PROBLEMA1

Si considerino le funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 4x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sin \pi x$$

1. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy, si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g.
2. Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y = -3$. Successivamente, si considerino i punti di G_g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell' intervallo $[-6,6]$ e se ne indichino le coordinate.
3. Sia R la regione del piano delimitata da G_f e G_g sull'intervallo $[0,2]$. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da $h(x) = 3 - x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

RISOLUZIONE

Punto 1

Studiamo la funzione $f(x) = x^3 - 4x$:

Dominio: R;

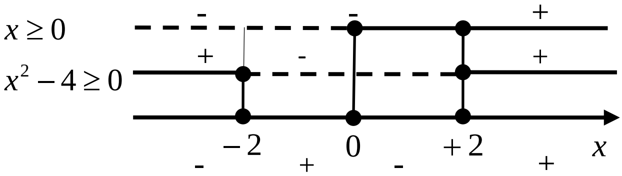
Intersezione ascisse:

$f(x) = x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2$;

Intersezioni ordinate: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$;

Simmetrie: la funzione è dispari in quanto somma di funzioni dispari; infatti $f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -f(x)$;

Positività: la cubica $f(x)=x^3-4x$ è fattorizzabile in $f(x)=x(x^2-4)$; lo studio del segno dei singoli fattori e della funzione stessa sono rappresentati nel quadro a lato:



$f(x)=x^3-4x>0 \Rightarrow -2<x<0 \vee x>2$

Asintoti verticali: non ve ne sono in quanto il dominio è R;

Asintoti orizzontali: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ per cui non ve ne sono;

Asintoti obliqui: non ve ne sono in quanto $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$;

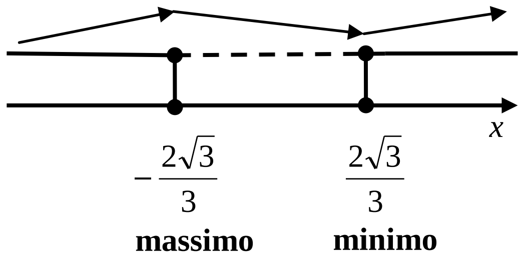
Crescenza e decrescenza: la derivata prima è

$f'(x)=3x^2-4$

$f'(x)>0 \Rightarrow x<-\frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x>\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$f'(x)<0 \Rightarrow -\frac{2\sqrt{3}}{3}<x<\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

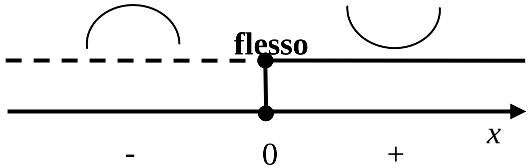


per cui è strettamente crescente in $\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ e

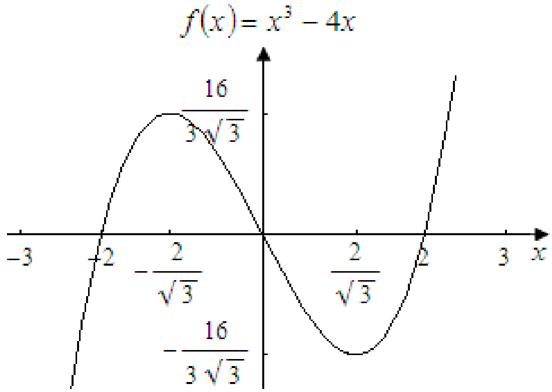
strettamente decrescente in $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ per cui $M\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$ è un massimo e $m\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$ è un minimo come raffigurato nel quadro dei segni:

Concavità e convessità: $f''(x)=6x$ per cui la funzione ha concavità verso l'alto in $(0,+\infty)$ e verso il basso in $(-\infty,0)$ quindi $F(0,0)$ è un flesso a tangente obliqua di equazione $y=-4x$.

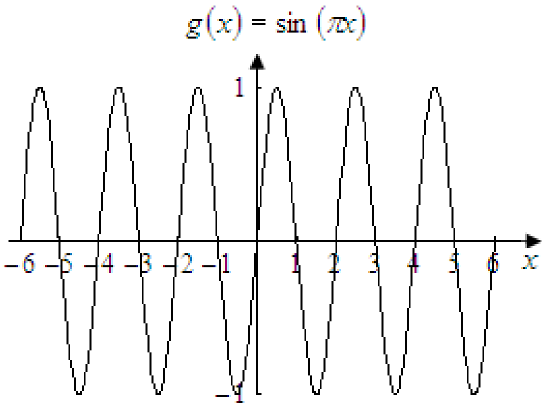
$f''(x)>0 \Rightarrow x>0$
$f''(x)<0 \Rightarrow x<0$
$f''(x)=0 \Rightarrow x=0$



Il grafico G_f è di seguito presentato:



La funzione $g(x)=\sin(\pi x)$ è una classica funzione sinusoidale, dispari, di periodo $T=2$ che interseca l'asse delle ascisse nei punti $x=k$ con $k\in Z$ e il grafico G_g è il seguente:



Punto 2

Le intersezioni di f con la retta $y = -3$ si calcolano risolvendo l'equazione $x^3 - 4x + 3 = 0$; utilizzando la regola di Ruffini l'equazione diventa $(x-1)(x^2 + x - 3) = 0$ da cui $x_1 = 1 \vee x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

I punti di $g(x)$ a tangente orizzontale sono i punti in cui si annulla la derivata prima $g'(x) = \pi \cos(\pi x)$ e cioè

$g'(x) = \pi \cos(\pi x) = 0 \to \pi x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \to x = \left(k + \frac{1}{2}\right)$ con $k \in Z$ e

nell'intervallo $[-6,6]$ tali punti sono :

$$\left(\pm\frac{1}{2}, \pm 1\right), \left(\pm\frac{3}{2}, \mp 1\right), \left(\pm\frac{5}{2}, \pm 1\right), \left(\pm\frac{7}{2}, \mp 1\right), \left(\pm\frac{9}{2}, \pm 1\right), \left(\pm\frac{11}{2}, \mp 1\right).$$

