

PROBLEMA1

E' dato un quadrato ABCD di lato $AB = a$

Da A si conduca una semiretta, che incontra il lato BC in E e il prolungamento del lato DC in F.

1. Si calcoli il rapporto: $\frac{BE + DF}{AB}$ in funzione di $x = \hat{BAE}$, controllando

che risulta : $f(x) = \tan x + \cot x$

2. Si studi la funzione $f(x)$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$

3. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ e dalla retta

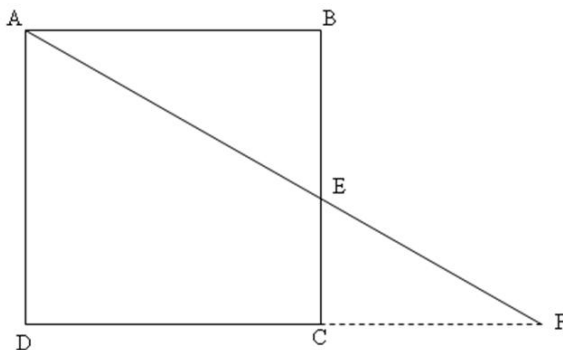
di equazione $y = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

4. La regione finita di piano delimitata dalla curva γ e dall'asse x nell'intervallo è la base di un solido S , le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x , sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S .

RISOLUZIONE

Punto 1

Consideriamo la figura di seguito.



Posto $\hat{BAE} = x$ con $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, poiché il triangolo BAE è rettangolo,

applicando il teorema sui triangoli rettangoli $\overline{BE} = \overline{AB} \cdot \tan x = a \tan x$;
applicando lo stesso teorema al triangolo ECF si ha

$$\overline{CF} = \overline{EC} \cdot \tan(\widehat{CEF}) = \overline{EC} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = (a - a \tan x) \cot x = a \cot x - a$$

$$\text{per cui } \overline{DF} = \overline{DC} + \overline{CF} = a + a \cot x - a = a \cot x.$$

$$\text{Di conseguenza } f(x) = \frac{BE + DF}{AB} = \frac{a \tan x + a \cot x}{a} = \tan x + \cot x.$$

Punto 2

Studiamo la funzione $f(x) = \tan x + \cot x$ in $[0, \pi]$

$$\text{Dominio: } x \neq 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} \wedge x \neq \pi \Leftrightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right);$$

$$\text{Intersezione asse ascisse: poiché } f(x) = \tan x + \cot x = \frac{\tan^2 x + 1}{\tan x}, \text{ non}$$

vi sono intersezioni con l'asse delle ascisse in quanto la quantità $(\tan^2 x + 1)$ è sempre positiva nel dominio;

Intersezione asse ordinate: non ve ne sono in quanto $x = 0$ non appartiene al dominio;

Simmetrie: la funzione è dispari in quanto

$$f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -f(x) \text{ ed è periodica di}$$

periodo $T = \pi$ per cui potremmo graficare la funzione in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e poi

per la simmetria dispari ricavare il grafico in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$;

$$\text{Positività: } f(x) = \tan x + \cot x = \frac{\tan^2 x + 1}{\tan x} > 0 \Rightarrow \tan x > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Asintoti verticali:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x + \cot x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x + \cot x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\tan x + \cot x)$$

$$= -\infty, \lim_{x \rightarrow \pi^-} (\tan x + \cot x) = -\infty$$

per cui le rette $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$ sono asintoti verticali;

Asintoti orizzontali e obliqui: non ve ne sono;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{\cos(2x)}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}; \text{ricordando il dominio}$$

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ la derivata prima è positiva se

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \cos(2x) < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4} \text{ per cui la}$$

funzione presenta un minimo in $m\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ e un massimo in $M\left(\frac{3\pi}{4}, -2\right)$

Concavità e convessità: la derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2\cos x}{\sin^3 x} = \frac{2\sin^4 x + 2\cos^4 x}{(\sin x \cdot \cos x)^3} = \frac{16\sin^4 x + 16\cos^4 x}{\sin^3(2x)} \text{ e,}$$

