PROBLEMA1

Sia $f(x)=\sqrt{\ln^2(-x)-\ln x^2+1}$ e sia $g(x)=\sqrt{\ln^2(x)-\ln x^2+1}$

1. Si determinino i domini di f e di g.
2. Si disegnino, nel medesimo sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*, i grafici di *f* e di *g*.
3. Si determinino, se esistono, le coordinate degli eventuali punti di discontinuità o di non derivabilità di *f* e di *g* rispettivamente.
4. Si calcoli l'area compresa tra *g(x)* e l'asse *x* per $e \le x \le 2e$.

RISOLUZIONE

Punto 1

Consideriamo la funzione $f(x)=\sqrt{\ln^2(-x)-\ln x^2+1}$; innanzitutto osserviamo che per l'esistenza di $\ln^2(-x)$ deve essere $x<0$, condizione che assicura anche l'esistenza di $\ln x^2$, in quanto l'addendo $\ln x^2$ esiste $\forall x \neq 0$. Posto quindi $x<0$, l'addendo $\ln x^2$ può essere scritto come $\ln x^2 = 2\ln|x| = 2\ln(-x)$, per cui per assicurare l'esistenza del radicando bisogna imporre $\ln^2(-x)-\ln x^2+1=\ln^2(-x)-2\ln(-x)+1\ge 0$; poiché $\ln^2(-x)-2\ln(-x)+1=[\ln(-x)-1]^2$, la disequazione $[\ln(-x)-1]^2\ge 0$ nel rispetto della condizione $x<0$ è sempre soddisfatta. In conclusione il dominio di $f(x)=\sqrt{\ln^2(-x)-\ln x^2+1}$ è $D_f: x\in(-\infty,0)$.

Stessi ragionamenti vanno fatti per la funzione $g(x)=\sqrt{\ln^2(x)-\ln x^2+1}$ il cui dominio sarà $D_g: x\in(0,+\infty)$.

Punto2

Notiamo subito che il grafico della funzione
$f(x)=\sqrt{\ln^2(-x)-\ln x^2+1}$ può essere ricavato da quello di
$g(x)=\sqrt{\ln^2(x)-\ln x^2+1}$ a seguito di simmetria rispetto all'asse delle ordinate in quanto $f(x)=g(-x)$.

Studiamo quindi il grafico di $g(x)=\sqrt{\ln^2(x)-\ln x^2+1}$. Innanzitutto, poiché $\ln^2(x)-\ln x^2+1=\ln^2(x)-2\ln x+1=[\ln(x)-1]^2$, possiamo riscrivere

$g(x)=\sqrt{\ln^2(x)-\ln x^2+1}$ come

$$g(x)=|\ln(x)-1|=\begin{cases}\ln(x)-1 & \text{se} \quad x\geq e\\ 1-\ln(x) & \text{se} \quad 0<x<e\end{cases}.$$

Notiamo innanzitutto che la funzione è continua in $x=e$ in quanto $\lim_{x\to e^+}[\ln(x)-1]=\lim_{x\to e^-}[1-\ln(x)]=0$.

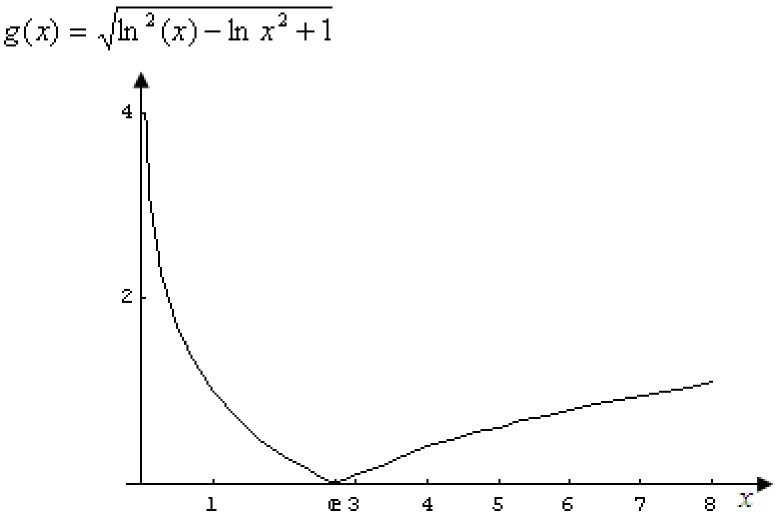
Studiamo un ramo alla volta, partendo da $g_1(x)=\ln(x)-1$ nell'intervallo $[e,+\infty)$. Tale funzione interseca l'asse delle ascisse in $(e,0)$, è positiva nel dominio $[e,+\infty)$, non presenta asintoti né verticali né orizzontali né obliqui, ed è strettamente crescente in tutto il dominio $[e,+\infty)$.

