PROBLEMA1

Sia f la funzione definita sull'insieme R dei numeri reali da

$f(x) = x + \ln 4 + \dfrac{2}{e^x + 1}$ e sia Γ la sua rappresentazione grafica nel sistema di riferimento Oxy.

1. Si determini il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$. Si calcoli $f(x) + f(-x)$ e si spieghi perché dal risultato si può dedurre che il punto $A(0,1+\ln 4)$ è centro di simmetria di Γ.
2. Si provi che, per tutti i reali *m*, l'equazione $f(x) = m$ ammette una e una sola soluzione in *R*. Sia α la soluzione dell'equazione $f(x) = 3$; per quale valore di *m* il numero $-\alpha$ è soluzione dell'equazione $f(x) = m$?
3. Si provi che, per tutti gli *x* reali, è: $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$. Si provi altresì che la retta *r* di equazione $y = x + \ln 4$ e la retta s di equazione $y = x + 2 + \ln 4$ sono asintoti di Γ e che Γ è interamente compresa nella striscia piana delimitata da *r* e da s.
4. Posto $I(\beta) = \int_0^\beta [f(x) - x - \ln 4]dx$, si calcoli: $\lim_{\beta \to +\infty} I(\beta)$. Qual è il significato geometrico del risultato ottenuto?

RISOLUZIONE

Punto 1

La funzione $f(x) = x + \ln 4 + \dfrac{2}{e^x + 1}$ è definita in tutto R in quanto $e^x + 1 > 0 \quad \forall x \in R$ per cui ha senso calcolare i limiti agli estremi del dominio.

Poiché $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0$ per cui $\lim_{x\to+\infty}\left(x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}\right) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}\right) = -\infty$.

Calcoliamo la somma $f(x)+f(-x)$. Si ha:

$$f(x)+f(-x) = \left(x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}\right)+\left(-x+\ln 4+\frac{2}{e^{-x}+1}\right) =$$

$$2\ln 4+\frac{2}{e^x+1}+\frac{2}{e^{-x}+1} =$$

$$2\ln 4+\frac{2}{e^x+1}+\frac{2e^x}{e^x+1} = 2\ln 4+\frac{2\left(e^x+1\right)}{e^x+1} = 2\left(\ln 4+1\right)$$

Ricordiamo che due punti $P(x,y), P'(x',y')$ sono simmetrici rispetto a un punto $A(x_A,y_A)$ se A è il punto medio del segmento PP', cioè se $\begin{cases} x_A = \frac{x+x'}{2} \\ y_A = \frac{y+y'}{2} \end{cases}$. Consideriamo quindi i due punti $P(x, f(x)), P'(-x, f(-x))$ appartenenti al grafico Γ: essi si corrispondono nella simmetria di centro A in quanto

$$\begin{cases} x_A = \frac{x-x}{2} \\ y_A = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 1+\ln 4 \end{cases}$$

Punto 2

Osserviamo che la funzione $g(x) = f(x) - m$ è continua in tutto R ed ha limite $+\infty$ se $x \to +\infty$ e $-\infty$ se $x \to -\infty$ per cui a norma del teorema degli zeri per le funzioni continue esiste almeno un valore di *x* per cui $g(x) = f(x) - m = 0$ e cioè $f(x) = m \ \forall m \in R$. Inoltre la derivata della funzione $g(x) = f(x) - m$ coincide con quella di $f(x)$ che è pari a $f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$ e che quindi risulta essere sempre positiva; in conclusione la funzione $f(x)$, e quindi $g(x) = f(x) - m$, è strettamente crescente in tutto il dominio R da cui deduciamo che esiste un'unica soluzione dell'equazione $f(x) = m \ \forall m \in R$.

Se $f(\alpha) = 3$ dalla relazione $f(x) + f(-x) = 2(\ln 4 + 1)$ ricaviamo $f(-\alpha) = 2 + 2\ln 4 - f(\alpha) = 2 + 2\ln 4 - 3 = 2\ln 4 - 1$ per cui il valore di *m* tale per cui $f(-\alpha) = m$ è $m = 2\ln 4 - 1$.

Punto 3

Poichè $\frac{2}{e^x+1} = 2 - \frac{2e^x}{e^x+1}$ deduciamo che $f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}$ può essere scritta anche come $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x+1}$.

Per provare che le rette di equazione $y = x + \ln 4$ e $y = x + 2 + \ln 4$ sono asintoti per la funzione $f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}$, calcoliamone gli asintoti obliqui. Essi avranno equazione $y = mx + q$ con $m = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right], q = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - mx]$; calcoliamo prima l'asintoto obliquo destro, si ha:

$m=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+\ln 4}{x}+\frac{2}{x\left(e^x+1\right)}\right]=1$ in quanto

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\ln 4}{x}\right)=1$ e $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x\left(e^x+1\right)}\right]=\frac{2}{+\infty}=0$; il coefficiente q vale

$q=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln 4+\frac{2}{e^x+1}\right)=\ln 4$ per cui l'asintoto obliquo destro ha equazione $r: y=x+\ln 4$. Calcoliamo analogamente l'asintoto obliquo sinistro, sfruttando in questo caso che la funzione può essere scritta come $f(x)=x+2+\ln 4-\frac{2e^x}{e^x+1}$, si ha:

$m=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+2+\ln 4}{x}-\frac{2e^x}{x\left(e^x+1\right)}\right]=1$ in quanto

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+2+\ln 4}{x}\right)=1$ e $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2e^x}{x\left(e^x+1\right)}\right]=0$ in quanto

$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)}\right]=0, \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0$; il coefficiente q vale

$q=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(2+\ln 4-\frac{2e^x}{e^x+1}\right)=\ln 4$ in quanto

$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)}\right]=0$ per cui l'asintoto obliquo sinistro ha equazione $s: y=x+2+\ln 4$.