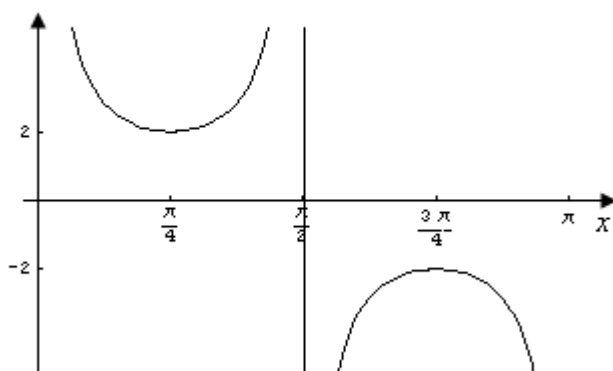
ricordando il dominio $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, deduciamo che è positiva se

$$\sin(2x) > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2}; \text{ quindi la funzione ha concavità verso l'alto}$$

in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e verso il basso in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Il grafico è il seguente.

$$f(x) = \tan(x) + \cot(x)$$



Punto 3

Calcoliamo le intersezioni della funzione con la retta di equazione

$$y = \frac{4\sqrt{3}}{3} : \text{si tratta di risolvere l'equazione}$$

$$\frac{\tan^2 x + 1}{\tan x} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\tan x + 3 = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{3} \quad \text{da}$$

$$\Rightarrow \tan x = \sqrt{3} \vee \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

cui, limitandoci al dominio $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,

$$\tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}.$$

L'area richiesta è

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - \tan x - \cot x \right) dx = \left[\frac{4\sqrt{3}}{3}x + \ln|\cos x| - \ln|\sin x| \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left[\frac{4\sqrt{3}}{3}x + \ln|\cot x| \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi - \ln(\sqrt{3})$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi - \ln 3$$

Punto 4

L'area del triangolo equilatero di lato $f(x) = \tan x + \cot x$ è

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(\tan x + \cot x)^2 \quad \text{per cui il volume richiesto è pari a}$$

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{4} (\tan x + \cot x)^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan^2 x + \cot^2 x + 2) dx \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} + 2 \right) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} [\tan x - \cot x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \right) \right] = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = 1
 \end{aligned}$$

PROBLEMA2

Sia consideri la funzione $f(x) = (3-x)\sqrt{x+3}$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
2. Si scriva l'equazione della tangente t alla curva γ nel punto di intersezione con l'asse y e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con gli assi cartesiani.
3. Si calcoli il volume del cono S generato da una rotazione completa attorno all'asse x del succitato triangolo e il volume del solido S' generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano, situata nel I quadrante, limitata dalla curva γ e dagli assi cartesiani.
4. Si scelga a caso un punto all'interno del cono S. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno al solido S'.

RISOLUZIONE

Punto 1

Studiamo la funzione $f(x) = (3-x)\sqrt{x+3}$

Dominio: $x+3 \geq 0 \Rightarrow [-3, +\infty)$;

Intersezione asse ascisse: $f(x) = (3-x)\sqrt{x+3} = 0 \Rightarrow x = 3$

Intersezione asse ordinate: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 3\sqrt{3}$

Simmetrie: la funzione non è né pari né dispari;

Positività: $f(x) = (3-x)\sqrt{x+3} > 0 \Rightarrow 3-x > 0 \Rightarrow -3 \leq x < 3$ dal momento che il dominio è $[-3, +\infty)$;

Asintoti verticali: non ve ne sono in quanto $\lim_{x \rightarrow -3^+} (3-x)\sqrt{x+3} = 0$;

Asintoti orizzontali: non ve ne sono in quanto $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3-x)\sqrt{x+3} = -\infty$

Asintoti obliqui: non esistono in quanto $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-x)\sqrt{x+3}}{x} = -\infty$;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $f'(x) = -\frac{3x+3}{2\sqrt{x+3}}$ per cui

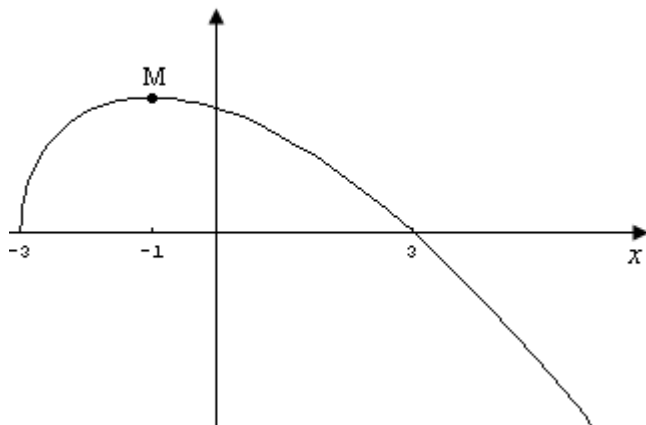
$f'(x) = -\frac{3x+3}{2\sqrt{x+3}} > 0 \Rightarrow -3 < x < -1$, quindi la funzione è crescente in $(-3, -1)$ e decrescente in $(-1, +\infty)$ pertanto presenta un massimo nel punto $M(-1; 4\sqrt{2})$; il punto ad ascissa $x = -3$ è un flesso a tangente verticale in quanto $\lim_{x \rightarrow -3^+} f'(x) = +\infty$

