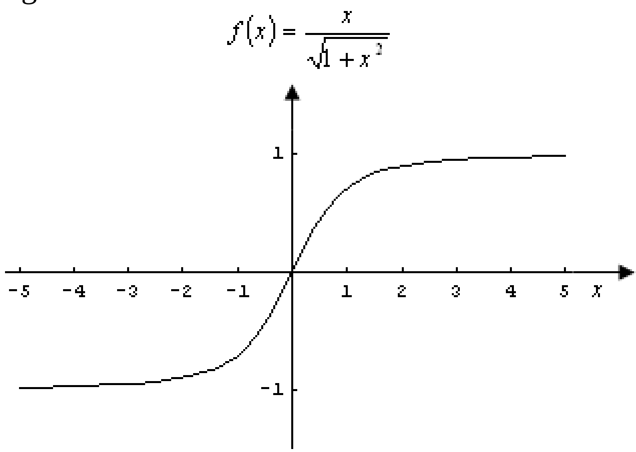
Asintoti obliqui: non esistono in quanto $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = 0$;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $f'(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$ per cui

la funzione è crescente in
tutto il dominio R;

Concavità e convessità: la derivata seconda è $f''(x)=-\frac{3x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}$ per

cui la funzione presenta
concavità verso l'alto in $(-\infty,0)$ e verso il basso in $(0,\infty)$; la funzione
presenta quindi un flesso a
tangente obliqua $\mathrm{F}=(0,0)$ con tangente inflessionale di equazione
$y=x$.
Di seguito il grafico:

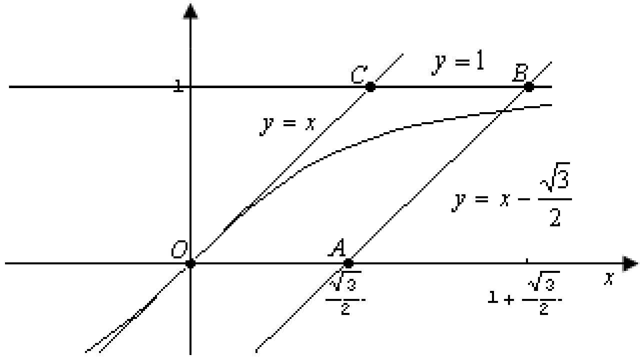


Punto 2

La tangente inflessionale come indicato al Punto 1 ha equazione $y = x$;

il punto ad ascissa $\sqrt{3}$ è $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ per cui la tangente passante per

$\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e parallela a $y = x$ ha equazione



$$y = \left(x - \sqrt{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = x - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A lato il parallelogramma di cui calcolare l'area.

I vertici del parallelogramma sono:

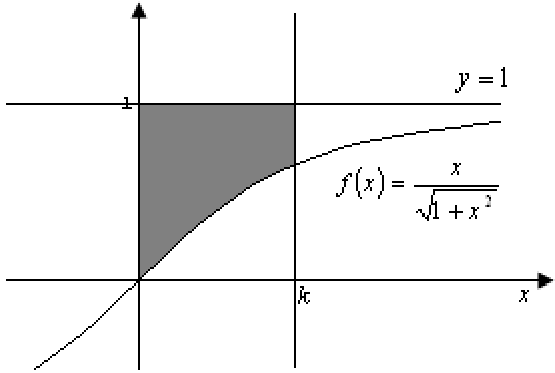
$$O(0,0), A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), B\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right), C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$$

L'area del parallelogramma è pari al prodotto della base per l'altezza:

$S(OABC) = \overline{OA} \cdot \overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dal momento che $\overline{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \overline{AC} = 1$.

Punto 3

L'area da calcolare è di seguito raffigurata in grigio.