Possiamo procedere in un altro modo. Poiché i punti a tangente orizzontale sono i massimi e i minimi della sinusoide, si avrà:

Massimi: $\sin \pi x = 1 \Rightarrow \pi x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{1}{2} + 2k$ con $k \in Z$

Minimi: $\sin \pi x = -1 \Rightarrow \pi x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{3}{2} + 2k$ con $k \in Z$

Nell'intervallo $[-6,6]$ comprendente 6 periodi ci sono 6 massimi e sei minimi: i massimi hanno ascissa $x = \frac{1}{2} + 2k$ con

$$-6 < \frac{1}{2} + 2k < 6 \wedge k \in Z \Rightarrow -\frac{13}{4} < k < \frac{11}{4} \wedge k \in Z \Rightarrow k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$$

ed ordinata $y = 1$ e sono $\left(-\frac{11}{2}, 1\right), \left(-\frac{7}{2}, 1\right), \left(-\frac{3}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{5}{2}, 1\right), \left(\frac{9}{2}, 1\right)$;

i minimi hanno ascissa $x = \frac{3}{2} + 2k$ con

$$-6 < \frac{3}{2} + 2k < 6 \wedge k \in Z \Rightarrow -\frac{15}{4} < k < \frac{9}{4} \wedge k \in Z \Rightarrow k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$$

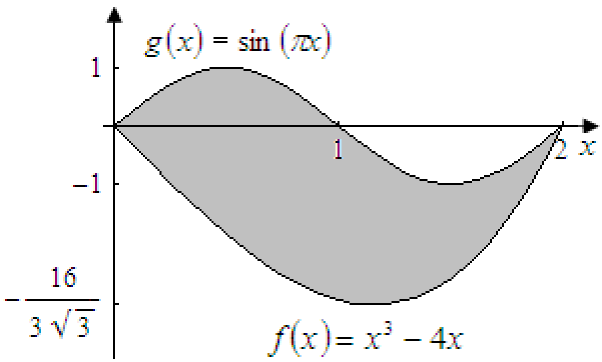
ed ordinata $y = -1$ e sono

$$\left(-\frac{9}{2},-1\right),\left(-\frac{5}{2},-1\right),\left(-\frac{1}{2},-1\right),\left(\frac{3}{2},-1\right),\left(\frac{7}{2},-1\right),\left(\frac{11}{2},-1\right).$$

Abbiamo così ritrovato gli stessi punti precedentemente calcolati.

Punto 3

La regione R di cui calcolare l'area è di seguito raffigurata in grigio:



Dalla figura soprastante si evince chiaramente che il grafico G_g in $[0,2]$ sta sempre al di sopra del grafico G_f; tuttavia prima di procedere al calcolo mostriamo analiticamente che $f(x) \le g(x) \ \forall x \in [0,2]$.

Nell'intervallo $[0,1]$ la disuguaglianza è verificata in quanto dal segno di entrambe deduciamo che $f(x) \le 0 \le g(x)$.

Nell'intervallo $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ la funzione $g(x) = \sin(\pi x) \ge -1$ in quanto la funzione seno ha come codominio $[-1,1]$ mentre la funzione $f(x) = x^3 - 4x$ è concava verso l'alto, infatti la sua derivata seconda

$f''(x)=6x$ è positiva e, inoltre, poiché $f(1)=-3<-1$ e $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{45}{8}<-1$ per convessità è minore di -1 in tutto $\left[1,\frac{3}{2}\right]$.

Per dimostrare che vale la disuguaglianza $f(x)\le g(x)$ anche in $\left[\frac{3}{2},2\right]$ suddividiamo suddetto intervallo nell'unione dei due sotto-intervalli $\left[\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right]\cup\left[\frac{5}{3},2\right]$ e iniziamo a provare che in entrambi i sotto-intervalli $g'(x)\le f'(x)$. In ognuno dei due sotto-intervalli entrambe le funzioni sono crescenti per cui valgono le seguenti catene di disuguaglianze:

$$g'(x)=\pi\cos(\pi x)\le g'\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{\pi}{2}\le\frac{11}{4}=f'\left(\frac{3}{2}\right)\le f'(x)$$

$$g'(x)=\pi\cos(\pi x)\le g'(2)=\pi\le\frac{13}{3}=f'\left(\frac{5}{3}\right)\le f'(x)$$

da cui deduciamo $g'(x)\le f'(x)\ \forall x\in\left[\frac{3}{2},2\right]$.

Ora poiché $f(2)=g(2)=0$ vale la seguente disuguaglianza:

$$f(x)=f(2)-\int_x^2 f'(t)dt=-\int_x^2 f'(t)dt\overset{g'(t)\le f'(t)}{\le}-\int_x^2 g'(t)dt=g(2)-\int_x^2 g'(t)dt=g(x)$$

cioè $f(x)\le g(x)$ anche in $\left[\frac{3}{2},2\right]$; in conclusione abbiamo provato che $f(x)\le g(x)\ \forall x\in[0,2]$.