Per dimostrare che il grafico della funzione sia compreso tra gli asintoti notiamo che $f(x)=x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}>x+\ln 4$ in quanto $\frac{2}{e^x+1}>0$ per cui il grafico di $f(x)$ sta al di sopra dell'asintoto $y=x+\ln 4$; inoltre $f(x)=x+2+\ln 4-\frac{2e^x}{e^x+1}<x+2+\ln 4$ in quanto $-\frac{2e^x}{e^x+1}<0$ per cui

il grafico di $f(x)$ sta al di sotto dell'asintoto $y = x + 2 + \ln 4$; da queste considerazioni segue quanto richiesto.
Prima di tracciare il grafico della funzione, discutiamo la concavità/convessità della funzione. La derivata seconda è

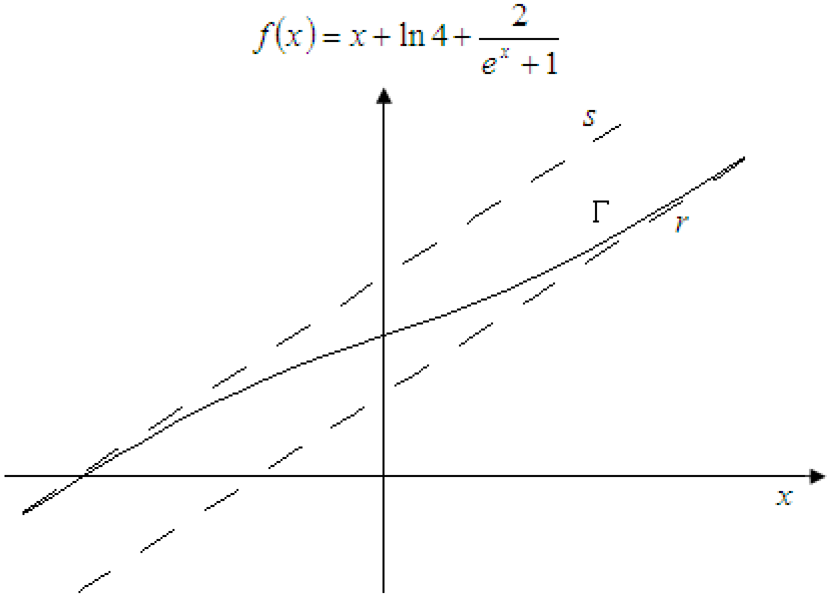
$$f''(x) = \frac{2e^{2x}\left(e^x+1\right)^2 - 2e^x\left(e^{2x}+1\right)\left(e^x+1\right)}{\left(e^x+1\right)^4} =$$

$$\frac{2e^x\left(e^x+1\right)\left(e^{2x}+e^x-e^{2x}-1\right)}{\left(e^x+1\right)^4} = \frac{2e^x\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^3}$$

per cui $f''(x) > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow x > 0$ da cui deduciamo che la funzione ha concavità verso l'alto in $(0,+\infty)$ e verso il basso in $(-\infty,0)$ e $A(0,1+\ln 4)$ è un flesso a tangente obliqua con equazione

$$y = \frac{x}{2} + 1 + \ln 4.$$

Di seguito il grafico della funzione e dei due asintoti nello stesso riferimento cartesiano.



Punto 4

L'integrale $I(\beta)$ può essere interpretato geometricamente come l'area della regione di piano delimitata dall'asse *y*, dalla retta di equazione $x=\beta$, dall'asintoto *r* e dal grafico di Γ. Calcoliamo ora esplicitamente l'integrale richiesto: $I(\beta)=\int_0^\beta [f(x)-x-\ln 4]dx=\int_0^\beta \left(\frac{2}{e^x+1}\right)dx$.

Effettuando la sostituzione $t=e^x \rightarrow x=\ln t$, gli estremi inferiore e superiore diventano $x=0 \rightarrow t=1, x=\beta \rightarrow t=e^\beta$ per cui l'integrale si scrive $I(\beta)=\int_0^\beta \left(\frac{2}{e^x+1}\right)dx=\int_1^{e^\beta} \frac{2}{t(t+1)}dt$.

L'integrando $\frac{2}{t(t+1)}$ può essere scrittocome $\left[\frac{2}{t}-\frac{2}{(t+1)}\right]$ per cui l'integrale diventa

$$I(\beta)=\int_1^{e^\beta}\frac{2}{t(t+1)}dt=\int_1^{e^\beta}\left(\frac{2}{t}-\frac{2}{t+1}\right)dt=\left[2\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\right]_1^{e^\beta}=2\ln\left(\frac{e^\beta}{e^\beta+1}\right)+2\ln 2$$

Passando al limite per $\beta\to+\infty$ si ha

$$\lim_{\beta\to+\infty}I(\beta)=\lim_{\beta\to+\infty}\left[2\ln\left(\frac{e^\beta}{e^\beta+1}\right)+2\ln 2\right]=2\ln\left[\lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{e^\beta}{e^\beta+1}\right)\right]+2\ln 2=$$

$$2\ln 1+2\ln 2=2\ln 2$$

che rappresenta l'area della regione di piano illimitata delimitata dall'asse *y*, dall'asintoto *r* e dal grafico di Γ.