Studiamo il ramo $g_2(x)=1-\ln(x)$ nell'intervallo $(0,e)$. Tale funzione non interseca l'asse delle ascisse in quanto $x=e$ non appartiene al dominio, è positiva nel dominio $(0,e)$, presenta $x=0$ come asintoto verticale in quanto $\lim_{x\to 0^+}[1-\ln(x)]=+\infty$, non presenta asintoti orizzontali né obliqui visto il dominio limitato, ed è strettamente decrescente in tutto il dominio $(0,e)$.

Notiamo che in $x=e$ la funzione presenta un punto angoloso in quanto

$$\lim_{x\to e^+} g'(x)=\lim_{x\to e^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{e}\neq\lim_{x\to e^-} g'(x)=\lim_{x\to e^-}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{e}.$$

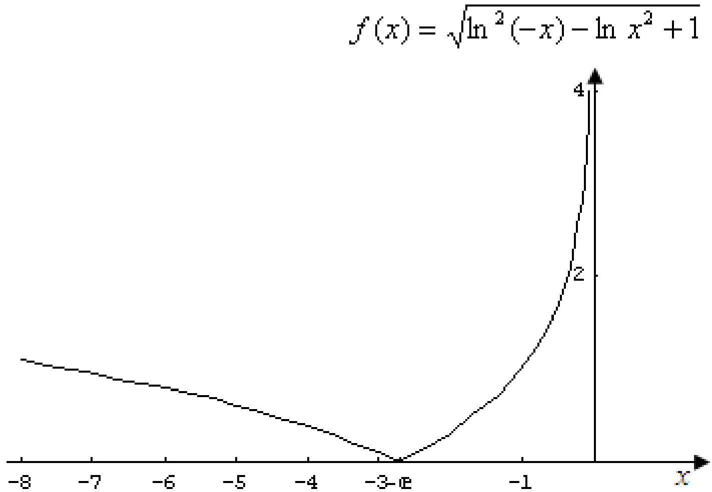
Di seguito il grafico di $g(x)=\sqrt{\ln^2(x)-\ln x^2+1}$.



Il grafico di

$$f(x)=\sqrt{\ln^2(-x)-\ln x^2+1}=\begin{cases}\ln(-x)-1 & \text{se} \quad x\le -e\\ 1-\ln(-x) & \text{se} \quad -e<x<0\end{cases}$$ si ricava

da quello soprastante per simmetria intorno all'asse delle ordinate:



Punto 3

La funzione $g(x) = \sqrt{\ln^2(x) - \ln x^2 + 1}$ è continua in tutto il dominio $D_g : x \in (0, +\infty)$ e non è derivabile in $x = e$ in cui presenta un punto angoloso in quanto

$$\lim_{x \to e^+} g'(x) = \lim_{x \to e^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \to e^-} g'(x) = \lim_{x \to e^-} \left(-\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{e}$$

Analogo ragionamento per la funzione $f(x) = \sqrt{\ln^2(-x) - \ln x^2 + 1}$ continua in tutto il dominio $D_f : x \in (-\infty, 0)$ e non è derivabile in $x = -e$ in cui presenta un punto angoloso in quanto

$$\lim_{x \to -e^+} f'(x) = \lim_{x \to -e^+} -\frac{1}{x} = \frac{1}{e} \neq \lim_{x \to -e^-} f'(x) = \lim_{x \to -e^-} \frac{1}{x} = -\frac{1}{e}.$$

Punto 4

L'area richiesta è pari a $S = \int_e^{2e} [\ln(x) - 1] dx$. Applicando l'integrazione per parti si ha:

$$S = \int_e^{2e} [\ln(x) - 1] dx = [x(\ln x - 2)]_e^{2e} = [2e(\ln 2e - 2) - e(\ln e - 2)] =$$
$$= [2e(\ln 2 + \ln e - 2) - e(\ln e - 2)] = [2e(\ln 2 + 1 - 2) - e(1 - 2)] =$$
$$= e(2\ln 2 - 1) = e(\ln 4 - 1) = e \ln\left(\frac{4}{e}\right)$$

PROBLEMA 2

Siano *f* e *g* le funzioni definite, per tutti gli *x* reali, da

$f(x)=|8x^3|$ e $g(x)=sen(\pi x)$

1. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano *Oxy*, si studino *f* e *g* e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g.