L'area richiesta è pari a

$$A_k=\int_0^k\left(1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx=\left[x-\sqrt{1+x^2}\right]_0^k=\left(k-\sqrt{1+k^2}+1\right).$$

Il limite richiesto è invece

$$\lim_{k\to+\infty}\left(k-\sqrt{1+k^2}+1\right)=\lim_{k\to+\infty}\frac{\left(k+1-\sqrt{1+k^2}\right)\left(k+1+\sqrt{1+k^2}\right)}{\left(k+1+\sqrt{1+k^2}\right)}=$$

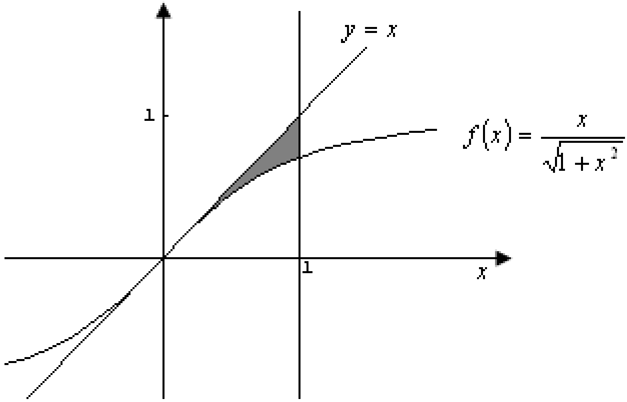
$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{(k+1)^2-\left(k^2+1\right)}{\left(k+1+\sqrt{1+k^2}\right)}=\lim_{k\to+\infty}\frac{2k}{\left(k+|k|\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}\right)}=\lim_{k\to+\infty}\frac{2k}{\left(k+k\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}\right)}=$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{2}{\left(1+\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}\right)}=\frac{2}{1+1}=1$$

in cui abbiamo sfruttato il fatto che $|k|=k$ per $k\to+\infty$

Punto 4

La porzione di piano limitata dalla curva γ, dalla tangente inflessionale e dalla retta $x = 1$ è



Il volume richiesto è pari a:

$$V = \pi\int_0^1\left(x^2 - \frac{x^2}{1+x^2}\right)dx = \pi\int_0^1\left(x^2 - \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\right)dx =$$

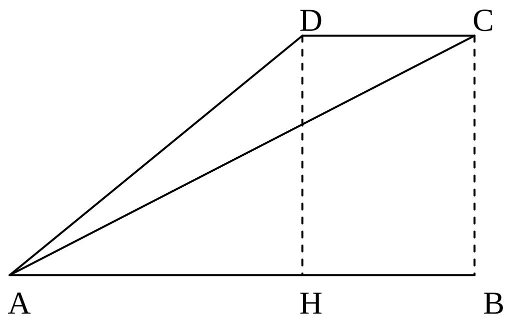
$$= \pi\int_0^1\left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right]_0^1 = \frac{3\pi^2 - 8\pi}{12}$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 metri. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di 30°. Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a 20°, con che velocità si stanno spostando gli uccelli?

Consideriamo la figura a lato, rappresentante la geometria del problema.



I triangoli ABC e DAH sono rettangoli per cui applicando il teorema dei seni i lati AB ed AH misurano rispettivamente

$\overline{AB} = \overline{BC} \cdot \tan(90° - 20°) = 260 \cdot \tan(70°) \cong 714{,}34$ metri e
$\overline{AH} = \overline{DH} \cdot \tan(90° - 30°) = 260 \cdot \tan(60°) \cong 450{,}34$ metri. Di conseguenza il percorso compiuto dagli uccelli in un minuto è pari a $\overline{DC} = \overline{AB} - \overline{AH} = 714{,}34 - 450{,}34 = 264$ metri, ad una velocità quindi pari a $v = \frac{s}{t} = \frac{264[m]}{60[s]} = 4{,}4\left[\frac{m}{s}\right]$.

Quesito 2

La funzione: $f(x)=\frac{1}{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^2}$ non è definita nel punto x = 0, che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della f(x) per x tendente a zero da sinistra e per x tendente a zero da destra.