Concavità e convessità: la derivata seconda è

$f''(x) = -\frac{3x+15}{4(x+3)^{\frac{3}{2}}} < 0 \quad \forall x \in (-3, +\infty)$ per cui la funzione presenta

concavità verso il basso tutto il dominio $[-3, +\infty)$ e non presenta flessi.

$$f(x) = (3-x)\sqrt{x+3}$$

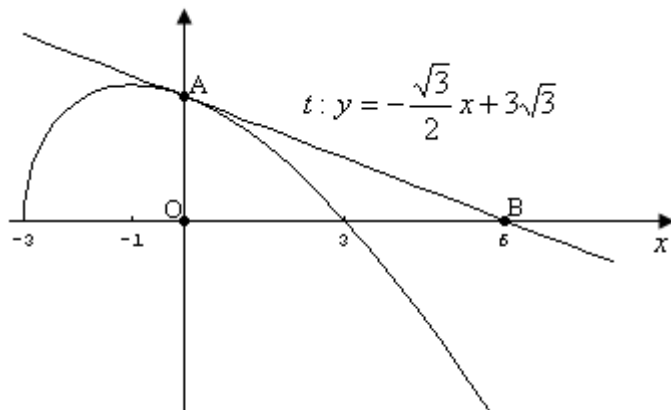


Punto 2

L'equazione della tangente nel punto $(0, 3\sqrt{3})$ ha equazione

$$y = mx + 3\sqrt{3} \text{ con } m = f'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ quindi è pari a } y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 3\sqrt{3}$$

come di seguito raffigurato.



La tangente incontra l'asse delle ascisse in $(6, 0)$ per cui l'area del triangolo formato con gli assi cartesiani è pari a

$$S = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OA}}{2} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}.$$

Punto 3

Il cono ottenuto dalla rotazione di OAB attorno all'asse x ha raggio di base

$\overline{OA} = 3\sqrt{3}$ ed altezza $\overline{OB} = 6$ e di conseguenza ha volume pari

$$V_s = \pi \frac{\overline{OA}^2 \cdot \overline{OB}}{3} = 54\pi.$$

Tale volume è calcolabile anche attraverso la formula di integrazione

$$V_S = \pi \int_0^6 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + 3\sqrt{3} \right)^2 dx = \pi \left[\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + 3\sqrt{3} \right)^3 \right]_0^6 =$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{9} \pi \left[-\left(3\sqrt{3} \right)^3 \right] = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \pi \cdot (-81\sqrt{3}) = 54\pi$$

Il volume del solido S' generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano, situata nel I quadrante, limitata dalla curva γ e dagli

assi cartesiani è pari a $V_{S'} = \pi \int_0^3 (3-x)^2 (x+3) dx$. Sviluppando i calcoli

$$V_{S'} = \pi \int_0^3 (x^2 - 6x + 9)(x+3) dx = \pi \int_0^3 (x^3 - 3x^2 - 9x + 27) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{9x^2}{2} + 27x \right]_0^3 = \frac{135}{4} \pi$$

Il rapporto tra i volumi è $\frac{V_S}{V_{S'}} = \frac{54\pi}{\frac{135}{4}\pi} = \frac{8}{5}$.

Punto 4

La probabilità richiesta è pari a $p = \frac{V_S - V_{S'}}{V_S} = \frac{\frac{V_S}{V_{S'}} - 1}{\frac{V_S}{V_{S'}}} = \frac{\frac{8}{5} - 1}{\frac{8}{5}} = \frac{3}{8}$.

