PROBLEMA1

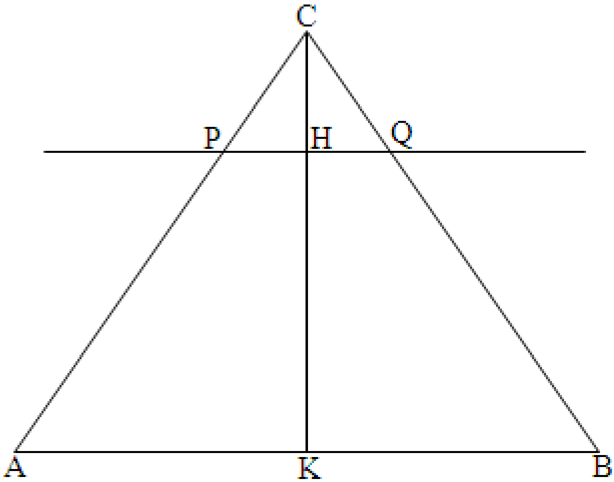
Il triangolo ABC è equilatero di lato unitario. La retta *r* parallela ad AB interseca i lati AC e BC , rispettivamente, nei punti P e Q .

1. Si indichi con *x* la distanza di r dal vertice C. Per quale valore di *x*, nel quadrilatero ABQP
 si può inscrivere una circonferenza? Quale è la lunghezza del suo raggio?
2. Si esprima in funzione di *x* il rapporto fra l'area del triangolo PQC e l'area del quadrilatero
 ABQP, verificando che si ottiene la funzione:
$$f(x)=\frac{4x^2}{3-4x^2}$$
 Il rapporto $f(x)$ assume tutti i valori reali positivi? Si giustifichi la risposta
3. Si studi la funzione f senza tener conto dei limiti geometrici del problema e se ne tracci il
 grafico γ
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata da γ e dalla retta di equazione $y=2$.

RISOLUZIONE

Punto 1

Con riferimento alla figura



il trapezio ABQP è circoscrivibile a una circonferenza se
$\overline{AB}+\overline{PQ}=\overline{AP}+\overline{QB}$.

Sia $\overline{CH}=x$ con $0<x<\frac{\sqrt{3}}{2}$; il triangolo PQC è simile al triangolo ABC, pertanto anch'esso è equilatero. Anche i triangoli CHQ e CKB sono simili, pertanto vale la seguente proporzione tra lati omologhi,

$CH:HQ=CK:KB$, cioè $x:\overline{HQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}$ da cui $\overline{HQ}=\frac{\sqrt{3}}{3}x$; per il teorema di Pitagora $\overline{CQ}=\sqrt{\overline{CH}^2+\overline{HQ}^2}=\frac{2x\sqrt{3}}{3}$. Di conseguenza

$\overline{PQ}=2\overline{HQ}=\frac{2x\sqrt{3}}{3}, \overline{AP}=\overline{QB}=\overline{BC}-\overline{CQ}=1-\frac{2x\sqrt{3}}{3}$;

imponendo la condizione di inscrivibilità della circonferenza,
$\overline{AB}+\overline{PQ}=\overline{AP}+\overline{QB}$, si ha

$1+\frac{2x\sqrt{3}}{3}=2-\frac{4x\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 2x\sqrt{3}=1 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{6}$. Il raggio della circonferenza inscritta è $R=\frac{\overline{HK}}{2}=\frac{\overline{CK}-\overline{CH}}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Si arriva allo stesso risultato molto più velocemente osservando che la circonferenza inscritta nel trapezio isoscele ABQP coincide con quella inscritta nel triangolo ABC, il cui raggio è pari a $\frac{1}{3}$ dell'altezza, cioè $R=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Punto2

L'area del triangolo PQC è $S(PQC)=\frac{\overline{CH}\cdot\overline{PQ}}{2}=\frac{x\cdot\frac{2x\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}x^2$;
l'area del trapezio ABQP è dato dalla differenza tra l'area del triangolo equilatero ABC e l'area del triangolo PQC,

$$S(ABQP)=S(ABC)-S(PQC)=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(3-4x^2\right).$$