PROBLEMA2

Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni *f* e *g* definite, per tutti gli *x* reali, da:

$$f(x) = x^3 - 16x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$$

1. Si studino le funzioni *f* e g e se ne disegnino i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano *Oxy*. Si considerino i punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-10,10]$ e se ne indichino le coordinate.
2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R
delimitata dai grafici di f e di g sull'intervallo $[0,4]$. Si calcoli l'area di R.
3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette $y = -15$ e
$y = -5$, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua. Si
calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di 10^{-1})
4. In ogni punto di R a distanza *x* dall'asse *y* la misura della profondità dell'acqua nella vasca è
data da $h(x) = 5 - x$. Quale sarà il volume d'acqua nella piscina? Quanti litri d'acqua saranno
necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

RISOLUZIONE

Punto 1

Studiamo la funzione $f(x) = x^3 - 16x$:

Dominio:R

Intersezione ascisse:

$f(x) = x^3 - 16x = 0 \Rightarrow x(x-4)(x+4) = 0 \Rightarrow x = -4 \vee x = 0 \vee x = 4$;

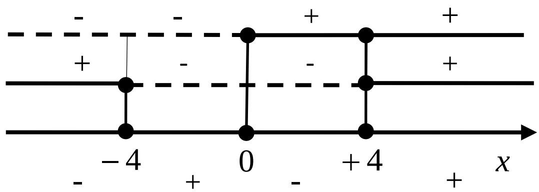
Intersezioni ordinate: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$;

Simmetrie: la funzione è dispari in quanto somma di funzioni dispari; infatti $f(-x) = (-x)^3 - 16(-x) = -x^3 + 16x = -f(x)$;

Positività: la cubica $f(x) = x^3 - 16x$ è fattorizzabile in $f(x) = x(x^2 - 16)$; lo studio del segno dei singoli fattori e della funzione stessa sono rappresentati nel quadro a lato:

$x > 0$

$(x^2 - 16) > 0 \Rightarrow x < -4 \vee x > 4$



$f(x) = x^3 - 16x > 0 \Rightarrow -4 < x < 0 \vee x > 4$

Asintoti verticali: non ve ne sono in quanto il dominio è R;

Asintoti orizzontali: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ per cui non ve ne sono;

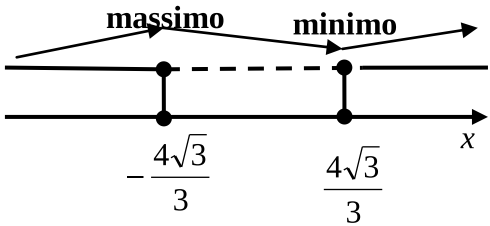
Asintoti obliqui: non ve ne sono in quanto $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $f'(x) = 3x^2 - 16$ per cui è strettamente crescente in $\left(-\infty, -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ e strettamente decrescente in $\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ per cui $\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{128\sqrt{3}}{9}\right)$ è un massimo e $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{128\sqrt{3}}{9}\right)$ è un minimo come raffigurato nel quadro dei segni:

$f'(x) > 0 \Rightarrow x < -\frac{4\sqrt{3}}{3} \vee x > \frac{4\sqrt{3}}{3}$

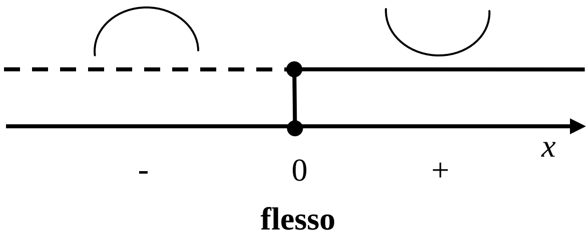
$f'(x) < 0 \Rightarrow -\frac{4\sqrt{3}}{3} < x < \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$

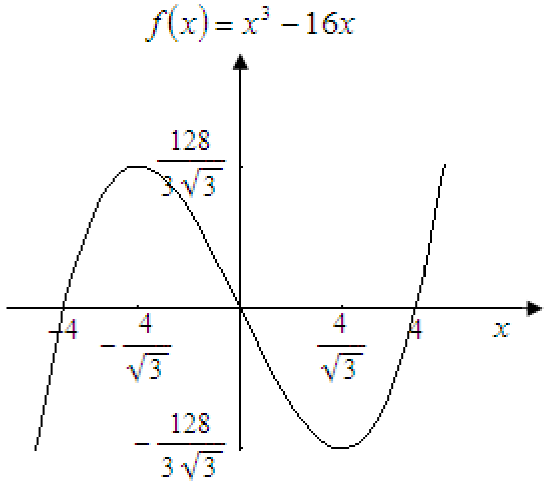


Concavità e convessità: $f''(x) = 6x$ per cui la funzione ha concavità verso l'alto in $(0,+\infty)$ e verso il basso in $(-\infty,0)$ quindi $F(0,0)$ è un flesso a tangente obliqua di equazione $y = -16x$.

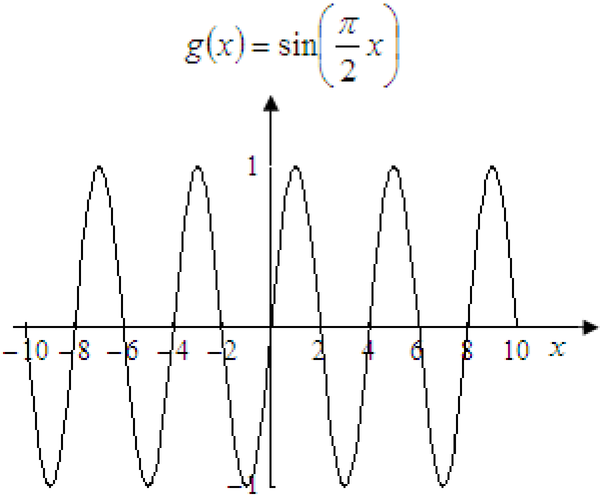
$f''(x) > 0 \Rightarrow x > 0$
$f''(x) < 0 \Rightarrow x < 0$
$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$



Il grafico è di seguito presentato:



La funzione $g(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ è una classica funzione sinusoidale, dispari, di periodo $T=4$ che interseca l'asse delle ascisse nei punti $x=2k$ con $k\in Z$ e il grafico è il seguente:



I punti di $g(x)$ a tangente orizzontale sono i punti in cui si annulla la derivata prima $g'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ e cioè:

$$g'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)=0\rightarrow\frac{\pi}{2}x=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\rightarrow x=2k+1 \text{ con } k\in Z$$

e nell'intervallo $[-10,10]$ i punti sono:

$$(-9,-1),(-7,1),(-5,-1),(-3,1),(-1,-1),(1,1),(3,-1),(5,1),(7,-1),(9,1)$$

Alternativamente, poichè i punti a tangente orizzontale sono i massimi e i minimi della sinusoide, si avrà:

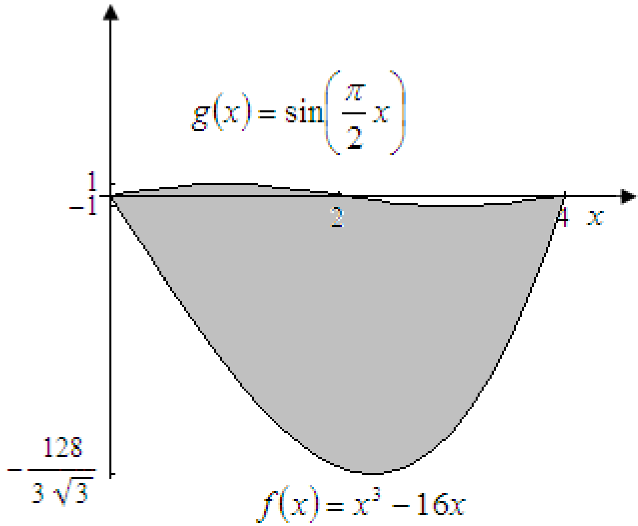
Massimi: $\sin\frac{\pi}{2}x=1\Rightarrow\frac{\pi}{2}x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow x=1+4k$ con $k\in Z$

Minimi: $\sin\frac{\pi}{2}x=-1\Rightarrow\frac{\pi}{2}x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow x=3+4k$ con $k\in Z$

Nell'intervallo $[-10,10]$ comprendente 5 periodi ci sono cinque massimi e cinque minimi: i massimi hanno ascissa $x=1+4k$ con $-10<1+4k<10 \wedge k\in Z \Rightarrow -\frac{11}{4}<k<\frac{9}{4} \wedge k\in Z \Rightarrow k=-2,-1,0,1,2$ ed ordinata $y=1$ e sono $(-7,1),(-3,1),(1,1),(5,1),(9,1)$; i minimi hanno ascissa $x=3+4k$ con $-10<3+4k<10 \wedge k\in Z \Rightarrow -\frac{13}{4}<k<\frac{7}{4} \wedge k\in Z \Rightarrow k=-3,-2,-1,0,1$ ed ordinata $y=-1$ e sono $(-9,-1),(-5,-1),(-1,-1),(3,-1),(7,-1)$. Abbiamo così ritrovato gli stessi punti precedentemente calcolati.

Punto 2

La regione R è di seguito presentata:



Dalla figura soprastante si evince chiaramente che il grafico G_g in $[0,4]$ sta sempre al di sopra del grafico G_f; tuttavia prima di procedere al calcolo mostriamo analiticamente che $f(x)\le g(x)\ \ \forall x\in[0,4]$.

Nell'intervallo $[0,2]$ la disuguaglianza è verificata in quanto dal segno di entrambe deduciamo che $f(x) \le 0 \le g(x)$.
Nell'intervallo $[2,3]$ la funzione $g(x) = \sin(\pi x) \ge -1$ in quanto la funzione seno ha come codominio $[-1,1]$ mentre la funzione $f(x) = x^3 - 16x$ è concava verso l'alto in quanto ha derivata seconda $f''(x) = 6x$ positiva e, inoltre, poiché $f(2) = -24 < -1, f(3) = -21 < -1$ per convessità è minore di -1 in tutto $[2,3]$.
Per dimostrare che vale la disuguaglianza $f(x) \le g(x)$ anche in $[3,4]$ notiamo innanzitutto che entrambe le funzioni sono crescenti per cui vale la seguente catena di disuguaglianze:

$$g'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \le g'(4) = \frac{\pi}{2} \le 11 = f'(3) \le f'(x)$$

da cui deduciamo $g'(x) \le f'(x)\ \forall x \in [3,4]$.
Ora poiché $f(4) = g(4) = 0$ vale la seguente disuguaglianza:

$$f(x) = f(4) - \int_x^4 f'(t)dt = -\int_x^4 f'(t)dt \overset{g'(t)\le f'(t)}{\le} -\int_x^4 g'(t)dt = g(4) - \int_x^4 g'(t)dt = g(x)$$

cioè $f(x) \le g(x)$ anche in $[3,4]$; in conclusione abbiamo provato che $f(x) \le g(x)\ \forall x \in [0,4]$.
In definitiva l'area richiesta vale

$$S(R) = \int_0^4 [g(x) - f(x)]dx = \int_0^4 \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^3 + 16x\right]dx =$$

$$= \left[-\frac{2\cos(\pi x)}{\pi} - \frac{x^4}{4} + 8x^2\right]_0^4 = \left(-\frac{2}{\pi} - 64 + 128\right) - \left(-\frac{2}{\pi}\right) = 64$$

Punto 3

Dobbiamo risolvere le equazioni $f(x)=-15$ e $f(x)=-5$.