In definitiva, l'area richiesta vale

$$S(R)=\int_0^2[g(x)-f(x)]dx=\int_0^2\left[\sin(\pi x)-x^3+4x\right]dx=\left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}-\frac{x^4}{4}+2x^2\right]_0^2=$$

$$=\left(-\frac{1}{\pi}-4+8\right)-\left(-\frac{1}{\pi}\right)=4$$

Punto 4

Per il calcolo del volume si può ragionare in quersto modo. Un piano perpendicolare ala superficie libera dell'acqua interseca quest'ultima secondo un segmento di lunghezza $[g(x)-f(x)]$ per cui la sezione è un rettangolo di base $[g(x)-f(x)]=(\sin \pi x - x^3+4x)$ ed altezza $h(x)=3-x$ e quindi di area $A(x)=(\sin \pi x - x^3+4x)\cdot(3-x)$ con $x \in [0,2]$. Se si considera uno spessore dx il volumetto infinitesimo è $dV = A(x)\cdot dx = [(\sin \pi x - x^3+4x)\cdot(3-x)]\cdot dx$ pertanto il volume richiesto è $V=\int_0^2 [(\sin \pi x - x^3+4x)\cdot(3-x)]dx$

Utilizzando l'integrazione per parti e la formula di integrazione delle funzioni polinomiali, il volume è

$$V=\int_0^2 \left[\left(\sin \pi x - x^3+4x\right)\cdot\left(3-x\right)\right]dx =$$

$$\int_0^2 \left[(3-x)\sin(\pi x)\right]dx + \int_0^2 \left(x^4-3x^3-4x^2+12x\right)dx =$$

$$\left[\frac{(x-3)\cos(\pi x)}{\pi}-\frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}+\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+6x^2\right]_0^2 =$$

$$\left(-\frac{1}{\pi}+\frac{32}{5}-12-\frac{32}{3}+24\right)-\left(-\frac{3}{\pi}\right)=\left(\frac{2}{\pi}+\frac{116}{15}\right)\ \mathrm{m}^3$$

Poiché $1\mathrm{m}^3 = 1000\mathrm{dm}^3$ e $1\mathrm{dm}^3 = 1\mathrm{l}$ i litri contenuti nella vasca sono $\left(\frac{2}{\pi}+\frac{116}{15}\right)\cdot 1000\,\text{litri} = 8369{,}95\,\text{litri}$.

PROBLEMA2

Sia f la funzione definita sull'insieme R dei numeri reali da

$$f(x)=(ax+b)e^{-\frac{x}{3}}+3$$

dove a e b sono due reali che si chiede di determinare sapendo che I ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che $f(0)=2$.

1. Si provi che a = l e b = -1 .

2. Si studi su R la funzione $f(x)=(ax+b)e^{-\frac{x}{3}}+3$ e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy.

3. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ, dall'asse y e dalla retta $y=3$

4. Il profitto di una azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando

accettabile una funzione g definita su R^+ se per ciascun x_i, oggetto dell'osservazione, si ha:

$|g(x_i)-y_i|\leq 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione f

del punto 2 e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del

fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.

RISOLUZIONE

Punto 1

Per avere un massimo dobbiamo supporre $a \neq 0$ altrimenti $f(x)$ avrebbe l'andamento di una classica funzione esponenziale che non ha massimo.

La derivata della funzione $f(x) = (ax+b)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ è

$f'(x) = ae^{-\frac{x}{3}} - \frac{(ax+b)}{3}e^{-\frac{x}{3}} = \left(\frac{-ax+3a-b}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}}$. Imponendo la presenza del massimo in $x=4$ e quindi $f'(4)=0$ si ricava $a+b=0$; imponendo invece $f(0)=2$ si ricava $b=-1$; in conclusione $a=1, b=-a=-1$.

Punto 2

Invece di studiare la funzione data

$$f(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$$

procederemo allo studio della funzione ausiliaria

$$g(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{3}}$$

e poi ricaveremo il grafico di $f(x)$ da quello di $g(x)$ traslando quest'ultimo verso le ordinate positive di una quantità pari a 3.

Studiamo quindi $g(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{3}}$:

Dominio: R

Intersezione ascisse: $g(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{3}} = 0 \Rightarrow (x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$ poiché $e^{-\frac{x}{3}} > 0 \ \forall x \in R$;

Intersezioni asse delle ordinate: $x = 0 \Rightarrow g(0) = -1$;

Positività: $g(x)=(x-1)e^{-\frac{x}{3}}>0 \Rightarrow x>1$ poiché $e^{-\frac{x}{3}}>0 \ \forall x \in R$;
Asintoti verticali: non ve ne sono in quanto il dominio è R;

Asintoti orizzontali: $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{-\frac{x}{3}}=-\infty\cdot+\infty=-\infty$ mentre

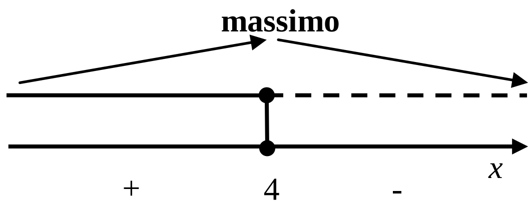
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)}{e^{\frac{x}{3}}}\xrightarrow{\text{De L'Hospital}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)}{e^{\frac{x}{3}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{e^{\frac{x}{3}}}=0$$ per cui la retta $y=0$ è asintoto orizzontale destro;

Asintoti obliqui: non ve ne sono in quanto

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\overbrace{\left(\frac{x-1}{x}\right)}^{\to1}\overbrace{e^{-\frac{x}{3}}}^{\to+\infty}=+\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\overbrace{\left(\frac{x-1}{x}\right)}^{\to1}\overbrace{e^{-\frac{x}{3}}}^{\to0}=0;$$

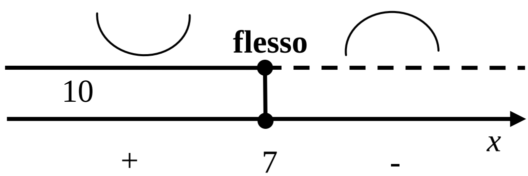
Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $g'(x)=\left(\frac{-x+4}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}}$ per cui $g(x)$ è strettamente crescente in $(-\infty,4)$ e strettamente decrescente in $(4,+\infty)$ per cui $M_g\left(4,3e^{-\frac{4}{3}}\right)$ è un massimo relativo ed assoluto;