2. Si scrivano le equazioni delle rette *r* e *s* tangenti, rispettivamente, a G_f e G_g nel punto di ascissa $x=\frac{1}{2}$. Quale è la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto individuato da *r* e da *s*?

3. Si calcoli l'area della regione R racchiusa, tra G_f e G_g.

4. Si scrivano, spiegandone il perchè, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi dei solidi K e W ottenuti dalle rotazioni di R, attorno alle rette $y=0$ e $y=-1$, rispettivamente.

RISOLUZIONE

Punto 1

Studiamo la funzione $f(x)=\left|8x^3\right|$.

Il grafico della funzione $f(x)=\left|8x^3\right|$ possiamo ricavarlo da quello della funzione $h(x)=8x^3$ ribaltando verso le ordinate positive la parte di grafico al di sotto dell'asse delle ascisse. Pertanto studiamo la funzione $h(x)=8x^3$

Dominio: R;

Intersezione ascisse: $h(x)=8x^3=0 \Rightarrow x=0$

Intersezioni ordinate: $x=0 \Rightarrow h(0)=0$;

Simmetrie: la funzione è dispari in quanto $h(-x)=8(-x)^3=-8x^3=-h(x)$;

Positività: la cubica $h(x)=8x^3$ è positiva se $x>0$;

Asintoti verticali: non ve ne sono in quanto il dominio è R;

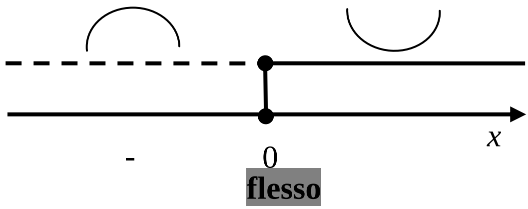
Asintoti orizzontali: $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \pm\infty$ per cui non ve ne sono;

Asintoti obliqui: non ve ne sono in quanto $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$;

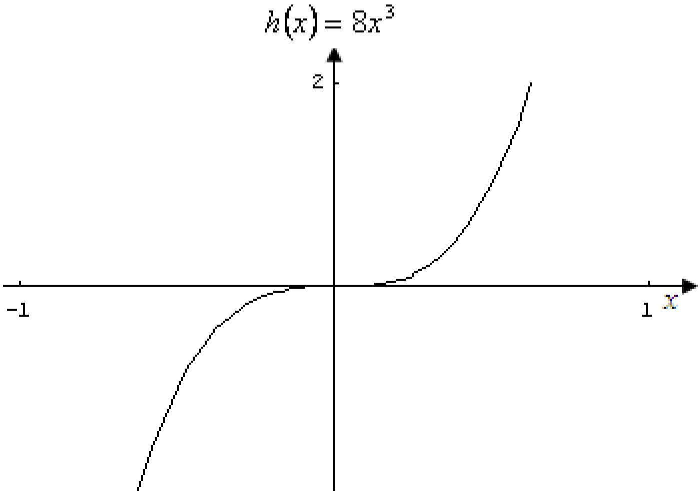
Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $h'(x) = 24x^2$ per cui all'interno del dominio la funzione è strettamente crescente e si annulla solo in $x = 0$

Concavità e convessità: $h''(x) = 48x$ per cui la funzione ha concavità verso l'alto in $(0,+\infty)$ e verso il basso in $(-\infty,0)$; poiché $h'(0) = 0, h''(0) = 0, h'''(0) = 48 > 0$ quindi $F(0,0)$ è un flesso a tangente orizzontale di equazione $y = 0$.