Il rapporto tra l'area del triangolo PQC e del trapezio ABQP è pertanto

$$f(x)=\frac{S(PQC)}{S(ABPQ)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x^2}{\frac{\sqrt{3}}{12}\left(3-4x^2\right)}=\frac{4x^2}{\left(3-4x^2\right)}$$ con $0<x<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Considerando la limitazione geometrica $0<x<\frac{\sqrt{3}}{2}$, poiché $f(x)=\frac{4x^2}{\left(3-4x^2\right)}$ è continua in $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, essa assume in ogni intervallo chiuso del tipo $\left[\varepsilon, \frac{\sqrt{3}}{2}-\varepsilon\right] \subset \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, a norma del teorema di Weierstrass, tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo assoluto. In particolare se $\varepsilon \to 0^+$, poiché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4x^2}{(3-4x^2)} = 0$ e

$\lim_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}^-} \frac{4x^2}{(3-4x^2)} = +\infty$, il minimo assoluto sarà 0 e il massimo assoluto $+\infty$, pertanto se $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ la funzione

$f(x) = \frac{4x^2}{(3-4x^2)}$ assume tutti e solo i valori reali positivi. Se, invece, rimuoviamo la limitazione geometrica $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$, il rapporto $f(x)$ assume valori negativi per $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$.

Punto 3

Studiamo la funzione $f(x) = \frac{4x^2}{(3-4x^2)}$ prescindendo dai limiti geometrici.

Dominio: $R \setminus \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Intersezione asse ascisse: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$;

Intersezione asse ordinate: $f(x) = \frac{4x^2}{(3-4x^2)} = 0 \Rightarrow x = 0$;

Simmetrie: la funzione è pari in quanto

$f(-x) = \frac{4(-x)^2}{\left[3-4(-x)^2\right]} = \frac{4x^2}{(3-4x^2)} = f(x)$;

Positività: $f(x)=\frac{4x^2}{(3-4x^2)}>0 \Rightarrow x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

Asintoti verticali:

$$\lim_{x\to-\frac{\sqrt{3}}{2}^-}\frac{4x^2}{(3-4x^2)}=-\infty,\ \lim_{x\to-\frac{\sqrt{3}}{2}^+}\frac{4x^2}{(3-4x^2)}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}^-}\frac{4x^2}{(3-4x^2)}=+\infty,\ \lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}^+}\frac{4x^2}{(3-4x^2)}=-\infty$$

pertanto le rette $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ sono asintoti verticali;

Asintoti orizzontali: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2}{(3-4x^2)}=-1$ pertanto $y=-1$ è asintoto orizzontale;

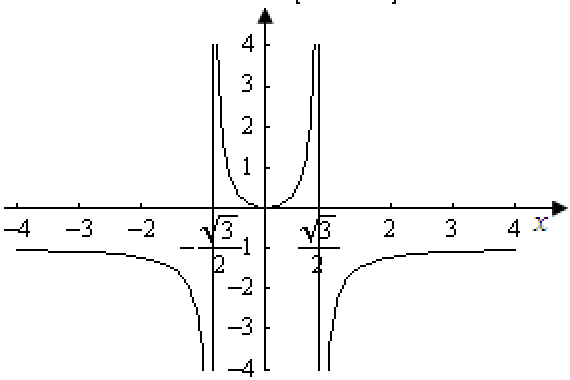
Asintoti obliqui: la presenza di asintoti orizzontali esclude la presenza di quelli obliqui in quanto la funzione $f(x)=\frac{4x^2}{(3-4x^2)}$ è razionale fratta;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $f'(x)=\frac{24x}{(3-4x^2)^2}$ che è positiva in $(0,+\infty)$ e negativa in $(-\infty,0)$, pertanto la funzione è strettamente crescente $(0,+\infty)$ in e strettamente decrescente in $(-\infty,0)$ e assume minimo relativo in $(0,0)$;

Concavità e convessità: la derivata seconda è $f''(x)=\frac{72(4x^2+1)}{(3-4x^2)^3}$ pertanto la funzione rivolge concavità verso l’alto in $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e verso il basso in $x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$

Il grafico è di seguito presentato.

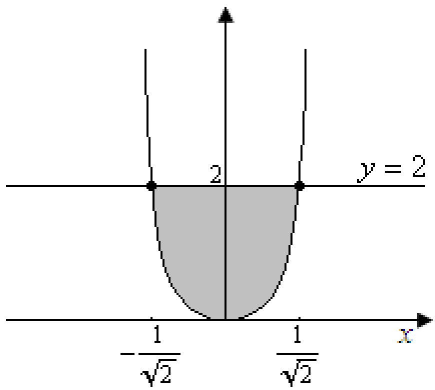
$$f(x)=\frac{4x^2}{(3-4x^2)}$$



Punto 4

Le intersezioni della funzione $f(x)=\frac{4x^2}{(3-4x^2)}$ con la retta $y=2$ si ricavano risolvendo l’equazione $\frac{4x^2}{(3-4x^2)}=2$ da cui

$$4x^2=6-8x^2 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



L’area richiesta è raffigurata in grigio. Essa è pari a

$$S=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(2-\frac{4x^2}{3-4x^2}\right)dx \overset{\substack{\text{Integrando}\\ \text{pari}}}{=} 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(2-\frac{4x^2}{3-4x^2}\right)dx=$$

$$=2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[2+\frac{(-4x^2+3)-3}{3-4x^2}\right]dx=2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(3-\frac{3}{3-4x^2}\right)dx=6\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(1+\frac{1}{4x^2-3}\right)dx$$