Risolviamo prima $f(x)=-15$ e cioè

$$x^3-16x+15=(x-1)\left(x^2+x-15\right)=0 \Rightarrow$$

$$x_1=1 \vee x_2=\frac{-1\pm\sqrt{61}}{2}\cong -4,4 \vee x_3=\frac{-1+\sqrt{61}}{2}\cong 3,4 .$$

I punti sono, quindi,

$A_1=(1,-15), B=\left(\frac{-1+\sqrt{61}}{2},-15\right), C=\left(\frac{-1-\sqrt{61}}{2},-15\right)$ di cui solo

$A_1=(1,-15), B=\left(\frac{-1+\sqrt{61}}{2},-15\right)$ appartengono al bordo della piscina

in quanto le rispettive ascisse sono interne all'intervallo $[0,4]$.

Risolviamo ora $f(x)=-5$ e cioè $h(x)=x^3-16x+5=0$; dal grafico della cubica ci rendiamo subito conto che le intersezioni con la retta di equazione $y=-5$ nell'intervallo $[0,4]$ sono 2.

Poichè $h(0)>0, h(1)<0$, per il teorema degli zeri la prima soluzione appartiene a $(0,1)$. Analogamente, poichè $h(3)<0, h(4)>0$, per il teorema degli zeri, la seconda soluzione appartiene a $(3,4)$.

Calcoliamo la prima soluzione $0<\overline{x_1}<1$ mediante il metodi di bisezione; di seguito la tabella riportante tutti i passi dell'algoritmo:

a	b	$h(a)$	$h(b)$	$x_m = \frac{a+b}{2}$	$h(x_m)$	Δx	$\Delta x < \frac{1}{10}$
0,0000	1,0000	5,0000	-10,0000	0,5000	-2,8750	1,0000	NO
0,0000	0,5000	5,0000	-2,8750	0,2500	1,0156	0,5000	NO
0,2500	0,5000	1,0156	-2,8750	0,3750	-0,9473	0,2500	NO
0,2500	0,3750	1,0156	-0,9473	0,3125	0,0305	0,1250	NO
0,3125	0,3750	0,0305	-0,9473	0,3438	-0,4594	0,0625	SI

Dalla tabella soprastante si evince che a meno di un decimo la soluzione accettabile è $\overline{x_1} \cong 0{,}3$.

Calcoliamo la seconda soluzione $\overline{x_2}$ ricorsivamente mediante la formula di Newton-Raphson $x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 16x_n + 5}{3x_n^2 - 16} = \frac{2x_n^3 - 5}{3x_n^2 - 16}$ con punto iniziale $x_0 = 4$ in cui $h(x_0)$ e $h''(x_0)$ sono concordi. La tabella seguente mostra tutti i passi dell'algoritmo:

n	x_n	x_{n+1}	$\Delta x = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$	$\Delta x < \frac{1}{10}$
0	4,000	3,844		
1	3,844	3,834	0,156	NO
2	3,834	3,833	0,010	SI

Con un errore inferiore al decimo si ha $\overline{x_2} \cong 3{,}8$, in particolare possiamo in questo caso fornire un'approssimazione con due cifre significative esatte $\overline{x_2} \cong 3{,}83$. Notiamo, quindi, che l'applicazione del metodo delle tangenti ci conduce all'individuazione della radice con maggiore precisione in un numero minore di passi.

Punto 4

Per il calcolo del volume si può ragionare in quersto modo. Un piano perpendicolare ala superficie libera dell'acqua interseca quest'ultima secondo un segmento di lunghezza $[g(x)-f(x)]$ per cui la sezione è un rettangolo di base $[g(x)-f(x)]=\left(\sin\frac{\pi}{2}x-x^3+16x\right)$ ed altezza $h(x)=5-x$ e quindi di area $A(x)=\left(\sin\frac{\pi}{2}x-x^3+16x\right)\cdot(5-x)$ con $x\in[0,4]$. Se si considera uno spessore dx il volumetto infinitesimo è $dV=A(x)\cdot dx=\left[\left(\sin\frac{\pi}{2}x-x^3+16x\right)\cdot(5-x)\right]\cdot dx$ pertanto il volume richiesto è $V=\int_0^4\left[\left(\sin\frac{\pi}{2}x-x^3+16x\right)\cdot(5-x)\right]dx$

Utilizzando l'integrazione per parti e la formula di integrazione delle funzioni polinomiali, il volume è

$$V=\int_0^4\left[\left(\sin\frac{\pi}{2}x-x^3+16x\right)\cdot(5-x)\right]dx=$$

$$=\int_0^4\left[(5-x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]dx+\int_0^4\left(x^4-5x^3-16x^2+80x\right)dx=$$

$$=\left[\frac{2(x-5)}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{4}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{x^5}{5}-\frac{5x^4}{4}-\frac{16x^3}{3}+40x^2\right]_0^4=$$

$$=\left(-\frac{2}{\pi}+\frac{1024}{5}-320-\frac{1024}{3}+640\right)-\left(-\frac{10}{\pi}\right)=\left(\frac{8}{\pi}+\frac{2752}{15}\right)\ \mathrm{m}^3$$

Poiché $1\mathrm{m}^3=1000\mathrm{dm}^3$ e $1\mathrm{dm}^3=1\mathrm{l}$ i litri contenuti nella vasca sono i litri contenuti nella vasca sono $\left(\frac{8}{\pi}+\frac{2752}{15}\right)\cdot 1000\ \text{litri}=186013{,}15\ \text{litri}$.

QUESTIONARIO

Quesito 1

Silvia, che ha frequentato un indirizzo sperimentale di liceo scientifico, sta dicendo ad una sua amica che la *geometria euclidea* non è più vera perchè per descrivere la realtà del mondo che ci circonda occorrono modelli di *geometria non euclidea.* Silvia ha ragione? Si motivi la risposta.