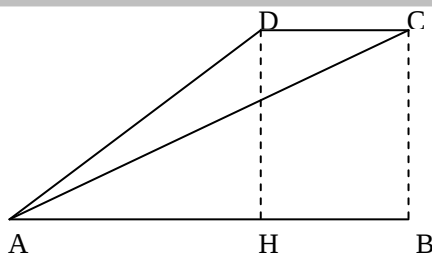
QUESTIONARIO

Quesito 1

Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 metri. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di 30° . Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a 20° , con che velocità si stanno spostando gli uccelli?

Consideriamo la figura.

I triangoli ABC e DAH sono rettangoli per cui applicando il teorema dei seni i lati AB ed AH misurano rispettivamente



$$\overline{AB} = \overline{BC} \cdot \tan(90^\circ - 20^\circ) = 260 \cdot \tan(70^\circ) \cong 714,34 \text{ metri e}$$

$$\overline{AH} = \overline{DH} \cdot \tan(90^\circ - 30^\circ) = 260 \cdot \tan(60^\circ) \cong 450,34 \text{ metri.}$$

Di conseguenza il percorso compiuto dagli uccelli in un minuto è pari a

$$\overline{DC} = \overline{AB} - \overline{AH} = 714,34 - 450,34 = 264 \text{ metri, ad una velocità quindi}$$

$$\text{pari a } v = \frac{s}{t} = \frac{264[m]}{60[s]} = 4,4 \left[\frac{m}{s} \right].$$

Quesito 2

La funzione: $f(x) = \frac{1}{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)^2}$ non è definita nel punto $x = 0$, che è

per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della $f(x)$ per x tendente a zero da sinistra e per x tendente a zero da destra.

Calcoliamo il limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$;

il limite destro vale
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)^2} = \frac{1}{\left(e^{+\infty} - 1\right)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

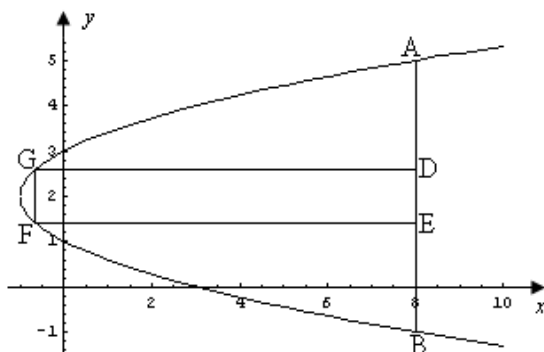
mentre il limite sinistro vale
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)^2} = \frac{1}{\left(e^{-\infty} - 1\right)^2} = \frac{1}{(0-1)^2} = 1.$$

Quindi il punto $x = 0$ è di discontinuità di prima specie ed è un punto angoloso per la funzione.

Quesito 3

La retta di equazione $x = 8$ seca la parabola di equazione $x = y^2 - 4y + 3$ nei punti A e B. Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base AB si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di 180° intorno all'asse della parabola.

Consideriamo la figura seguente. La parabola ha asse parallelo all'asse delle ascisse di equazione $y = 2$, interseca l'asse delle ordinate nei punti $y = 1 \vee y = 3$ e quello delle ascisse in $x = 4$ ed ha vertice in $V(-1, 2)$.



Il lato FE del rettangolo DEFG, nel sistema di riferimento cartesiano giace sulla retta di equazione $y = k$ con $-1 < k < 2$ per cui le coordinate dei punti D ed E sono rispettivamente, sfruttando la simmetria rispetto alla retta $y = 2$, $D(8, 4 - k), E(8, k)$; i vertici G ed F sono, invece, $F(k^2 - 4k + 3, k), G(k^2 - 4k + 3, 4 - k)$.

Il cilindro di volume massimo in una rotazione di 180° intorno all'asse della parabola ha raggio di base $R = \frac{\overline{DE}}{2} = 2 - k$ ed altezza

$h = \overline{FE} = 8 - (k^2 - 4k + 3) = 5 - k^2 + 4k$; di conseguenza il volume è pari a $V(k) = \pi R^2 h = \pi(2 - k)^2(5 - k^2 + 4k)$ con $-1 < k < 2$. La massimizzazione del volume la effettuiamo mediante derivazione; la derivata prima è pari a $V'(k) = 2\pi(2 - k)(2k^2 - 8k - 1)$ e il segno dei fattori componenti è:

$$2 - k > 0 \Rightarrow k < 2$$

$$(2k^2 - 8k - 1) > 0 \Rightarrow k < \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2} \vee k > \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2}$$

Tenendo presente la limitazione $-1 < k < 2$ deduciamo che

$$V'(k) > 0 \Rightarrow -1 < k < \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2} \text{ per cui la funzione volume è}$$

strettamente crescente in $\left(-1, \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}\right)$ e strettamente decrescente in

$\left(\frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}, 2\right)$; di conseguenza il volume massimo lo si ha per

$k = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}$ cui corrispondono i vertici

$D\left(8, \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2}\right), E\left(8, \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}\right), F\left(\frac{7}{2}, \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}\right), G\left(\frac{7}{2}, \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2}\right)$ ed un

valore massimo pari a $V_{\max} = V\left(\frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{81}{4}\pi$.