$g'(x)>0 \Rightarrow x<4$
$g'(x)<0 \Rightarrow x>4$
$g'(x)=0 \Rightarrow x=4$



Concavità e convessità:

$$g''(x)=-\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}-\left(\frac{-x+4}{9}\right)e^{-\frac{x}{3}}=\left(\frac{x-7}{9}\right)e^{-\frac{x}{3}}$$ per cui $g(x)$ è concava verso l'alto in $(7,+\infty)$ e verso il basso in $(-\infty,7)$ da cui deduciamo che $F_g\left(7,6e^{-\frac{7}{3}}\right)$ è un flesso a tangente obliqua.



$$g''(x) > 0 \Rightarrow x < 7$$
$$g''(x) < 0 \Rightarrow x > 7$$
$$g''(x) = 0 \Rightarrow x = 7$$

La funzione $f(x)$ conserva la stessa ascissa di massimo assoluto di $g(x)$ mentre l'ordinata è incrementata di 3, cioè $M_f\left(4{,}3e^{-\frac{4}{3}}+3\right)$; il punto di flesso a tangente obliqua è $F_f\left(7{,}6e^{-\frac{7}{3}}+3\right)$ mentre l'asintoto orizzontale sarà $y=3$. Il punto in cui $f(x)$ interseca l'asse delle ascisse, invece, non può essere definito a partire da quello in cui $g(x)$ interseca lo stesso asse. In questo caso il valore approssimato può essere calcolato tramite il metodo delle tangenti o di Newton-Raphson che permette di calcolare iterativamente la radice tramite la formula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n-1)e^{-\frac{x_n}{3}}+3}{\left(\frac{-x_n+4}{3}\right)e^{-\frac{x_n}{3}}} =$$

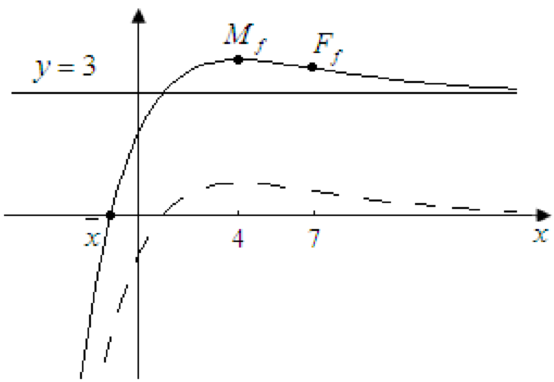
$$x_n - \frac{3(x_n-1)+9e^{\frac{x_n}{3}}}{-x_n+4} = \frac{-x_n^2+x_n+3-9e^{\frac{x_n}{3}}}{-x_n+4}$$

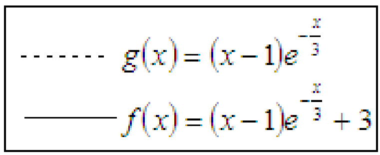
Poiché $f(-2)<0,\ f(-1)>0$ l'unico zero, per il teorema degli zeri per le funzioni continue, apparterrà all'intervallo $(-2,-1)$. Applichiamo allora il metodo suddetto con punto iniziale $x_0=-2$ in cui $f(x_0)$ e $f''(x_0)$ sono concordi. La tabella seguente mostra tutti i passi dell'algoritmo:

n	x_n	x_{n+1}	$\Delta x = \lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$\Delta x < \frac{1}{100}$
0	-2,000	-1,270		
1	-1,270	-1,096	0,730	NO
2	-1,096	-1,088	0,174	NO
3	-1,088	-1,088	0,008	SI

per cui con un errore inferiore al centesimo possiamo affermare che $f(x)$ interseca l'asse delle ascisse in $\bar{x} \cong -1{,}09$.

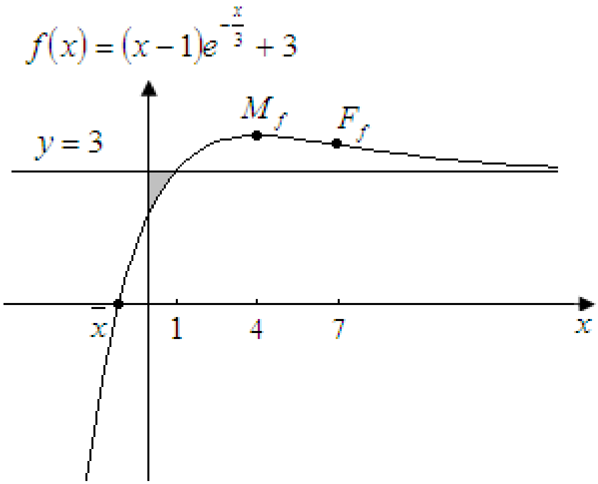
I grafici di $f(x)$ e $g(x)$ sono di seguito presentati nel medesimo riferimento cartesiano (in riga continua il grafico Γ e in tratteggiato G_g):





Punto 3

La retta y=3 interseca la funzione f(x) in x=1, per cui l'area della regione finita di piano, di seguito raffigurata in grigio, è pari a $S = \int_0^1 [3 - f(x)]dx = \int_0^1 \left[(1-x)e^{-\frac{x}{3}}\right]dx$.