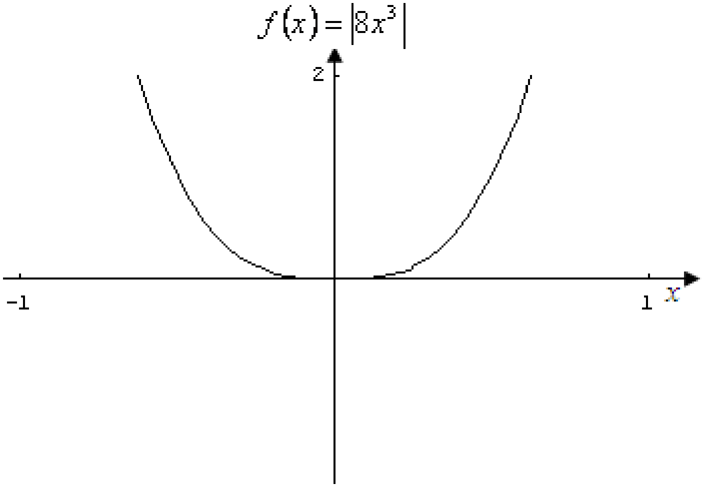
$$h''(x) > 0 \Rightarrow x > 0$$
$$h''(x) < 0 \Rightarrow x < 0$$
$$h''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$



Il grafico G_h è di seguito presentato:



Il grafico G_f, ricavato da quello di G_h, è di seguito presentato:



Studiamo la a funzione $g(x)=\sin(\pi x)$
Dominio: R;
Intersezione ascisse: $g(x)=\sin(\pi x)=0 \Rightarrow \pi x = k\pi \Rightarrow x=k, k \in Z$
Intersezioni ordinate: $x=0 \Rightarrow g(0)=0$;
Simmetrie: la funzione è dispari in quanto
$g(-x)=\sin(-\pi x)=-\sin(\pi x)=-g(x)$;
Positività: la funzione è positiva se
$2k\pi < \pi x < \pi + 2k\pi \Rightarrow 2k < x < 1+2k, k \in Z$;
Asintoti verticali: non ve ne sono in quanto la funzione è limitata;
Asintoti orizzontali: ve ne sono in quanto la funzione è limitata;
Asintoti obliqui: non ve ne sono in quanto la funzione è limitata;
Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $g'(x)=\pi\cos(\pi x)$ per cui la funzione è strettamente crescente negli intervalli in cui $\cos(\pi x)>0$ e strettamente decrescente negli intervalli in cui $\cos(\pi x)<0$.
Poiché

$$\cos(\pi x)>0 \Rightarrow 2k\pi < \pi x < \frac{\pi}{2}+2k\pi \vee \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < \pi x < 2\pi + 2k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k < x < \frac{1}{2}+2k \vee \frac{3}{2}+2k < x < 2+2k, k \in Z$$

e

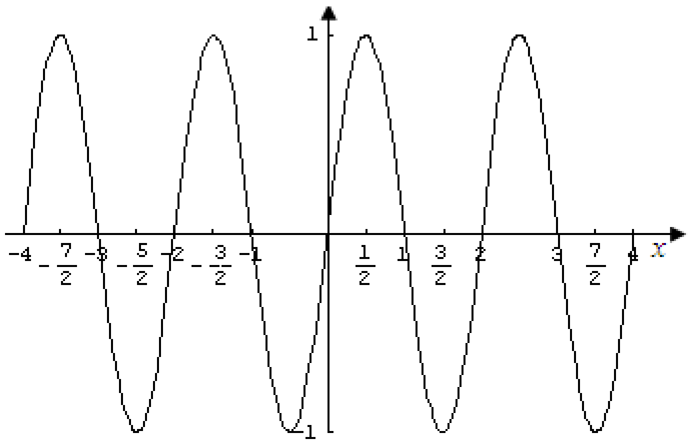
$$\cos(\pi x)<0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}+2k\pi < \pi x < \frac{3\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow \frac{1}{2}+2k < x < \frac{3}{2}+2k, k \in Z,$$

deduciamo che la funzione è strettamente crescente negli intervalli $\left(2k, \frac{1}{2}+2k\right) \cup \left(\frac{3}{2}+2k, 2+2k\right)$ con $k \in Z$ e strettamente decrescente in $\left(\frac{1}{2}+2k, \frac{3}{2}+2k\right)$ con $k \in Z$; in conclusione la funzione presenta massimi relativi in $M_k\left(\frac{1}{2}+2k,1\right)$ e minimi relativi in $m_k\left(\frac{3}{2}+2k,-1\right)$ con $k \in Z$.