Silvia non ha ragione. La geometria non euclidea non è una geometria intrin- secamente più corretta di quella euclidea. Semplicemente la geometria euclidea fornisce uno strumento matematico adeguato per descrivere il mondo che ci circonda se ragioniamo in termini di piccole distanze, piccole rispetto alle dimensioni della Terra. Se invece siamo interessati a studiare, ad esempio, problemi di spostamento sulla superficie terrestre che coinvolgono distanze paragonabili alle dimensioni del pianeta, allora l'approssimazione euclidea non è adeguata, e occorre invece utilizzare modelli non euclidei, nella fattispecie una geometria di tipo ellittico.

Quesito 2

Si trovi il punto della curva $y=\sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4,0)$.

È possibile risolvere il quesito attraverso due metodi, il primo che fa uso degli strumenti dell'analisi infinitesimale e il secondo che, invece, utilizza gli strumenti della geometria analitica. Li presentiamo entrambi.

- *Metodo analitico*

Un punto P della curva, posto $x \geq 0$, ha coordinate $\left(x,\sqrt{x}\right)$ e la distanza dal punto (4,0) è $d(x)=\sqrt{(x-4)^2+\left(\sqrt{x}\right)^2}=\sqrt{x^2-7x+16}$.
Minimizzare la funzione distanza è equivalente a minimizzare la

funzione quadrato della distanza, per cui minimizzeremo la funzione $h(x)=d^2(x)=x^2-7x+16$; la derivata prima è $h'(x)=2x-7$ per cui la funzione $h(x)$ è strettamente crescente in $\left(\frac{7}{2},+\infty\right)$ e strettamente decrescente in $\left[0,\frac{7}{2}\right)$ per cui presenta un minimo all'ascissa $x=\frac{7}{2}$. In alternativa, poiché $h(x)=d^2(x)=x^2-7x+16$ è l'equazione di una parabola con concavità verso l'alto, il minimo è raggiunto nell'ascissa del vertice $x=-\frac{b}{2a}=\frac{7}{2}$.

- *Metodo geometrico*

Il punto Q a distanza minima è il punto della curva la cui tangente è perpendicolare al segmento PQ, cioè tale che il prodotto dei coefficienti angolari valga -1. Il generico coefficiente della retta tangente è $m=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ con $x\neq 0$ mentre il coefficiente angolare della retta PQ è $m'=\frac{\sqrt{x}}{x-4}$. Imponendo $m\cdot m'=-1$ si ricava $\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x}}{x-4}\right)=-1$ da cui $\frac{1}{8-2x}=1\Rightarrow 8-2x=1\Rightarrow x=\frac{7}{2}$.

In ambo i casi il punto più vicino è $\left(\frac{7}{2},\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$ e la distanza minima è

$$d_{\min}=\sqrt{\left(\frac{7}{2}-4\right)^2+\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

Quesito 3

Sia R la regione delimitata, per $x \in [0, \pi]$ dalla curva $y = \sin x$ e dall'asse x e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W

Visto che è richiesto il volume di rotazione intorno all'asse delle ordinate, è conveniente esplicitare la funzione inversa della funzione seno. In particolare se $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ l'inversa è $g(y) = \arcsin y$ mentre se $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ l'inversa è $h(y) = \pi - \arcsin y$ con $y \in [0,1]$ per cui il volume richiesto è pari alla differenza tra i volumi generati da $h(y) = \pi - \arcsin y$ e $g(y) = \arcsin y$ intorno all'asse y:

$$V = \pi\left[\int_0^1 (\pi - \arcsin y)^2 dy - \int_0^1 \arcsin^2 y dy\right] = \pi \int_0^1 \left(\pi^2 - 2\pi \arcsin y\right) dy = \pi^3 - 2$$

Applicando l'integrazione per parti si ha

$$\int_0^1 \arcsin y dy = [y \arcsin y]_0^1 - \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = \left[y \arcsin y + \sqrt{1-y^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

per cui $V = \pi^3 - 2\pi^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 2\pi^2$.

Alternativamente pensiamo la regione R decomposta in tanti ognuno dei quali genera un solido pari alla differenza di due cilindretti, in modo che, intuitivamente potremo pensare W come somma progressiva di infiniti gusci cilindrici coassiali di spessore dx, dove il raggio x varia da 0 a π.

Il volume del guscio (infinitesimo) può essere calcolato come prodotto dell'area circolare di base di raggio esterno $(x_i + \Delta x_i)$ e raggio interno

x_i , per l'altezza: $V_i = \pi \cdot \left[(x_i + \Delta x_i)^2 - x_i^2 \right] \cdot \sin x_i$. Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore a $\Delta x_i^{\ 2}$ il volume infinitesimo sarà $V_i = 2\pi \cdot x_i \cdot \sin x_i \cdot \Delta x_i$. Se il numero di gusci cilindrici in cui suddividiamo l'intervallo $[0, \pi]$ è N il volume richiesto sarà:

$$V = \lim_{N \to +\infty} \sum_{i=1}^{N} V_i = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} 2\pi \cdot x_i \cdot \sin x_i \cdot \Delta x_i \right) = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x dx = .$$

$$2\pi \left[-x \cos x + \sin x \right]_0^{\pi} = 2\pi^2$$

Più velocemente ancora, avremmo potuto applicare il teorema di Guldino per cui $V = 2\pi \cdot x_G \cdot S$ dove x_G è l'ascissa del baricentro che per simmetria nel caso in esame

è $\frac{\pi}{2}$ ed S è l'area sottesa da $y = \sin x$ in $[0, \pi]$,

$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$; in conclusione $V = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 = 2\pi^2$.

Quesito 4

Il numero delle combinazioni di *n* oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi *n*.