Calcoliamo il limite $\lim_{x\to 0} f(x)$; il limite destro vale

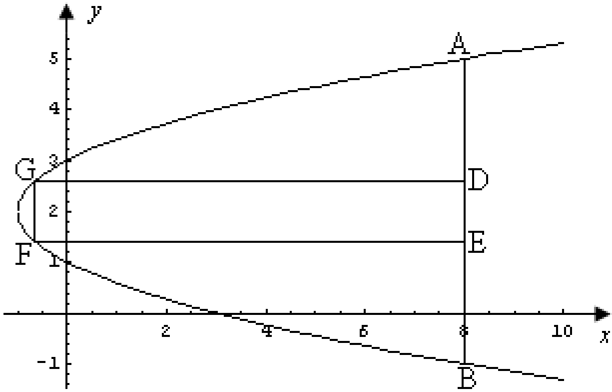
$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^2}=\frac{1}{\left(e^{+\infty}-1\right)^2}=\frac{1}{+\infty}=0$ mentre il limite sinistro vale

$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^2}=\frac{1}{\left(e^{-\infty}-1\right)^2}=\frac{1}{(0-1)^2}=1$. Quindi il punto $x=0$ è di discontinuità di prima specie ed è un punto angoloso per la funzione.

Quesito 3

La retta di equazione *x* = 8 seca la parabola di equazione $x=y^2-4y+3$ nei punti A e B. Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base AB si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di 180° intorno all'asse della parabola.

Consideriamo la figura seguente. La parabola ha asse parallelo all'asse delle ascisse di equazione $y=2$, interseca l'asse delle ordinate nei punti $y=1 \vee y=3$ e quello delle ascisse in $x=4$ ed ha vertice in $V(-1,2)$.



Il lato FE del rettangolo DEFG, nel sistema di riferimento cartesiano giace sulla retta di equazione $y = k$ con $-1 < k < 2$ per cui le coordinate dei punti D ed E sono rispettivamente, sfruttando la simmetria rispetto alla retta $y = 2$, $D(8, 4-k), E(8, k)$; i vertici G ed F sono, invece, $F(k^2 - 4k + 3, k), G(k^2 - 4k + 3, 4-k)$.

Il cilindro di volume massimo in una rotazione di 180° intorno all'asse della parabola ha raggio di base $R = \frac{\overline{DE}}{2} = 2 - k$ ed altezza $h = \overline{FE} = 8 - (k^2 - 4k + 3) = 5 - k^2 + 4k$; di conseguenza il volume è pari a $V(k) = \pi R^2 h = \pi(2-k)^2(5 - k^2 + 4k)$ con $-1 < k < 2$. La massimizzazione del volume la effettuiamo mediante derivazione; la derivata prima è pari a $V'(k) = 2\pi(2-k)(2k^2 - 8k - 1)$ e il segno dei fattori componenti è:

$2 - k > 0 \Rightarrow k < 2$

$(2k^2 - 8k - 1) > 0 \Rightarrow k < \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2} \vee k > \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2}$

Tenendo presente la limitazione $-1 < k < 2$ deduciamo che $V'(k) > 0 \Rightarrow -1 < k < \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}$ per cui la funzione volume è strettamente crescente in $\left(-1, \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}\right)$ e strettamente decrescente in

$\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2}, 2\right)$; di conseguenza il volume massimo lo si ha per

$k = \frac{4-3\sqrt{2}}{2}$ cui corrispondono i vertici

$D\left(8, \frac{4+3\sqrt{2}}{2}\right), E\left(8, \frac{4-3\sqrt{2}}{2}\right), F\left(\frac{7}{2}, \frac{4-3\sqrt{2}}{2}\right), G\left(\frac{7}{2}, \frac{4+3\sqrt{2}}{2}\right)$ ed un valore massimo pari a $V_{max} = V\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{81}{4}\pi$.

Quesito 4

Si determini il campo di esistenza della funzione: $f(x) = \left(3\cos x + \sin^2 x - 3\right)^{\cos x}$. Cosa succederebbe se l'esponente fosse $\sin x$?

Il dominio della funzione $f(x) = \left(3\cos x + \sin^2 x - 3\right)^{\cos x}$ è dato da:

$$\left(3\cos x + \sin^2 x - 3\right) > 0 \vee \begin{cases} 3\cos x + \sin^2 x - 3 = 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}.$$

La disequazione $\left(3\cos x + \sin^2 x - 3\right) > 0$ è equivalente a $\cos^2 x - 3\cos x + 2 < 0$. Poiché $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = (\cos x - 1)(\cos x - 2)$ la disequazione è soddisfatta se $1 < \cos x < 2$; poiché la funzione coseno è limitata ed assume valore massimo unitario la disequazione $1 < \cos x < 2$ non è mai verificata.