Concavità e convessità: la derivata seconda è $g''(x) = -\pi^2 \sin(\pi x)$ e si annulla in $x = 2k, k \in Z$ per cui i punti $(2k,0)$ sono flessi.

Il grafico G_g è di seguito presentato:

$g(x) = \sin(\pi x)$



Punto 2

Per $x \in [0,+\infty)$ $f(x) = |8x^3| = 8x^3$. La tangente in $x = \frac{1}{2}$ alla funzione $f(x) = |8x^3|$ ha equazione $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ dove $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = \left[24x^2\right]_{x=\frac{1}{2}} = 6$ per cui l'equazione della tangente è $y = 6\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 = 6x - 2$.

La tangente in $x=\frac{1}{2}$ alla funzione $g(x)=\sin(\pi x)$ ha equazione

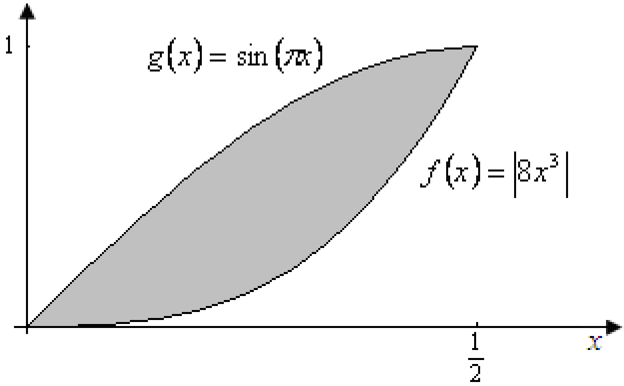
$y=g'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+g\left(\frac{1}{3}\right)$ dove $g\left(\frac{1}{2}\right)=1, g'\left(\frac{1}{2}\right)=[\pi\cos(\pi x)]_{x=\frac{1}{2}}=0$

per cui l'equazione della tangente è $y=1$. D'altronde l'ascissa $x=\frac{1}{2}$ è ascissa di massimo per cui la tangente in $x=\frac{1}{2}$ è orizzontale e pari al valore massimo che può assumere una funzione sinusoidale, cioè 1.

Date due rette di coefficienti angolari m, m', l'angolo acuto formato tra le due può essere ricavato dalla formula $\tan(\alpha)=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|$ da cui, sapendo che $m=6, m'=0$, ricaviamo $\tan(\alpha)=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|=6$ per cui $\alpha=\arctan(6)=1{,}406\text{ rad}=80°32'$

Punto 3

Le due funzioni $f(x)=\left|8x^3\right|$ e $g(x)=\sin(\pi x)$ si intersecano solamente nei punti di ascisse $x=0, x=\frac{1}{2}$. Nell'intervallo $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ la funzione $g(x)=\sin(\pi x)$ sta al di sopra di $f(x)=\left|8x^3\right|$ e in questo intervallo $f(x)=\left|8x^3\right|=8x^3$. La regione R di cui calcolare l'area è di seguito raffigurata in grigio:



L'area richiesta vale

$$S(R)=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[g(x)-f(x)\right]dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\sin(\pi x)-8x^3\right]dx=\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)-2x^4\right]_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{\pi}\right)=\frac{8-\pi}{8\pi}$$

Punto 4

Il volume del solido K ottenuto dalla rotazione della regione R attorno all'asse delle x può essere ottenuto come differenza tra il volume V_1 del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla curva $g(x)=\sin(\pi x)$, dalla retta $x=\frac{1}{2}$ e dall'asse x attorno all'asse x, e il volume V_2 del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla curva $f(x)=8x^3$, dalla retta $x=\frac{1}{2}$ e dall'asse x attorno all'asse x. Pertanto si ha:

$$V(K)=V_1-V_2=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\sin(\pi x)\right]^2dx-\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(8x^3\right)^2dx$$

Anche se ci viene richiesto di non calcolarlo, proviamo comunque a risolvere l'integrale definito soprastante:

$$V(K)=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}[\sin(\pi x)]^2dx-\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(8x^3\right)^2dx=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1-\cos(2\pi x)}{2}-64x^6\right]dx=$$

$$=\pi\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin(2\pi x)}{4\pi}-\frac{64}{7}x^7\right]_0^{\frac{1}{2}}=\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{14}\right)=\frac{5}{28}\pi$$