Scriviamo la frazione $\frac{1}{4x^2-3}$ come somma di due frazioni

$\frac{1}{4x^2-3}=\frac{A}{2x+\sqrt{3}}+\frac{B}{2x-\sqrt{3}}$; effettuando il minimo comune multiplo

si ha $\frac{1}{4x^2-3}=\frac{2x(A+B)+\sqrt{3}(B-A)}{(2x+\sqrt{3})(2x-\sqrt{3})}$ e tale uguaglianza sussiste se e

solo se $\begin{cases} A+B=0 \\ B-A=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ e cioè se $\begin{cases} A=-\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ B=\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$.

Di conseguenza si ha:

$$S=6\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(1+\frac{1}{4x^2-3}\right)dx=6\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2x+\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2x-\sqrt{3}}\right)dx=$$

$$=6\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(1+\frac{1}{4x^2-3}\right)dx=6\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(1-\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{2x+\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{2x-\sqrt{3}}\right)dx=$$

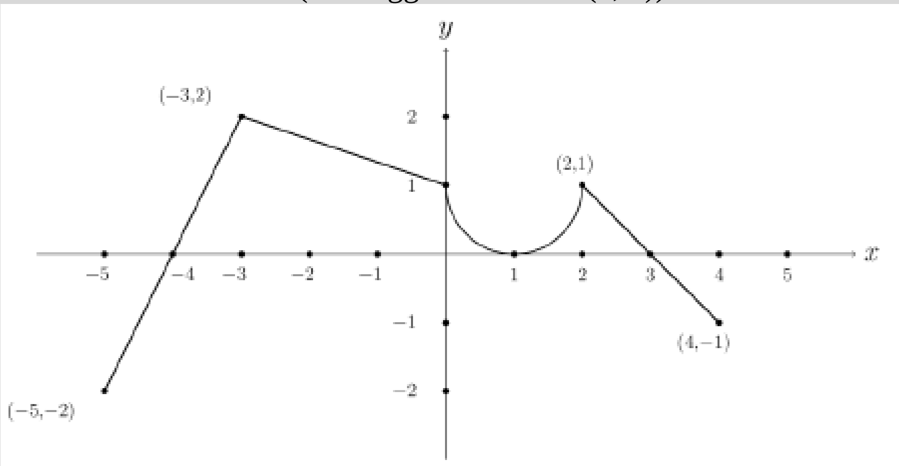
$$=6\left[x-\frac{\sqrt{3}}{12}\ln\left(\left|\frac{2x+\sqrt{3}}{2x-\sqrt{3}}\right|\right)\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=6\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{12}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)\right]=$$

$$=6\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{12}\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2\right]=6\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\right]=$$

$$=3\sqrt{2}-\sqrt{3}\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$$

PROBLEMA2

Il grafico della funzione *g*, disegnato sotto, consiste di tre segmenti e di una semicirconferenza (con raggio 1 e centro (1, 1)).



Sia f la funzione definita da $f(x)=\int_{-3}^{x} g(t)dt$

Si determinino $f(0)$ e $f'(0)$

Si trovi il valore di $x, -5<x<4$, in cui f presenta il massimo assoluto e si trovi altresì il
minimo assoluto di f nell'intervallo chiuso, $-5 \le x \le 4$

Si trovino i valori di $x, -5<x<4$, in cui il grafico di f presenta punti di flesso.