Utilizzando l'integrazione per parti si ha:

$$\int_0^1\left[(1-x)e^{-\frac{x}{3}}\right]dx=\left[3(x-1)e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^1-\int_0^1 3e^{-\frac{x}{3}}dx=\left[3(x-1)e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^1+\left[9e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^1=$$

$$\left[3(x+2)e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^1=9e^{-\frac{1}{3}}-6$$

Se, invece, si intende calcolare l'area della regione infinita di piano del primo quadrante delimitata da Γ, dall'asse y e dalla retta $y=3$ quest'ultima è pari a:

$$S=\int_0^1[3-f(x)]dx+\int_1^{+\infty}[f(x)-3]dx=\int_0^1\left[(1-x)e^{-\frac{x}{3}}\right]dx-\int_1^{+\infty}\left[(1-x)e^{-\frac{x}{3}}\right]dx\quad .$$

Sfruttando gli integrali calcolati precedentemente, l'area diventa:

$$S=\int_0^1\left[(1-x)e^{-\frac{x}{3}}\right]dx-\int_1^{+\infty}\left[(1-x)e^{-\frac{x}{3}}\right]dx=\left[3(x+2)e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^1-\left[3(x+2)e^{-\frac{x}{3}}\right]_1^{+\infty}=$$

$$=\left(9e^{-\frac{1}{3}}-6\right)-\left(-9e^{-\frac{1}{3}}\right)=18e^{-\frac{1}{3}}-6$$

in cui si è sfruttato il risultato $\lim_{x\to+\infty}\left[3(x+2)e^{-\frac{x}{3}}\right]=0$.

Punto 4

Attraverso l'utilizzo della calcolatrice scientifica riportiamo i valori assunti dalla funzione $f(x)=(x-1)e^{-\frac{x}{3}}+3$ per $x=1,2,3,4,5,6$:

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65
$f(x_i)$	2	3	$e^{-2/3}+3$	$2e^{-1}+3$	$3e^{-4/3}+3$	$4e^{-5/3}+3$	$5e^{-2}+3$
$\lvert f(x_i)-y_i\rvert$	0,030	0,020	$\cong 0{,}023$	$\cong 0{,}026$	$\cong 0{,}009$	$\cong 0{,}004$	$\cong 0{,}027$

Dalla tabella di valori soprastante deduciamo che la funzione $f(x)=(x-1)e^{-\frac{x}{3}}+3$ è accettabile, secondo il criterio fissato $\lvert f(x_i)-y_i\rvert\le 10^{-1}$, per spiegare il fenomeno dell'andamento del profitto. Tuttavia, nonostante $f(x)\ge 3$ per ogni $x\ge 1$, non possiamo dire che l'evoluzione del fenomeno porterà profitti non inferiori ai 3 milioni di euro e ciò è dovuto al fatto che l'approssimazione è accettabile secondo il criterio $\lvert f(x_i)-y_i\rvert\le 10^{-1}$. Ad esempio, per $x_i=18$, $f(18)=17e^{-6}+3$ per cui la condizione $\lvert f(x_i)-y_i\rvert\le 10^{-1}$ diventa

$$\left| f(18) - y_{18} \right| \le 10^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad f(18) - 10^{-1} \le y_{18} \le f(18) + 10^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(17e^{-6} + 3\right) - 10^{-1} \le y_{18} \le \left(17e^{-6} + 3\right) + 10^{-1}$$

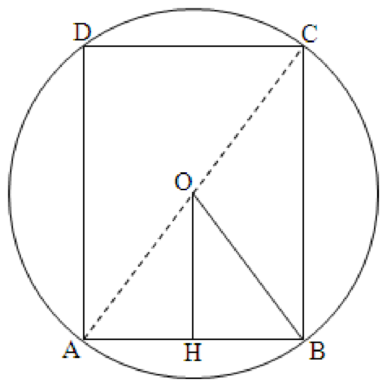
e con un'approssimazione con tre cifre decimali possiamo scrivere $2{,}942 \le y_{18} \le 3{,}142$ per cui non abbiamo nessuna garanzia che il profitto nel 2022 non sarà inferiore ai 3 milioni di euro.

QUESTIONARIO

Quesito 1

Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

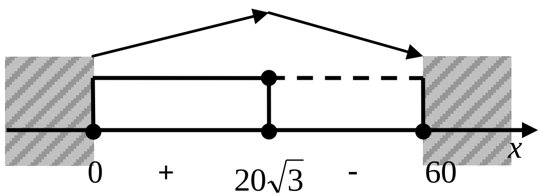
Il quesito può essere risolto in vari modi, ne presentiamo due, il primo che fa uso di un metodo analitico ed il secondo di un metodo sintetico.



- *Metodo analitico*

Consideriamo la seguente figura rappresentante in sezione il cilindro inscritto in una sfera.
Indichiamo con $2x$, con $0 < x < 60$, l'altezza CB del cilindro; di conseguenza $\overline{OH} = x$ e il $V(x) = \pi \cdot \overline{HB}^2 \cdot \overline{CB} = \pi \cdot 2x \cdot \left(3600 - x^2\right)$ e per calcolarne il valore massimo basta calcolarne la derivata prima: $V'(x) = 2\pi \cdot \left(3600 - 3x^2\right)$ il cui segno è

$$V'(x) > 0 \Rightarrow 0 < x < 20\sqrt{3}$$
$$V'(x) < 0 \Rightarrow 20\sqrt{3} < x < 60$$
$$V'(x) = 0 \Rightarrow x = 20\sqrt{3}$$



da cui ricaviamo che il volume è massimo per $x = 20\sqrt{3}$ e cioè per altezza del cilindro $h = 2x = 40\sqrt{3}cm$ e raggio di base $r = 20\sqrt{6}cm$.

Il valore massimo, ricordando che $1dm^3 = 1000cm^3 = 1l$, è pertanto

$$V_{max} = V\left(20\sqrt{3}\right) = 96000\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3 = 96\sqrt{3}\pi \text{ dm}^3 \cong 522{,}37 \text{ litri}.$$

- *Metodo sintetico*

Indichiamo con x il diametro di base del cilindro, con y la sua altezza e con $R = 60cm$ il raggio della sfera. In forza di queste assunzioni, applicando il teorema di Pitagora si ha

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4R^2$. Il volume del cilindro è

$V(x,y) = \pi \dfrac{x^2}{4} y$ ed esso è massimo se è massima la quantità

$x^2 y = x^2 \left(y^2\right)^{\frac{1}{2}}$: trattandosi del prodotto di due potenze positive e poiché x^2 e y^2 hanno somma costante (pari a $4R^2$), il massimo lo si avrà quando le basi sono proporzionali agli esponenti e quindi se

$\dfrac{x^2}{1} = \dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}$ che equivale a $x^2 = 2y^2$ da cui, sostituendo in $x^2 + y^2 = 4R^2$,

si ottiene $x = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}R, y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$. Il volume massimo è

$$V_{max} = V\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}R, \frac{2\sqrt{3}}{3}R\right) = \frac{4}{9}\sqrt{3}\pi R^3 = 96000\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3 = 96\sqrt{3}\pi \text{ dm}^3 \cong 522{,}37 \text{ litri}.$$

Quesito 2

Si trovi il punto della curva $y=\sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4,0)$.