Il volume W del solido generato dalla rotazione della regione R attorno alla retta $y=-1$ può essere ottenuto applicando il Principio di Cavalieri, cioè immaginando il solido di rotazione come insieme delle sue sezioni con piani perpendicolari all'asse x; tali sezioni sono corone circolari di raggio interno pari a $R_{\text{int}}(x)=8x^3+1$, e raggio esterno pari a $R_{est}(x)=\sin(\pi x)+1$. Pertanto il volume richiesto è pari a

$$V(W)=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left[R_{est}^2(x)-R_{\text{int}}^2(x)\right]dx=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(\sin(\pi x)+1)^2-\left(8x^3+1\right)^2\right]dx$$

Anche se ci viene richiesto di non calcolarlo, proviamo comunque a risolvere l'integrale definito soprastante:

$$V(W)=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(\sin(\pi x)+1)^2-\left(8x^3+1\right)^2\right]dx=$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\sin^2(\pi x)-\left(8x^3\right)^2\right]dx+\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left[2\sin(\pi x)-16x^3\right]dx=$$

$$=\frac{5}{28}\pi+\pi\left[-\frac{2}{\pi}\cos(\pi x)-4x^4\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{28}\pi+\pi\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{\pi}\right)=$$

$$=2+\frac{5}{28}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{28-\pi}{14}$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Cosa rappresenta il limite seguente e qual è il suo valore?

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}$$

Calcoliamo il limite $\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}$.

Esso rappresenta il limite del rapporto incrementale $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ calcolato nel punto $x=\frac{\pi}{6}$; si tratta quindi della derivata prima della funzione $f(x)=\tan x$ calcolata in $x=\frac{\pi}{6}$. Poiché $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, il limite richiesto è pari a $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left[\frac{1}{\cos^2(x)}\right]_{x=\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\left(\sqrt{3}/2\right)^2}=\frac{4}{3}$.

Alternativamente si può calcolare il limite sfruttando l'identità $\tan\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\tan(h)\cdot\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{6}+h\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$, pertanto si ha:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(h)\cdot\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{6}+h\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(h)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{6}+h\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]}{h}=1\cdot\left[1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right]=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

in cui si è sfruttato il limite notevole $\lim_{h\to 0}\frac{\tan(h)}{h}=1$

Quesito 2

Si calcoli la derivata diciassettesima di $f(x)=\cos x$.

La derivata prima della funzione $f(x)=\cos x$ è $f'(x)=-\sin x$, la derivata seconda è $f''(x)=-\cos x$, la derivata terza $f'''(x)=\sin x$ e la derivata quarta $f^{(4)}(x)=\cos x$; di conseguenza dopo 4 derivazioni la derivata quarta coincide con la funzione di partenza. E' facile constatare che

$$f^{n}(x)=\begin{cases}-\sin x & n=1,5,9,\cdots\cdots \\ -\cos x & n=2,6,10,\cdots\cdots \\ \sin x & n=3,7,11,\cdots\cdots \\ \cos x & n=4,8,12,\cdots\cdots\end{cases}$$

cioè l'operatore di derivazione ha periodo 4. In conclusione, tenendo conto dello schema soprastante, la derivata diciassettesima coincide con la derivata prima, $f^{(17)}(x)=f'(x)=-\sin x$.

Quesito 3

Si lancino due dadi. Qual è la probabilità che uno e soltanto uno dei due numeri sia 5?

Lanciando due dadi, si possono avere 36 combinazioni, e quelle che contengono un solo 5 sono di seguito elencate: $(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(6,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6)$. In sostanza 10 combinazioni su 36 contengono un solo 5, per cui la probabilità richiesta, calcolata come rapporto tra casi favorevoli su quelli totali, è pari a $p=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

Quesito 4

Si scriva l'equazione della retta normale al grafico di $y=\sin^2 x$ nel punto di ascissa $x=\frac{\pi}{4}$.

La retta normale è la retta perpendicolare alla tangente nel punto di tangenza. La retta tangente al grafico di $f(x)=\sin^2 x$ in $\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ è

$y=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$ dove $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left[\sin 2x\right]_{x=\frac{\pi}{4}}=1$ per cui

l'equazione è $y=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$. Di conseguenza la retta normale ha equazione $y=-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$.