RISOLUZIONE

Punto 1

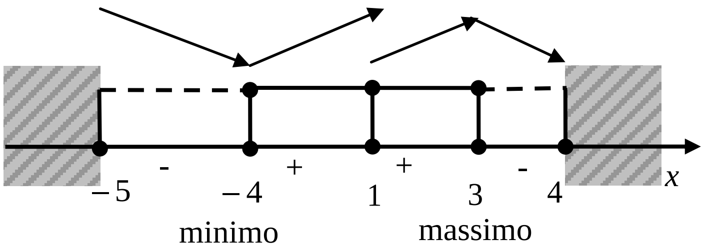
La funzione $f(x)=\int_{-3}^{x} g(t)dt$ per $-3 \le x \le 4$ rappresenta l'area sottesa dalla funzione g mentre per $-5 \le x < 3$ rappresenta l'area sottesa cambiata di segno.. In particolare $f(0)=\int_{-3}^{0} g(t)dt$ è l'area del trapezio rettangolo di base maggiore 2, base minore 1 ed altezza 3 che è pari a

$$f(0)=\int_{-3}^{0} g(t)dt=\frac{(2+1)\cdot 3}{2}=\frac{9}{2}.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale $f'(x)=g(x)$, pertanto $f'(0)=g(0)=1$.

Punto 2

Poichè $f'(x)=g(x)$, dal grafico fornito dalla traccia deduciamo che la derivata prima $f'(x)$ è positiva in $(-4,1)\cup(1,3)$ e negativa in $[-5,-4)\cup(3,4]$,



pertanto $x=-4$ è ascissa di minimo relativo e $x=3$ è ascissa di massimo relativo per $f(x)$ come si evince dal quadro dei segni della derivata prima a lato.

Per trovare il massimo assoluto di $f(x)$ nell'intervallo aperto $(-5,4)$ è necessario confrontare il valore $f(3)$ con $\lim_{x\to -5^+} \int_{-3}^{x} g(t)dt$ pari a $f(-5)$ in quanto $f(x)=\int_{-3}^{x} g(t)dt$ è continua.

Calcoliamo $f(3)$:

$f(3)=\int_{-3}^{3} g(t)dt = \int_{-3}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{3} g(t)dt = \frac{9}{2} + \int_{0}^{2} g(t)dt + \int_{2}^{3} g(t)dt$; l'integrale definito $\int_{0}^{2} g(t)dt$ corrisponde all'area del rettangolo di base 2 e altezza 1 cui va sottratta l'area di un semicerchio di raggio unitario $\int_{0}^{2} g(t)dt = 2\cdot 1-\frac{\pi}{2} = 2-\frac{\pi}{2}$ mentre $\int_{2}^{3} g(t)dt$ rappresenta l'area del triangolo rettangolo con cateti unitari $\int_{2}^{3} g(t)dt = \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ pertanto $f(3)=\frac{9}{2}+2-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}=7-\frac{\pi}{2}$.

Calcoliamo $f(-5)$:

$f(-5)=\int_{-3}^{-5} g(t)dt = -\int_{-5}^{-3} g(t)dt = -\left(\int_{-5}^{-4} g(t)dt + \int_{-4}^{-3} g(t)dt\right) = -(-1+1)=0$ in quanto somma algebrica di due regioni di piano, ovvero triangoli, di uguale area ma orientamento opposto.

Poiché $f(3) > f(-5)$ deduciamo che $M\left(3,7-\frac{\pi}{2}\right)$ è il massimo assoluto di $f(x)$.

Per trovare il minimo assoluto di $f(x)$ è nell'intervallo chiuso $[-5,4]$ è necessario confrontare il valore $f(4)$ con $f(-4)$.

Calcoliamo $f(4)$: $f(4)=\int_{-3}^{4} g(t)dt=\int_{-3}^{3} g(t)dt+\int_{3}^{4} g(t)dt$; l'integrale definito $\int_{3}^{4} g(t)dt$ è l'area cambiata di segno del triangolo rettangolo isoscele di cateto untario $\int_{3}^{4} g(t)dt=-\frac{1}{2}$, pertanto

$$f(4)=\int_{-3}^{4} g(t)dt=\int_{-3}^{3} g(t)dt+\int_{3}^{4} g(t)dt=7-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}=\frac{13}{2}-\frac{\pi}{2}.$$

Calcoliamo $f(-4)$: $f(-4)=\int_{-3}^{-4} g(t)dt=-\int_{-4}^{-3} g(t)dt$ dove l'integrale definito $\int_{-4}^{-3} g(t)dt$ è pari all'area del triangolo rettangoli di cateti pari a 2 e 1 $\int_{-4}^{-3} g(t)dt=\frac{1\cdot 2}{2}=1$, pertanto $f(-4)=\int_{-3}^{-4} g(t)dt=-\int_{-4}^{-3} g(t)dt=-1$.

Poichè $f(-4)<f(4)$ deduciamo che $m(-4,-1)$ è il minimo assoluto.

In conclusione $m(-4,-1)$ è il minimo assoluto e $M\left(3,7-\frac{\pi}{2}\right)$ è il massimo assoluto di $f(x)$.