E’ possibile risolvere il quesito attraverso due metodi, il primo che fa uso degli strumenti dell’analisi infinitesimale e il secondo che, invece, utilizza gli strumenti della geometria analitica. Li presentiamo entrambi.

- *Metodo analitico*

Un punto P della curva, posto $x \geq 0$, ha coordinate $(x,\sqrt{x})$ e la distanza dal punto (4,0) è $d(x)=\sqrt{(x-4)^2+(\sqrt{x})^2}=\sqrt{x^2-7x+16}$.
Minimizzare la funzione distanza è equivalente a minimizzare la funzione quadrato della distanza, per cui minimizzeremo la funzione $h(x)=d^2(x)=x^2-7x+16$; la derivata prima è $h'(x)=2x-7$ per cui la funzione $h(x)$ è strettamente crescente in $\left(\frac{7}{2},+\infty\right)$ e strettamente decrescente in $\left[0,\frac{7}{2}\right)$ per cui presenta un minimo all’ascissa $x=\frac{7}{2}$. In alternativa, poiché $h(x)=d^2(x)=x^2-7x+16$ è l’equazione di una parabola con concavità verso l’alto, il minimo è raggiunto nell’ascissa del vertice $x=-\frac{b}{2a}=\frac{7}{2}$.

- *Metodo geometrico*

Il punto Q a distanza minima è il punto della curva la cui tangente è perpendicolare al segmento PQ, cioè tale che il prodotto dei coefficienti angolari valga -1. Il generico coefficiente della retta tangente è $m=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ con $x \neq 0$ mentre il coefficiente angolare della retta PQ è

$m' = \frac{\sqrt{x}}{x-4}$. Imponendo $m \cdot m' = -1$ si ricava $\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{x-4}\right) = -1$ da cui $\frac{1}{8-2x} = 1 \Rightarrow 8-2x = 1 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$.

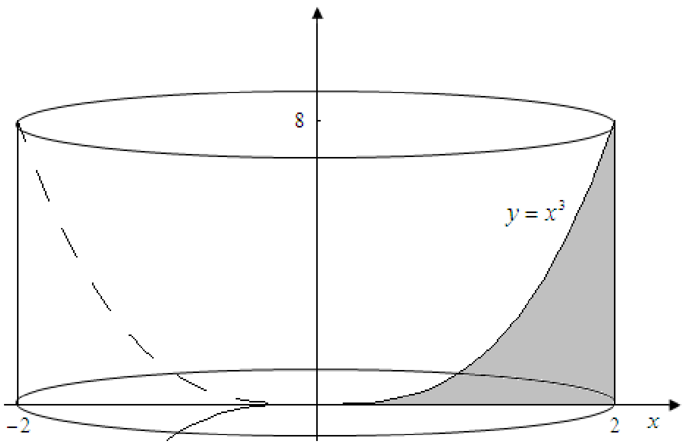
In ambo i casi il punto più vicino è $\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$ e la distanza minima è

$$d_{\min} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}-4\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Quesito 3

Sia R la regione delimitata dalla curva $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 2$ e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W

Si consideri la figura sottostante rappresentante la geometria del quesito:



Il volume richiesto è pari alla differenza tra il volume del cilindro di altezza 8 e raggio di base 2 e il volume del solido ottenuto dalla rotazione della curva $g(y)=\sqrt[3]{y}, 0 \le y \le 8$; il volume del cilindro è $\mathrm{V_C} = \mathrm{A_b} \cdot \mathrm{h} = \pi \cdot 4 \cdot 8 = 32\pi$ mentre il volume del solido ottenuto dalla rotazione della curva $g(y)=\sqrt[3]{y}, 0 \le y \le 8$ è

$$\mathrm{V_D} = \pi \cdot \int_0^8 g^2(y)dy = \pi \cdot \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{3}{5}\pi \cdot \left[y^{\frac{5}{3}} \right]_0^8 = \frac{96}{5}\pi .$$

In conclusione $\mathrm{V} = \mathrm{V_C} - \mathrm{V_D} = 32\pi - \frac{96}{5}\pi = \frac{64}{5}\pi$.

Possiamo risolvere il quesito in altro modo. Pensiamo la regione R decomposta in tanti rettangoli ognuno dei quali genera un solido pari alla differenza di due cilindretti, in modo che, intuitivamente potremo pensare W come somma progressiva di infiniti gusci cilindrici coassiali di spessore dx, dove il raggio x varia da 0 a 2.

Il volume del guscio (infinitesimo) può essere calcolato come prodotto dell'area circolare di base di raggio esterno $(x_i + \Delta x_i)$ e raggio interno x_i , per l'altezza: $V_i = \pi \cdot \left[(x_i + \Delta x_i)^2 - x_i^2 \right] \cdot x_i^3$. Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore a $\Delta x_i^{\ 2}$ il volume infinitesimo sarà $V_i = 2\pi \cdot x_i^4 \cdot \Delta x_i$. Se il numero di gusci cilindrici in cui suddividiamo l'intervallo $[0,2]$ è N il volume richiesto sarà:

$$V = \lim_{N \to +\infty} \sum_{i=1}^{N} V_i = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} 2\pi \cdot x_i^4 \cdot \Delta x_i \right) = 2\pi \int_0^2 x^4 dx = 2\pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{64}{5}\pi .$$

Quesito 4

Il numero delle combinazioni di *n* oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi *n*.