Si deve risolvere l'equazione $C_{n,4} = C_{n,3}, n \in N$.

La condizione di esistenza è $\begin{cases} n \geq 4 \\ n \geq 3 \end{cases} \Rightarrow n \geq 4$.

Ricordando che $C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$, con $n \geq k$.

Nel caso in esame

$$C_{n,4} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{4!}, C_{n,3} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{3!}$$

e imponendo l'uguaglianza si ha:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{24}(n-3-4)=$$
$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-7)}{24}=0$$

da cui $n=0{,}1{,}2{,}7$.

Poiché per la condizione di esistenza deve essere $n\geq 4$ la soluzione accettabile è $n=7$.

In alternativa, ricordando la proprietà di simmetria dei coefficienti binomiali $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, essendo $k=4$ ed $n-k=3$, l'uguaglianza è soddisfatta se $n-4=3$ e quindi se $n=7$.

Quesito 5

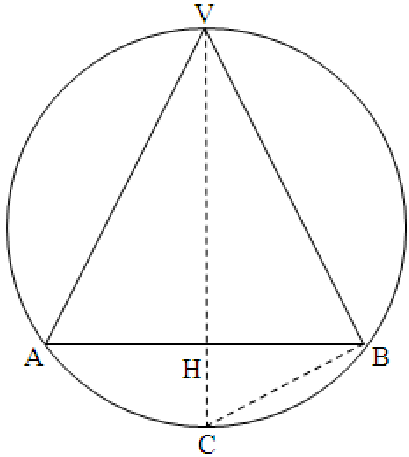
In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme N dei numeri naturali ("i numeri tutti"). Dice Salviati: «....se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni?

Non è corretto quanto esposto da Salviati, e l'inganno viene dal fatto che si sta ragionando su insiemi infiniti. Più precisamente se N è l'insieme dei numeri naturali e $Q\subset N$ è l'insieme dei quadrati perfetti allora l'applicazione $f: N\rightarrow Q,\ \ f(n)=n^2$ è biiettiva. Ne segue che i due insiemi N e Q hanno la stessa cardinalità o, in altre parole, lo stesso numero di elementi.

Quesito 6

Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?

Consideriamo la figura a lato.



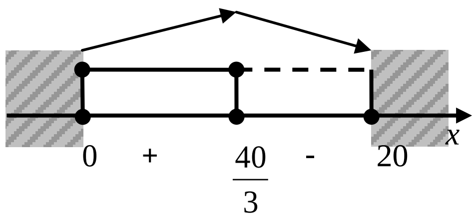
Sia $\overline{VH} = x$ con $0 < x < 20$. Per il teorema di Euclide $\overline{VB} = \sqrt{\overline{VH} \cdot \overline{VC}} = \sqrt{20x}$ e per il teorema di Pitagora $\overline{HB} = \sqrt{\overline{VB}^2 - \overline{VH}^2} = \sqrt{20x - x^2}$; la superficie laterale del cono è $S_l(x) = \pi \cdot \overline{HB} \cdot \overline{VB} = \sqrt{20}\pi \cdot \sqrt{20x^2 - x^3}$ con $0 < x < 20$.

La massimizzazione di $S_l(x)$ equivale alla massimizzazione di $h(x) = \sqrt{20x^2 - x^3}$ il che equivale alla massimizzazione del quadrato della funzione ausiliaria $h(x) = \sqrt{20x^2 - x^3}$; va quindi massimizzata la funzione $g(x) = h^2(x) = 20x^2 - x^3$ la cui derivata prima è $g'(x) = 40x - 3x^2$ e il cui segno è il seguente:

$$g'(x) = 40x - 3x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{40}{3}$$

$$g'(x) = 40x - 3x^2 < 0 \Rightarrow \frac{40}{3} < x < 20$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \frac{40}{3}$$



Dal segno soprastante deduciamo che la superficie laterale è massima quando l'altezza VH misura $x_{\max} = \dfrac{40}{3}$ cui corrisponde

$$S_l(x_{\max}) = \sqrt{20}\pi \cdot \sqrt{20\left(\frac{40}{3}\right)^2 - \left(\frac{40}{3}\right)^3} = \frac{800\sqrt{3}}{9}\pi \cong 483{,}68 cm^2$$

Quesito 7

Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Quale è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?

Si tratta di un classico problema di n prove ripetute di tipo bernoulliano dove la probabilità di successo in una singola prova è $p = \dfrac{1}{4}$ e di insuccesso $q = 1 - p = \dfrac{3}{4}$. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di risposte esatte. La distribuzione di probabilità (o funzione masse di probabilità, *pmf*) è di tipo binomiale

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Nel caso in esame la probabilità richiesta è $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$ dove

$P(X = 0) = \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{10}$ e

$P(X = 1) = \binom{10}{1} p^1 (1-p)^9 = 10 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^9 = \dfrac{5}{2} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^9$ per cui

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 = .$$

$$1 - 13 \cdot \frac{3^9}{4^{10}} \cong 0{,}75597$$

Quesito 8

In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio?* Perchè è così spesso citato?

La quadratura del cerchio, assieme al problema della trisezione dell'angolo e a quello della duplicazione del cubo, costituisce un problema classico della geometria greca. In sostanza quello della quadratura del cerchio non è altro che un classico problema di matematica (più precisamente di geometria) il cui scopo è costruire un quadrato che abbia la stessa area di un dato cerchio, con uso esclusivo di riga e compasso. Dal punto di vista algebrico, indicati con *r* il raggio del cerchio e con *l* il lato del quadrato da trovare, vale la relazione:

$$\pi \cdot r^2 = l^2 \rightarrow l = \sqrt{\pi} \cdot r$$

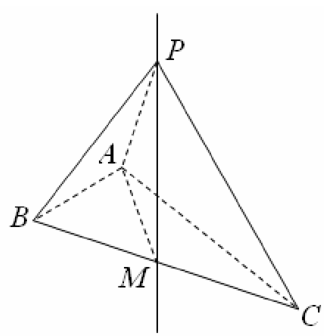
Nel 1882 fu dimostrato che non era possibile costruire un lato di misura $l = \sqrt{\pi} \cdot r$ solo con riga e compasso e ciò deriva dal fatto che il numero π è trascendente.