Quesito 4

Si determini il campo di esistenza della funzione:

$f(x) = (3\cos x + \sin^2 x - 3)^{\cos x}$. Cosa succederebbe se l'esponente fosse $\sin x$?

Il dominio della funzione $f(x) = (3\cos x + \sin^2 x - 3)^{\cos x}$ è dato da:

$$(3\cos x + \sin^2 x - 3) > 0 \vee \begin{cases} 3\cos x + \sin^2 x - 3 = 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}.$$

La disequazione $(3\cos x + \sin^2 x - 3) > 0$ è equivalente a

$\cos^2 x - 3\cos x + 2 < 0$. Poiché

$\cos^2 x - 3\cos x + 2 = (\cos x - 1)(\cos x - 2)$ la disequazione è soddisfatta se $1 < \cos x < 2$; poiché la funzione coseno è limitata ed assume valore massimo unitario la disequazione $1 < \cos x < 2$ non è mai verificata.

Il sistema $\begin{cases} 3\cos x + \sin^2 x - 3 = 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$, invece, è equivalente a

$$\begin{cases} \cos x = 1 \vee \cos x = 2 \\ \cos x > 0 \end{cases} \quad \text{ed è verificato dagli } x \text{ tale che } \cos x = 1 \text{ e cioè}$$

da $x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. In conclusione, mettendo assieme le soluzioni, il dominio di $f(x) = (3\cos x + \sin^2 x - 3)^{\cos x}$ è $D = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Se l'esponente fosse $\sin x$ il sistema diventerebbe

$$\begin{cases} \cos x = 1 \vee \cos x = 2 \\ \sin x > 0 \end{cases} \quad \text{e i valori per cui } \cos x = 1 \text{ sono quelli per cui}$$

$\sin x = 0$; di conseguenza il sistema non avrebbe soluzioni e la funzione

$f(x) = (3\cos x + \sin^2 x - 3)^{\sin x}$ non avrebbe senso per nessun valore reale.

Quesito 5

Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = e^x(x^2 + x + 1)$, nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$.

Il valor medio di una funzione $f(x)$ in $[a, b]$ è $V_M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Nel caso in esame $V_M = \int_0^1 [e^x(x^2 + x + 1)] dx$; applicando l'integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} V_M &= \int_0^1 [e^x(x^2 + x + 1)] dx = [e^x(x^2 + x + 1)]_0^1 - \int_0^1 [e^x(2x + 1)] dx = \\ &= [e^x(x^2 + x + 1)]_0^1 - [e^x(2x + 1)]_0^1 + \int_0^1 2e^x dx = [e^x(x^2 + x + 1)]_0^1 - [e^x(2x + 1)]_0^1 + [2e^x]_0^1 \\ &= [e^x(x^2 - x + 2)]_0^1 = 2e - 2 \end{aligned}$$

Quesito 6

Si determini un numero positivo N tale che, per $x > N$, la funzione $f(x) = 2^{0,3x}$ è sempre maggiore della funzione $g(x) = x^{30}$

Se $x > 0$, la disequazione $2^{0,3x} > x^{30}$ equivale a $2^{\frac{x}{100}} > x$ e, posto $t = \frac{x}{100}$, diventa $2^t > 100t$; dobbiamo quindi studiare la disequazione $h(t) = 2^t - 100t > 0$ con $t > 0$. La funzione $h(t) = 2^t - 100t$ ha derivata prima $h'(t) = \ln 2 \cdot 2^t - 100$ per cui è strettamente decrescente in

$\left(0; \log_2 \frac{100}{\ln 2}\right)$ e strettamente crescente in $\left(\log_2 \frac{100}{\ln 2}; +\infty\right)$ e presenta un

minimo relativo per $t = \log_2 \frac{100}{\ln 2}$ cui corrisponde $h\left(\log_2 \frac{100}{\ln 2}\right) < 0$;

la derivata seconda è $h''(t) = (\ln 2)^2 \cdot 2^t$ che risulta essere sempre positiva per cui la funzione presenta sempre concavità verso l'alto.