Si deve risolvere l'equazione $C_{n,4} = C_{n,3}, n \in N$.

La condizione di esistenza è $\begin{cases} n \geq 4 \\ n \geq 3 \end{cases} \Rightarrow n \geq 4$.

Ricordando che $C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!}$,

con $n \geq k$.

Nel caso in esame

$$C_{n,4} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{4!}, C_{n,3} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{3!}$$

e imponendo l'uguaglianza si ha:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{24}(n-3-4) =$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-7)}{24} = 0$$

da cui $n = 0,1,2,7$.

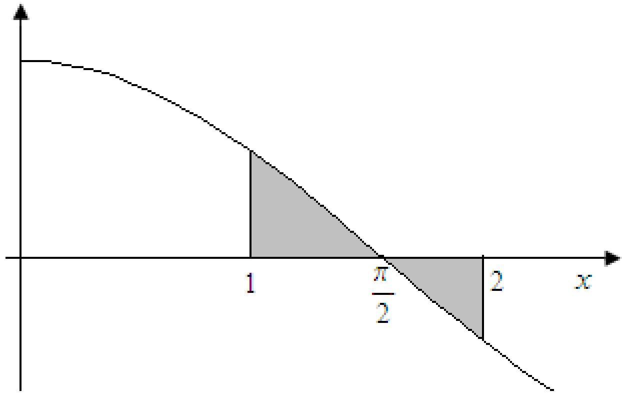
Poiché per la condizione di esistenza deve essere $n \geq 4$ la soluzione accettabile è $n = 7$.

In alternativa, ricordando la proprietà di simmetria dei coefficienti binomiali $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, essendo $k = 4$ ed $n - k = 3$, l'uguaglianza è soddisfatta se $n - 4 = 3$ e quindi se $n = 7$.

Quesito 5

Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos x$ e dall'asse x da x = l a x = 2.

L'area richiesta, pari a $\int_1^2 |\cos x| dx$, è raffigurata in grigio. Ricordando che il coseno cambia segno, da negativo a positivo in corrispondenza di $\frac{\pi}{2}$ l'area richiesta risulta pari a



$$S = \int_1^2 |\cos x| dx = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^2 \cos x dx = [\sin x]_1^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^2 = 1 - \sin(1) - \sin(2) + 1$$

$$= 2 - \sin(1) - \sin(2) \cong 0,25.$$

Quesito 6

Si calcoli $\lim_{x \to a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a}$.

Il problema si pone per a appartenente al dominio della funzione tangente e cioè per $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$. Il limite $\lim_{x \to a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a}$ si presenta nella forma indeterminata 0/0 per cui applicando de l'Hospital si ha $\lim_{x \to a} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 a}$. Un risultato del genere era prevedibile in quanto il limite richiesto coincide con la definizione di derivata della funzione $\tan x$ in $x = a$.

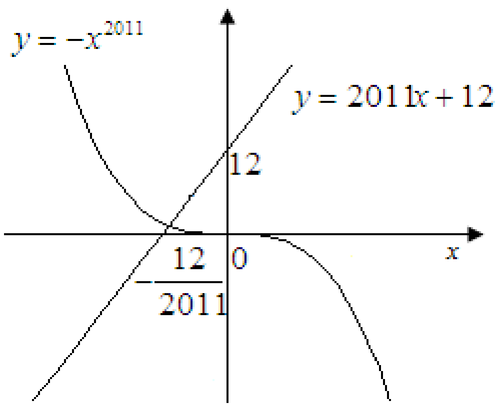
Quesito 7

Si provi che l'equazione: $x^{2011} + 2011x + 12$ ha una sola radice compresa fra -1 e 0.

La funzione $f(x) = x^{2011} + 2011x + 12$ è continua e strettamente crescente in tutto il dominio R in quanto la derivata prima $f'(x) = 2011x^{2010} + 2011$ è sempre positiva; inoltre assume agli estremi dell'intervallo (-1; 0) segno discorde in quanto $f(-1) = -2000 < 0,\ f(0) = 12 > 0$ per cui a norma del teorema degli zeri per le funzioni continue esiste un unico zero dell'equazione $f(x) = x^{2011} + 2011x + 12 = 0$ e compreso in $(-1,0)$.

La soluzione dell'equazione può anche essere ricavata per via grafica risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = -x^{2011} \\ y = 2011x + 12 \end{cases}$$



La curva $y = -x^{2011}$ è una potenza ad esponente dispari, definita n R, positiva per $x < 0$, strettamente decrescente in tutto il dominio e presenta in $(0,0)$ un flesso a tangente
orizzontale di equazione $y = 0$; la curva $y = 2011x + 12$ è una retta.

Quesito 8

In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio?* Perché è così spesso citato?

La quadratura del cerchio, assieme al problema della trisezione dell'angolo e a quello della duplicazione del cubo, costituisce un problema classico della geometria greca. In sostanza quello della quadratura del cerchio non è altro che un classico problema di matematica (più precisamente di geometria) il cui scopo è costruire un quadrato che abbia la stessa area di un dato cerchio, con uso esclusivo di riga e compasso. Dal punto di vista algebrico, indicati con *r* il raggio del cerchio e con *l* il lato del quadrato da trovare, vale la relazione:
$\pi \cdot r^2 = l^2 \rightarrow l = \sqrt{\pi} \cdot r$

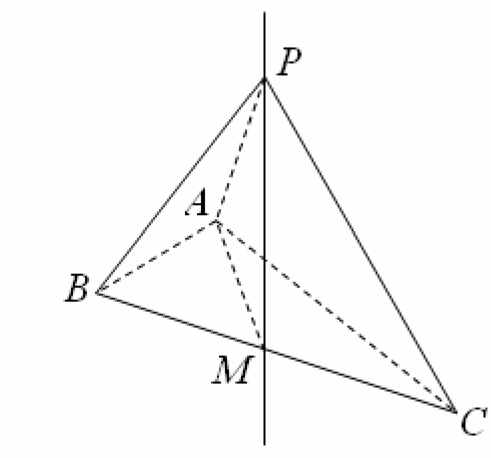
Nel 1882 fu dimostrato che non era possibile costruire un lato di misura $l = \sqrt{\pi} \cdot r$ solo con riga e compasso e ciò deriva dal fatto che il numero π è trascendente.