Il sistema $\begin{cases} 3\cos x + \sin^2 x - 3 = 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$, invece, è equivalente a

$\begin{cases} \cos x = 1 \vee \cos x = 2 \\ \cos x > 0 \end{cases}$ ed è verificato dagli x tale che $\cos x = 1$ e cioè da $x = 2k\pi$ con $k \in Z$. In conclusione, mettendo assime le soluzioni, il dominio di $f(x) = \left(3\cos x + \sin^2 x - 3\right)^{\cos x}$ è $D = 2k\pi$ con $k \in Z$.

Se l'esponente fosse $\sin x$ il sistema diventerebbe

$\begin{cases} \cos x = 1 \vee \cos x = 2 \\ \sin x > 0 \end{cases}$ e i valori per cui $\cos x = 1$ sono quelli per cui $\sin x = 0$; di conseguenza il sistema non avrebbe soluzioni e la funzione $f(x) = \left(3\cos x + \sin^2 x - 3\right)^{\sin x}$ non avrebbe senso per nessun valore reale.

Quesito 5

Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = e^x(x^2 + x + 1)$, nell'intervallo $0 \le x \le 1$.

Il valor medio di una funzione $f(x)$ in $[a,b]$ è $V_M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Nel caso in esame $V_M = \int_0^1 \left[e^x(x^2 + x + 1)\right]dx$; applicando l'integrazione per parti si ha

$$V_M = \int_0^1 \left[e^x(x^2 + x + 1)\right]dx = \left[e^x(x^2 + x + 1)\right]_0^1 - \int_0^1 \left[e^x(2x + 1)\right]dx =$$

$$= \left[e^x(x^2 + x + 1)\right]_0^1 - \left[e^x(2x + 1)\right]_0^1 + \int_0^1 2e^x dx$$

$$= \left[e^x(x^2 + x + 1)\right]_0^1 - \left[e^x(2x + 1)\right]_0^1 + \left[2e^x\right]_0^1 =$$

$$= \left[e^x(x^2 - x + 2)\right]_0^1 = 2e - 2$$

Quesito 6

Si dica se l'equazione: $2\sin x + 2\cos x = 3 + 2^x$ ha soluzione.

Ricordando che $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ l'equazione da risolvere diventa $2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=3+2^x$ e cioè $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{4}+2^{x-\frac{3}{2}}$.

Poiché $\frac{3\sqrt{2}}{4}>1$ a maggior ragione

$\frac{3\sqrt{2}}{4}+2^{x-\frac{3}{2}}>1\ \forall x\in R$ essendo la funzione potenza sempre positiva per definizione, per cui deduciamo che l'equazione di partenza non ha soluzioni in R.

Quesito 7

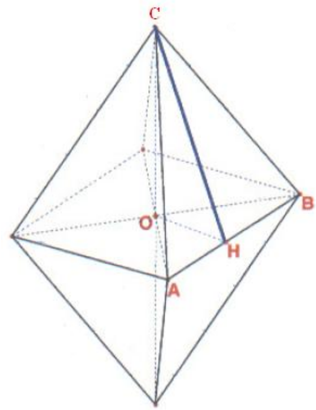
Si domanda quale rapporto bisogna stabilire tra lo spigolo dell'ottaedro regolare e lo spigolo del cubo affinché i due solidi abbiano volumi uguali.

Calcoliamo i due volumi.

Il volume cubo di spigolo L è $V_C=L^3$;

Il volume dell'ottaedro di spigolo L_1 può essere visto come la somma dei volumi delle due piramidi componenti.