Punto 3

I punti di flesso vanno ricercati nei punti in cui la derivata prima cambia monotonia; dal grafico deduciamo che le ascisse di suddetti punti sono $x=-3, x=1, x=2$. In particolare $x=1$ è ascissa di flesso a tangente orizzontale in quanto $f'(1)=g(1)=0$, mentre per $x=-3$ e $x=2$ vanno fatte alcune considerazioni. Dal grafico della derivata prima possiamo dedurre anche la sua forma analitica:

$x\in[-5,-3]$, la derivata prima è la retta di estremi $(-5,-2)$ e $(-3,2)$ di equazione $y=2x+8$;

$x \in [-3,0]$, la derivata prima è la retta di estremi $(-3,2)$ e $(0,1)$ di equazione $y = \frac{3-x}{3}$;

$x \in [0,2]$, la derivata prima è la semicirconferenza di centro $(1,1)$ e raggio 1 nel semipiano $y \geq 0$ di equazione $y = 1 - \sqrt{2x - x^2}$;

$x \in [2,4]$, la derivata prima è la retta di estremi $(2,1)$ e $(4,-1)$ di equazione $y = 3 - x$.

La derivata seconda sarà quindi pari a:

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad -5 \leq x < -3 \\ -\frac{1}{3} & \text{se} \quad -3 < x < 0 \\ \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} & \text{se} \quad 0 < x < 2 \\ -1 & \text{se} \quad 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Dal prospetto soprastante notiamo subito che la derivata seconda si annulla in $x = 1$, che pertanto è ascissa di flesso a tangente orizzontale come precedentemente dimostrato. Calcoliamo ora i limiti destro e sinistro per $x = -3$ e $x = 2$:

$$\lim_{x \to -3^-} f''(x) = 2$$

$$\lim_{x \to -3^+} f''(x) = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f''(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f''(x) = -1$$

Dai limiti soprastanti deduciamo che in la derivata seconda non è definita in quanto $x = -3$ è punto angoloso per la derivata prima poichè il limite destro è pari a $-\frac{1}{3}$ mentre quello sinistro è pari a 2; anche in $x = 2$ la derivata seconda non è definita in quanto il limite destro è pari a -1 mentre quello sinistro è pari a $+\infty$; quindi in conclusione $x = -3$

e $x=2$ sono comunque flessi della funzione in quanto in essi la derivata prima cambia monotonia, anche se la derivata seconda in essi non è definita.
A valle delle informazioni acquisite sinora, anche se non richiesto, proviamo a graficare $f(x)=\int_{-3}^{x} g(t)dt$.
Sappiamo che essa presenta:
Minimo assoluto in $m(-4,-1)$
Massimo assoluto in $M\left(3,7-\frac{\pi}{2}\right)$
3 flessi alle ascisse $x=-3, x=1, x=2$ di cui quello con ascissa $x=1$ a tangente orizzontale
$f(-5)=0,\ f(-4)=-1,\ f(3)=7-\frac{\pi}{2},\ f(4)=\frac{13}{2}-\frac{\pi}{2}$
Calcoliamo i valori di $f(x)=\int_{-3}^{x} g(t)dt$ alle altre ascisse $x=-3, x=-2, x=-1, x=0, x=1, x=2$:

$f(-3)=\int_{-3}^{-3} g(t)dt=0$;

$f(-2)=\int_{-3}^{-2} g(t)dt=\frac{\left(\frac{5}{3}+2\right)\cdot 1}{2}=\frac{11}{6}$ pari cioè all'area del trapezio rettangolo di base maggiore 2, base minore $\frac{5}{3}$ e altezza unitaria;

$f(-1)=\int_{-3}^{-1} g(t)dt=\frac{\left(\frac{4}{3}+2\right)\cdot 2}{2}=\frac{10}{3}$ pari cioè all'area del trapezio rettangolo di base maggiore 2, base minore $\frac{4}{3}$ e altezza 2;