Quesito 9

Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

Forniamo due tipi di soluzione al quesito, una con metodo sintetico ed una con metodo analitico.

- *Metodo sintetico*



Consideriamo la figura a lato. Ogni triangolo rettangolo è inscrivibile in una circonferenza di centro M, punto medio dell'ipotenusa BC, e raggio $\overline{BM} = \overline{MC} = \overline{AM}$. Per questo motivo, preso un qualsiasi punto P sulla perpendicolare per M al piano del triangolo, le tre distanze cateti congruenti.

Per dimostrare che la retta in questione è il luogo richiesto dobbiamo dimostrare che ogni punto equidistante da A, B e C si trova su tale retta. A tale scopo basta notare che il luogo dei punti equidistanti da A e B è il piano perpendicolare ad AB nel suo punto medio, analogamente per A e C e per B e C: i punti equidistanti da A, B e C appartengono contemporaneamente a questi tre piani, che hanno in comune proprio la retta perpendicolare al piano del triangolo ABC nel punto medio M dell'ipotenusa BC.

- *Metodo analitico*

Consideriamo un sistema di coordinate nello spazio in modo che i vertici del triangolo rettangolo siano $O(0,0,0), A(a,0,0), B(0,b,0)$ e sia $P(x,y,z)$ un generico punto dello spazio; di conseguenza il punto medio dell'ipotenusa AB sarà

$$M=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{x_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0\right).$$

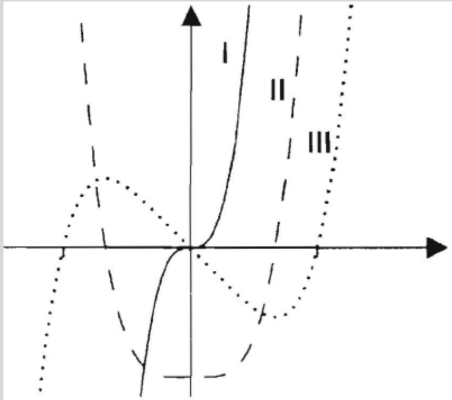
La condizione $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{OP}}$, ricordando la formula della distanza tra due punti, si riconduce a:

$$\underbrace{(x-a)^2+y^2+z^2}_{(1)}=\underbrace{x^2+(y-b)^2+z^2}_{(2)}=\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{(3)}$$

Uguagliando la (1) e la (3) ricaviamo $x=\frac{a}{2}$ cioè l'equazione del piano parallelo al piano *yz* e passante per $\left(\frac{a}{2},0,0\right)$ mentre uguagliando la (2) e la (3) ricaviamo $y=\frac{b}{2}$ cioè l'equazione del piano parallelo al piano *xz* e passante per $\left(0,\frac{b}{2},0\right)$. L'intersezione tra i due piani suddetti, entrambi passanti per $M=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0\right)$, dà una retta *r* parallela all'asse *z*, e perciò perpendicolare al piano *xy* su cui giace il triangolo, passante per il punto $M=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0\right)$ coincidente con il punto medio dell'ipotenusa AB.

Quesito 10

Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione *f*, un altro lo è della funzione derivata *f'* e l'altro ancora di *f''*.



Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?.

	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta.

La risposta esatta è D.

Infatti se assumiamo come *f* la funzione III ci rendiamo conto che la derivata prima si annulla in due punti in corrispondenza del massimo e del minimo relativo che assume *f*. Inoltre deve avvenire che la derivata prima deve essere positiva tra meno infinito e il massimo di *f*, negativa tra massimo e minimo, e poi di nuovo positiva dal minimo in poi. E ciò è quello che succede nella funzione II. Inoltre la derivata seconda deve azzerarsi solo in zero che è flesso per *f*, passando da valori negativi a valori positivi, cosa che accade per la funzione I.

Alternativamente possiamo notare come delle tre funzioni, due sono dispari e cioè I e III e una è pari, la II. Visto che la derivata di una funzione dispari è pari e viceversa, la funzione derivata prima non può essere che la II. In questo modo le alternative possibili restano la A e la D. Ma la A va scartata in quanto la funzione II assume sia valori positivi che negativi e quindi non può essere la derivata della I, perché

derivando la I si ottiene una funzione sempre positiva. Pertanto l'alternativa corretta è la D.
Un ulteriore metodo di risoluzione del quesito consiste nell'escludere che il grafico di *f* possa essere I (ciò esclude A e B come alternative) e II (ciò esclude C come alternativa) e poi tra le alternative D ed E rimanenti escludere la E.
Se il grafico di *f* fosse I, il grafico della derivata seconda dovrebbe essere sempre positivo in quanto *f* è strettamente crescente; tuttavia, né II né III hanno grafici tutti al di sopra dell'asse delle ascisse per cui escludiamo le alternative A e B. Se il grafico di *f* fosse II, poiché *f* è crescente per $x > 0$ il grafico di *f'* dovrebbe essere positivo per $x > 0$ cosa che non è garantito dal grafico III per cui la C è da escludere. Quindi il grafico di *f* è III; il grafico di *f'* deve annullarsi nei punti di massimo e minimo relativo di *f* e ciò è garantito da II e non da I. In conclusione l'alternativa E va scartata e la risposta al quesito è D.