In accordo con la figura si ha



$\overline{OH}=\frac{L_1}{2},\overline{CH}=L_1\frac{\sqrt{3}}{2},\overline{CO}=\sqrt{\overline{CH}^2-\overline{OH}^2}=L_1\frac{\sqrt{2}}{2}$ per cui il volume di una delle due piramidi è $V_P = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{L_1^2 \cdot L_1 \frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = L_1^3 \frac{\sqrt{2}}{6}$ da cui il volume dell'ottaedro è $V_O = 2V_P = L_1^3 \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Il rapporto tra i due volumi è $\frac{V_O}{V_c} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{L_1^3}{L^3}$; per avere uguali volumi e quindi un rapporto unitario deve aversi

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \frac{L_1^3}{L^3} = 1 \Rightarrow L_1^3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} L^3 \Rightarrow L_1 = L \cdot \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = L \cdot \sqrt[6]{\frac{9}{2}}.$$

Quesito 8

Si dimostri che la seguente proposizione è vera: "Se il grafico di una funzione razionale intera *f* (*x*) è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, allora il grafico della sua derivata *f'*(*x*) è simmetrico rispetto all'origine".

Una funzione razionale intera, supposto per semplicita *n* pari, può essere scritta come $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ con $a_i \in R$ e affinchè sia pari, cioè $f(x) = f(-x)$, deve aversi $a_i = 0$ per i dispari. Di conseguenza la funzione razionale fratta diventa $f(x) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} a_{2i} x^{2i}$, cioè somma di funzioni potenze ad esponente pari e quindi somma di funzioni pari. La derivata prima, invece, è $f'(x) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} 2i \cdot a_{2i} x^{2i-1}$ ed essendo somma di funzioni potenze ad esponente dispari e quindi somma di funzioni dispari è anch'essa dispari per cui il suo grafico sarà simmetrico rispetto all'origine.

Quesito 9

Si calcoli il limite della funzione $\frac{e^{x^3}-1}{x\sin^2 x}$ quando x tende a 0.

Dobbiamo calcolare il limite $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{x\sin^2 x}$; esso può essere scritto come

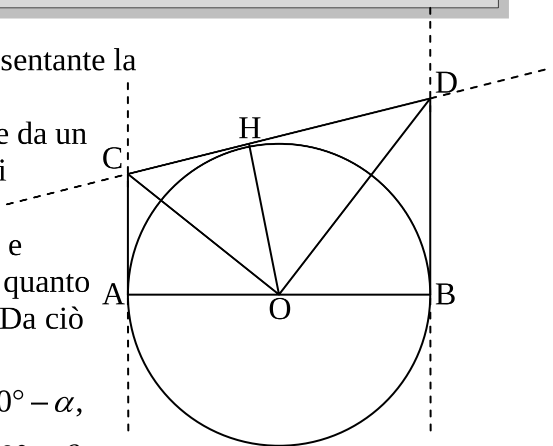
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^3}-1}{x^3}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^3}-1}{x^3}\right)\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^3}-1}{x^3}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-2}=1$$

in cui abbiamo applicato i limiti fondamentali

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^3}-1}{x^3}\right)=1, \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

Quesito 10

Data una circonferenza di centro O, si conducano negli estremi A e B di un suo diametro AB le tangenti e siano C e D i punti d'intersezione di esse con una terza tangente alla circonferenza. Si dimostri che l'angolo $C\hat{O}D$ è retto.



Consideriamo la figura a lato, rappresentante la geometria del problema.
Per il teorema delle tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza si ha $AC=CH$ e $BD=DH$; di conseguenza i triangoli ACO e CHO e DHO e DBO sono a coppie simili in quanto rettangoli con due cateti congruenti. Da ciò deduciamo che

$$A\hat{C}O=H\hat{C}O=\alpha, A\hat{O}C=H\hat{O}C=90°-\alpha,$$

$$H\hat{D}O=O\hat{D}B=\beta, B\hat{O}D=D\hat{O}H=90°-\beta$$

e quindi che $C\hat{O}D=H\hat{O}C+D\hat{O}H=180°-\alpha-\beta$; ma l'angolo $C\hat{O}D$ è

anche uguale a
$C\hat{O}D = 180° - A\hat{O}C - B\hat{O}D = 180° - (90° - \alpha) - (90° - \beta) = \alpha + \beta$ per cui imponendo l'uguaglianza ricaviamo $180° - \alpha - \beta = \alpha + \beta$ da cui $\alpha + \beta = 90°$. In conclusione $C\hat{O}D = 90°$ e il triangolo COD è rettangolo in O.