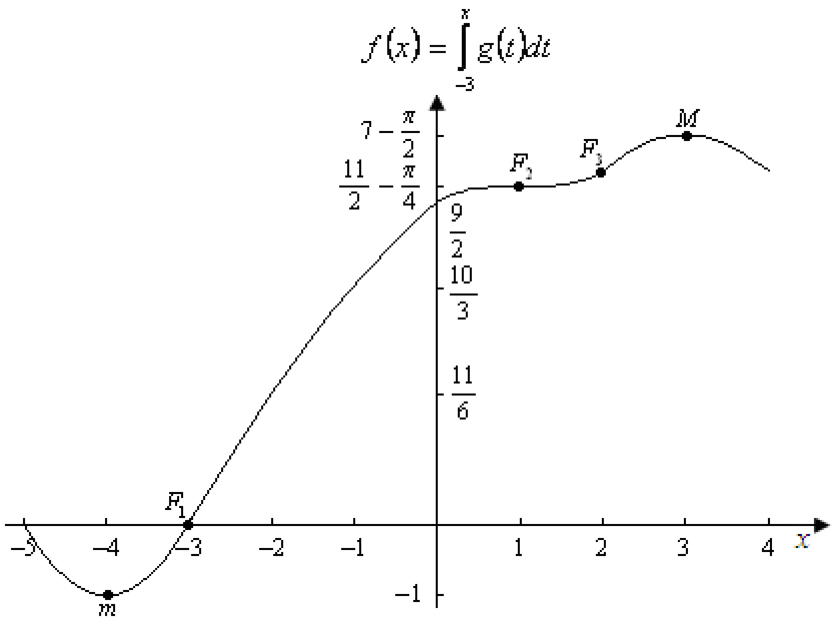
$f(0)=\int_{-3}^{0} g(t)dt=\frac{9}{2}$ come già calcolato;

$f(1)=\int_{-3}^{1} g(t)dt=\int_{-3}^{0} g(t)dt+\int_{0}^{1} g(t)dt$; l'integrale definito $\int_{0}^{1} g(t)dt$ è pari alla differenza tra l'area di un quadrato di lato unitario e di un quarto di cerchio di raggio unitario, $\int_{0}^{1} g(t)dt=1-\frac{\pi}{4}$ pertanto

$$f(1)=\int_{-3}^{1} g(t)dt=\int_{-3}^{0} g(t)dt+\int_{0}^{1} g(t)dt=\frac{9}{2}+1-\frac{\pi}{4}=\frac{11}{2}-\frac{\pi}{4};$$

$$f(2)=\int_{-3}^{2} g(t)dt=\int_{-3}^{0} g(t)dt+2\int_{0}^{1} g(t)dt=\frac{9}{2}+2-\frac{\pi}{2}=\frac{13}{2}-\frac{\pi}{2};$$

Il grafico di $f(x)=\int_{-3}^{x} g(t)dt$ è di seguito presentato.



QUESTIONARIO

Quesito 1

Un docente deve scegliere 4 studenti cui affidare un compito tra i 10 che ne hanno fatto richiesta. Quante scelte può fare?

Il numero possibile di scelte è pari a $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210$.

Quesito 2

Si calcoli: $\lim_{x\to 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 2\cdot 3^{\frac{2}{x}}}{3^{\frac{2-x}{x}}}$

Ponendo $t = \frac{1}{x}$, il limite diventa

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 2\cdot 3^{\frac{2}{x}}}{3^{\frac{2-x}{x}}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{3^t - 2\cdot 3^{2t}}{3^{2t-1}} = \lim_{t\to +\infty}\left[3^{t-(2t-1)} - 2\cdot 3^{2t-(2t-1}\right] =$$

$$= \lim_{t\to +\infty}\left[3^{1-t} - 2\cdot 3\right] = -6$$

in quanto $\lim_{t\to +\infty} 3^{1-t} = 0$.

Quesito 3

Sia $f(x)=\frac{(x+4)(x-3)(x+2)}{(x-6)(x-4)(x-2)}$ si calcoli $f'(x)$

La funzione $f(x)=\frac{(x+4)(x-3)(x+2)}{(x-6)(x-4)(x-2)}$ può essere riscritta, a valle dello sviluppo dei prodotti tra i fattori al numeratore e al denominatore, come $f(x)=\frac{x^3+3x^2-10x-24}{x^3-12x^2+44x-48}$. Applicando la regola di derivazione del rapporto tra funzioni si ha:

$$f'(x)=\frac{\left(3x^2+6x-10\right)\cdot\left(x^3-12x^2+44x-48\right)-\left(x^3+3x^2-10x-24\right)\cdot\left(3x^2-24x+44\right)}{\left(x^3-12x^2+44x-48\right)^2}=$$