Quesito 9

Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell 'ipotenusa.

Forniamo due tipi di soluzione al quesito, una con metodo sintetico ed una con metodo analitico.

- *Metodo sintetico*



Consideriamo la figura a lato.
Ogni triangolo rettangolo è inscrivibile in una circonferenza di centro M, punto medio dell’ipotenusa BC, e raggio $\overline{BM} = \overline{MC} = \overline{AM}$. Per questo motivo, preso un qualsiasi punto P sulla perpendicolare per M al piano del triangolo, le tre distanze

cateti congruenti.
Per dimostrare che la retta in questione è il luogo richiesto dobbiamo dimostrare che ogni punto equidistante da A, B e C si trova su tale retta. A tale scopo basta notare che il luogo dei punti equidistanti da A e B è il piano perpendicolare ad AB nel suo punto medio, analogamente per A e C e per B e C: i punti equidistanti da A, B e C appartengono contemporaneamente a questi tre piani, che hanno in comune proprio la retta perpendicolare al piano del triangolo ABC nel punto medio M dell'ipotenusa BC.

- *Metodo analitico*

Consideriamo un sistema di coordinate nello spazio in modo che i vertici del triangolo rettangolo siano $O(0,0,0), A(a,0,0), B(0,b,0)$ e sia $P(x,y,z)$ un generico punto dello spazio; di conseguenza il punto medio dell'ipotenusa AB sarà

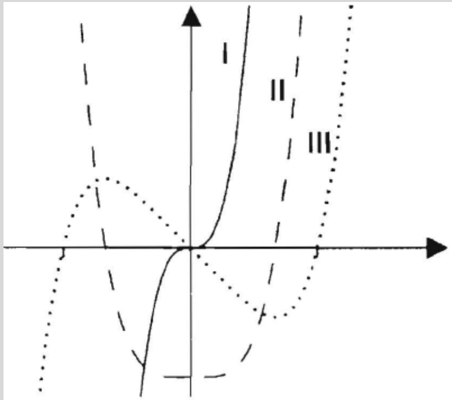
$$M=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{x_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0\right).$$

La condizione $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{OP}$, ricordando la formula della distanza tra due punti, si riconduce a:

$$\underset{(1)}{(x-a)^2+y^2+z^2}=\underset{(2)}{x^2+(y-b)^2+z^2}=\underset{(3)}{x^2+y^2+z^2}$$

Uguagliando la (1) e la (3) ricaviamo $x=\frac{a}{2}$ cioè l'equazione del piano parallelo al piano yz e passante per $\left(\frac{a}{2},0,0\right)$ mentre uguagliando la (2) e la (3) ricaviamo $y=\frac{b}{2}$ cioè l'equazione del piano parallelo al piano xz e passante per $\left(0,\frac{b}{2},0\right)$. L'intersezione tra i due piani suddetti, entrambi passanti per $M=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0\right)$, dà una retta r parallela all'asse z, e perciò perpendicolare al piano xy su cui giace il triangolo, passante per il punto $M = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$ coincidente con il punto medio dell'ipotenusa AB.

Quesito 10



Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione *f*, un altro lo è della funzione derivata *f'* e l'altro ancora di *f''*. Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	f	*f'*	*f''*
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta.

La risposta esatta è D.
Infatti se assumiamo come *f* la funzione III ci rendiamo conto che la derivata prima si annulla in due punti in corrispondenza del massimo e del minimo relativo che assume *f*. Inoltre deve avvenire che la derivata prima deve essere positiva tra meno infinito e il massimo di *f*, negativa tra massimo e minimo, e poi di nuovo positiva dal minimo in poi. E ciò è quello che succede nella funzione II. Inoltre la derivata seconda deve azzerarsi solo in zero che è flesso per *f*, passando da valori negativi a valori positivi, cosa che accade per la funzione I.
Alternativamente possiamo notare come delle tre funzioni, due sono dispari e cioè I e III e una è pari, la II. Visto che la derivata di una funzione dispari è pari e viceversa, la funzione derivata prima non può

essere che la II. In questo modo le alternative possibili restano la A e la D. Ma la A va scartata in quanto la funzione II assume sia valori positivi che negativi e quindi non può essere la derivata della I, perché derivando la I si ottiene una funzione sempre positiva. Pertanto l'alternativa corretta è la D.
Un ulteriore metodo di risoluzione del quesito consiste nell'escludere che il grafico di *f* possa essere I (ciò esclude A e B come alternative) e II (ciò esclude C come alternativa) e poi tra le alternative D ed E rimanenti escludere la E.
Se il grafico di *f* fosse I, il grafico della derivata seconda dovrebbe essere sempre positivo in quanto *f* è strettamente crescente; tuttavia, né II né III hanno grafici tutti al di sopra dell'asse delle ascisse per cui escludiamo le alternative A e B. Se il grafico di *f* fosse II, poiché *f* è crescente per $x>0$ il grafico di *f'* dovrebbe essere positivo per $x>0$ cosa che non è garantito dal grafico III per cui la C è da escludere. Quindi il grafico di *f* è III; il grafico di *f'* deve annullarsi nei punti di massimo e minimo relativo di *f* e ciò è garantito da II e non da I. In conclusione l'alternativa E va scartata e la risposta al quesito è D.