Poiché $h(0) = 1 > 0$, $h(9) = -388 < 0$, $h(10) = 24 > 0$ la funzione, per il

teorema degli zeri, presenterà uno zero $\alpha \in \left(0; \log_2 \frac{100}{\ln 2}\right)$ e uno zero in

$\beta \in (9, 10)$ e vista la concavità sarà positiva in $(0, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$ e negativa in (α, β) . Quindi per determinare il valore $x > N$ a partire dal quale $2^{0,3x} > x^{30}$ bisogna determinare il valore $t = \beta$ da cui, posto

$N = 100\beta$, ogni valore $x > N = 100\beta$ intero soddisferà la disequazione

$2^{0,3x} > x^{30}$. Per determinare lo zero $\beta \in (9, 10)$, con una precisione di 10^{-3} , possiamo applicare il metodo di Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{2^{x_n} - 100x_n}{\ln 2 \cdot 2^{x_n}} \text{ con punto iniziale } x_0 = 10 \text{ in cui}$$

$h(x_0)$ e $h''(x_0)$ sono concordi. La tabella seguente mostra tutti i passi dell'algoritmo:

n	x_n	x_{n+1}	$\Delta x = x_n - x_{n-1} $	$\Delta x < 10^{-3}$
0	10,000	9,966		
1	9,966	9,961	0,034	NO
2	9,961	9,960	0,005	NO
3	9,960	9,960	0,001	NO
4	9,960	9,960	0,000	SI

Con un errore inferiore al millesimo si ha $\beta \cong 9,96$ per cui per

$x > N = 100\beta = 996$ intero la disequazione $2^{0,3x} > x^{30}$ sarà sempre soddisfatta. Infatti

$$h(996) = -3,56238 \cdot 10^{85} < 0, h(997) = 1,77813 \cdot 10^{89} > 0.$$

Quesito 7

Tenuto conto che: $\frac{\pi}{2} - 1 = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$, si calcoli un'approssimazione di $\frac{\pi}{2}$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Applichiamo il metodo dei rettangoli con $n = 10$, suddividendo l'intervallo $[0,1]$ in 10 sottointervalli di ampiezza $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{10}$; di conseguenza i rettangoli avranno stessa base pari a $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{10}$ ed altezza $f(x_k)$ con $x_k = i \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$ e $i = 0, 1, \dots, 10$.

Con tale metodo, poichè la funzione integranda $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ nell'intervallo $[0,1]$ è strettamente decrescente in quanto la derivata prima è $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}$ e sempre negativa in $[0,1)$,

un'approssimazione per difetto dell'area è $S_{\inf} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k)$ e per eccesso è $S_{\sup} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$.

Di seguito i passi dell'algoritmo per il calcolo della somma superiore ed inferiore:

$x_i = i \cdot h = i \cdot \left(\frac{b-a}{n} \right)$	$f(x_i)$
0	1
0,1	0,904534034
0,2	0,816496581
0,3	0,733799386
0,4	0,654653671
0,5	0,577350269
0,6	0,5
0,7	0,420084025
0,8	0,333333333
0,9	0,229415734
1	0
$S_{\text{sup}} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$	0,616966703
$S_{\text{inf}} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k)$	0,4265133

Di conseguenza approssimazioni per eccesso e per difetto di $\frac{\pi}{2}$ sono rispettivamente

$1 + S_{\text{sup}} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$	1,616966703
$1 + S_{\text{inf}} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k)$	1,4265133

L'approssimazione migliora al crescere di n .

Quesito 8

La regione del I quadrante delimitata dall'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

e dagli assi cartesiani è la base di un solido F le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse y, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di F.

Il lato del quadrato è pari a x cui corrisponde un'area pari a

$A(x) = x^2 = 4 - 4y^2$ per cui il volume richiesto è pari a

$$V = \int_0^1 (4 - 4y^2) dy = \left[4y - \frac{4y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

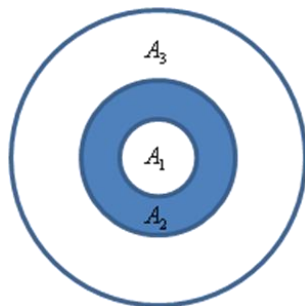
Quesito 9

Un bersaglio è costituito da tre cerchi concentrici, i cui raggi misurano rispettivamente 5, 3 e 1. Un arciero ha probabilità $\frac{1}{2}$ di colpire il bersaglio. Qual è la probabilità che lo colpisca in un punto appartenente al cerchio di raggio 3 ma non a quello di raggio 1?