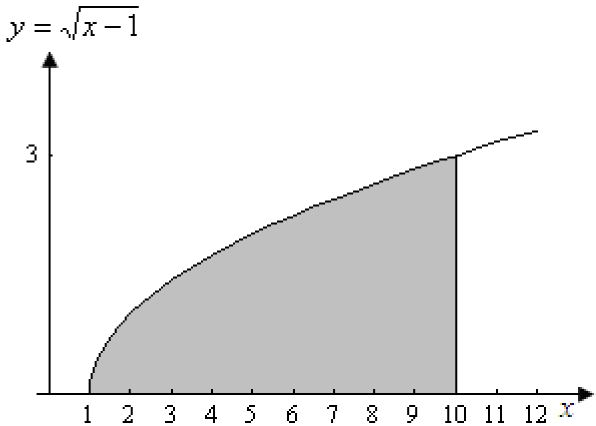
$$=\frac{\left(3x^5-30x^4+50x^3+240x^2-728x+480\right)-\left(3x^5-15x^4-58x^3+300x^2+136x-1056\right)}{\left(x^3-12x^2+44x-48\right)^2}=$$

$$=\frac{-15x^4+108x^3-60x^2-864x+1536}{\left(x^3-12x^2+44x-48\right)^2}=\frac{3\left(-5x^4+36x^3-20x^2-288x+512\right)}{(x-6)^2(x-4)^2(x-2)^2}$$

Quesito 4

Sia R la regione del piano racchiusa tra il grafico di $y=\sqrt{x-1}$, la retta $x=10$ e l'asse *x*. Si trovi l'area di R.

La funzione $y=\sqrt{x-1}$ non è altro che l'arco di parabola di equazione $x=y^2+1$ con asse coincidente con l'asse delle ascisse e vertice in $(1,0)$ definito nel semipiano $y \geq 0$. L'area richiesta è pari a



$$S(R)=\int_1^{10}\sqrt{x-1}\,dx=\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{10}=18.$$

Quesito 5

Una particella si muove lungo l'asse x in modo tale che la sua velocità *v* al tempo t, per $0 \leq t \leq 5$, è data da $v(t)=\ln\left(t^2-3t+3\right)$. Qual è l'accelerazione della particella al tempo t = 4 ?

L'accelerazione è la derivata della velocità in funzione del tempo, $a(t)=v'(t)=\dfrac{2t-3}{t^2-3t+3}$, pertanto $a(4)=\dfrac{5}{7}$.

Quesito 6

Dato l'insieme A = {1, 2, 5, 8}: determinare quanti numeri a due cifre si possono scrivere con gli elementi di A, considerando che sono ammesse le ripetizioni.

Enumeriamo le possibili combinazioni:

$(1,1),(1,2),(1,5),(1,8)$

$(2,1),(2,2),(2,5),(2,8)$

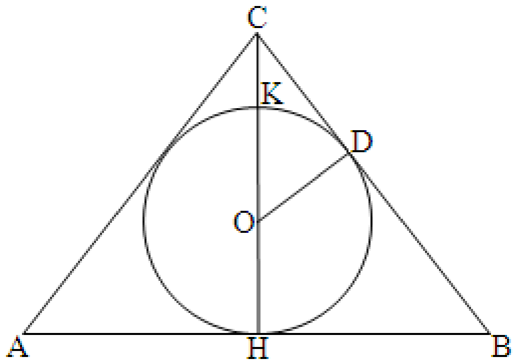
$(5,1),(5,2),(5,5),(5,8)$

$(8,1),(8,2),(8,5),(8,8)$

da cui si deduce che possimo scirvere 16 numeri a due cifre con gli elementi di $A=\{1,2,5,8\}$ includendo le ripetizioni.

Quesito 7

Si determini il cono di volume minimo circoscritto ad una sfera di raggio r.



Consideriamo la figura a lato.
Poniamo $\overline{CO}=x$ con $x>r$; per il teorema di Pitagora $\overline{CD}=\sqrt{x^2-r^2}$. I triangoli COD e CHB sono simili per cui vale la seguente proporzione tra lati omologhi $CD:OD=CH:HB$ che equivale a

$\sqrt{x^2-r^2}:r=(x+r):\overline{HB}$ da cui $\overline{HB}=\dfrac{r\sqrt{x^2-r^2}}{x-r}=r\sqrt{\dfrac{x+r}{x-r}}$. Il volume del cono è

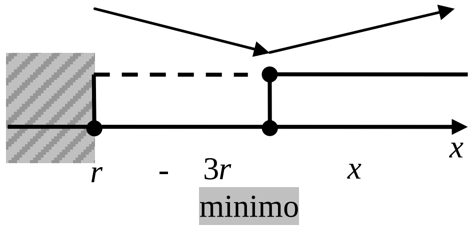
$$V(x)=\pi\frac{\overline{CH}\cdot\overline{HB}^2}{3}=\frac{\pi}{3}\cdot(x+r)\cdot r^2\frac{(x+r)}{(x-r)}=\frac{\pi r^2}{3}\cdot\frac{(x+r)^2}{(x-r)}.$$

La minimizzazione dell'area laterale la effettuiamo mediante derivazione.