Consideriamo la figura a lato.

La probabilità di centrare un bersaglio è proporzionale all'area del bersaglio stesso. L'area del cerchio di raggio unitario è $A_1 = \pi$, l'area della corona circolare di raggio esterno 3 e raggio interno 1 è

$A_2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(3^2 - 1^2) = 8\pi = 8A_1$, l'area della corona circolare di raggio esterno 5 e raggio interno 3 è $A_3 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(5^2 - 3^2) = 16\pi = 16A_1$. Indichiamo con $p_1 = p$ la probabilità di centrare il bersaglio nella regione di cerchio di raggio unitario; di conseguenza la probabilità di centrare il bersaglio nella regione individuata dalla corona circolare di raggio esterno 3 e



raggio interno 1 è $p_2 = 8p$ mentre la probabilità di centrare il bersaglio nella regione individuata dalla corona circolare di raggio esterno 5 e raggio interno 3 è $p_3 = 16p$. Poiché la probabilità di colpire il bersaglio

è $\frac{1}{2}$, deve aversi $\sum_{i=1}^3 p_i = \frac{1}{2}$ da cui

$$p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow p + 8p + 16p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{50}; \text{ in definitiva la}$$

probabilità di colpire un bersaglio in un punto appartenente al cerchio di raggio 3 ma non a quello di raggio 1 è $p_2 = 8p = \frac{8}{50} = \frac{4}{25} = 16\%$.

Quesito 10

Sia P un punto fissato su una circonferenza; quale è la probabilità che prendendo su questa due punti a caso A e B , l'angolo $\hat{APB}$ sia acuto? Si illustri il ragionamento seguito.

Consideriamo la figura a lato.

Siano $\hat{APC} = X, \hat{BPC} = Y$ con

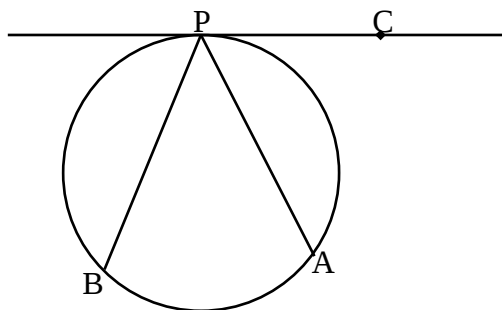
$X = U(0, \pi), Y = U(0, \pi)$ due variabili aleatorie indipendenti con distribuzione uniforme

nell'intervallo $[0, \pi]$ rappresentanti le variazioni

degli angoli al variare dei punti A e B sulla

circonferenza. La distribuzione congiunta delle due variabili aleatorie è quindi un quadrato $\pi \times \pi$ e di conseguenza i due punti A e B sulla circonferenza sono individuabili nel momento in cui è definito il punto di coordinate (X, Y) appartenente al suddetto dominio quadrato $\pi \times \pi$ e

l'angolo $\hat{APB}$ è acuto se $|Y - X| < \frac{\pi}{2}$.



Rappresentiamo nel medesimo riferimento cartesiano il dominio quadrato $\pi \times \pi$ e la striscia di piano tale che

$$|Y - X| < \frac{\pi}{2}.$$

La probabilità

$$\Pr\left(|Y - X| < \frac{\pi}{2}\right) \text{ è data dal}$$

rapporto tra l'area del poligono in grigio e l'area del quadrato di lato $L = \pi$.

L'area del poligono è pari

alla differenza dell'area del

quadrato e del doppio dell'area del triangolo rettangolo isoscele di lato

$$\frac{\pi}{2}, S_{\text{Poligono}} = \pi^2 - 2 \cdot \left(\frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}{2} \right) = \frac{3}{4} \pi^2 \text{ per cui}$$

$$\Pr\left(|Y - X| < \frac{\pi}{2}\right) = \frac{S_{\text{Poligono}}}{S_{\text{Quadrato}}} = \frac{\frac{3}{4} \pi^2}{\pi^2} = \frac{3}{4}.$$