La derivata prima della funzione $V(x)=\frac{\pi r^2}{3}\cdot\frac{(x+r)^2}{(x-r)}$ è

$$V'(x)=\frac{\pi r^2}{3}\cdot\left[\frac{2(x+r)(x-r)-(x+r)^2}{(x-r)^2}\right]=\frac{\pi r^2}{3}\cdot\frac{(x+r)(x-3r)}{(x-r)^2}.$$

Considerando la limitazione geometrica $x>r$, il quadro dei segni della derivata prima è di seguito mostrato:



$V'(x)>0 \Rightarrow x>3r$

$V'(x)<0 \Rightarrow r<x<3r$

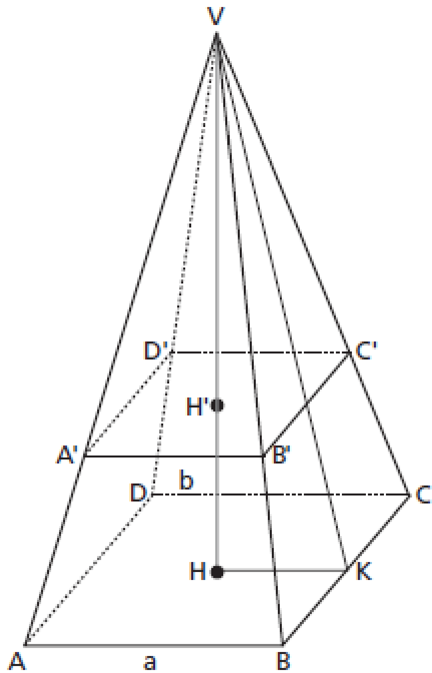
$V'(x)=0 \Rightarrow x=3r$

da cui deduciamo che la funzione è strettamente decrescente in $(r,3r)$ e strettamente crescente in $(3r,+\infty)$, pertanto $x=3r$ è ascissa di minimo. Il volume minimo di conseguenza è pari a

$$V(3r)=\frac{\pi r^2}{3}\cdot\frac{(3r+r)^2}{(3r-r)}=\frac{8}{3}\pi r^3.$$

Quesito 8

Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza *h* e i lati *a* e *b* delle due basi. Come si può procedere per esprimere il volume del tronco in funzione di *a*, *b* e *h*?



Consideriamo una piramide retta a base quadrata con area di base $A_B=a^2$ ed altezza $\overline{VH}=H$; tagliamo la pitamide con un piano parallelo alla base e distante $\overline{VH}'=(H-h)$ dal vertice in modo da ottenere una piramide con area di base $A_b=b^2$ ed altezza

$(H-h)$ e un tronco di piramide con aree di base $A_B = a^2, A_b = b^2$ ed altezza $\overline{HH'} = h$.

Il volume del tronco di piramide è dato dalla differenza tra il volume V_1 della piramide retta a base quadrata con area di base $A_B = a^2$ ed altezza $\overline{VH} = H$ e il volume V_2 della piramide retta a base quadrata con area di base $A_b = b^2$ ed altezza $\overline{VH'} = (H-h)$.

Le due piramidi sono simili, pertanto le aree di base stanno come i quadrati delle rispettive altezze:

$\left(\frac{H-h}{H}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{H-h}{H}\right) = \frac{b}{a} \Rightarrow H = h\left(\frac{a}{a-b}\right)$. Il volume V_1 è pari a $V_1 = \frac{1}{3}a^2 \cdot H = \frac{1}{3}a^2 \cdot h\left(\frac{a}{a-b}\right) = \frac{1}{3}h\left(\frac{a^3}{a-b}\right)$ mentre V_2 è pari a

$V_2 = \frac{1}{3}b^2 \cdot (H-h) = \frac{1}{3}b^2 \cdot \left[h\left(\frac{a}{a-b}\right) - h\right] = \frac{1}{3}h\left(\frac{b^3}{a-b}\right)$. Di conseguenza il volume del tronco di piramide è

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}h\left(\frac{a^3}{a-b}\right) - \frac{1}{3}h\left(\frac{b^3}{a-b}\right) = \frac{1}{3}h\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}h\frac{(a-b)(a^2+b^2+ab)}{(a-b)} = \frac{1}{3}h(a^2+b^2+ab)$$