Quesito 5

Si mostri che, nello sviluppo di $(a+b)^n$, il coefficiente del termine $a^k b^{n-k}$ è uguale a $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

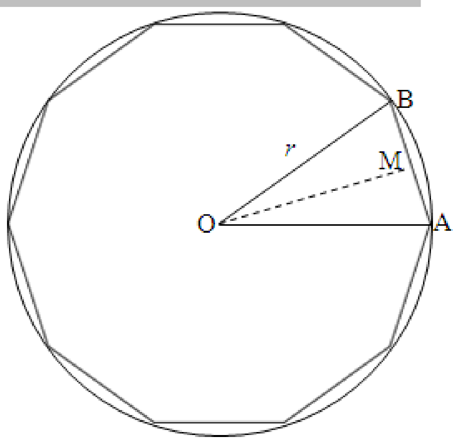
Il teorema binomiale o anche formula di Newton, esprime la potenza n-esima di un binomio qualsiasi attraverso la formula $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ da cui deduciamo che il coefficiente di $a^k b^{n-k}$ è $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Alternativamente, nello sviluppo $(a+b)^n$ il monomio $a^k b^{n-k}$ si può ottenere in molti modi, scegliendo k volte il termine *a* e n-k volte il termine *b*; ciò equivale a scrivere una parola di n lettere di cui k sono *a* e n-k sono *b*. I possibili anagrammi di una siffatta parola sono esattamente $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Quesito 6

noto che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio. Si utilizzi il risultato per calcolare $\sin\dfrac{\pi}{10}$.

Consideriamo la figuraa lato.
Sia OM l'altezza del triangolo isoscele AOB. L'angolo $A\hat{O}B = \dfrac{\pi}{5}$ in quanto $\dfrac{1}{10}$ dell'angolo giro. Il lato AB è la sezione aurea del raggio per cui

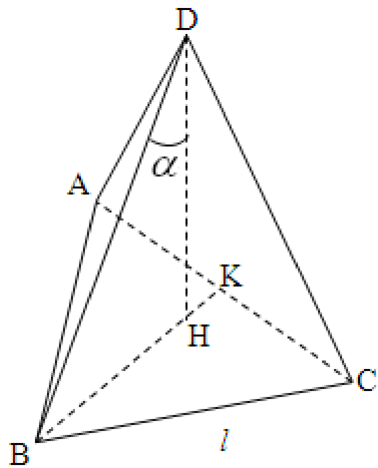


$\overline{AB} = r\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ da cui $\overline{MA} = \frac{\overline{AB}}{2} = r\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$.

Ma per il teorema dei seni $\overline{MA} = \overline{AO} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ da cui per confronto si ricava $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Quesito 7

E' dato un tetraedro regolare di spigolo *l* e altezza *h*. Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da *l* e da *h*.



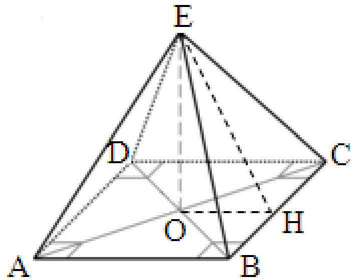
Consideriamo la figura a lato.
Per ipotesi il tetraedro è regolare, per cui è una piramide retta; il piede H dell'altezza coincide con l'incentro del triangolo equilatero ABC di base ed è anche ortocentro e baricentro. Da ciò deduciamo che il piede H divide l'altezza BK in due parti, di cui una doppia dell'altra. Poiché $\overline{BK} = l\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{BH} = \frac{2}{3}\overline{BK} = l\frac{\sqrt{3}}{3}$; il triangolo BHD è rettangolo in H e applicando il teorema dei triangoli rettangoli, deduciamo che $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ da cui

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cong 35{,}26°$$

.

Quesito 8

Fra le piramidi rette a base quadrata di assegnata superficie laterale S, si determini quella di volume massimo.



Consideriamo la figura a lato.
Indichiamo con a l'apotema e con $x>0$ il lato di base. L'altezza della piramide per il teorema di Pitagora è pari a

$h=\sqrt{a^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-\frac{x^2}{4}}$; l'apotema, è data dal rapporto della superficie laterale, nota per ipotesi, con il semiperimetro,

$a=\frac{S_l}{2x}$ per cui $h=\sqrt{\left(\frac{S_l}{2x}\right)^2-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{\frac{S_l^2-x^4}{4x^2}}$.

Poichè l'apotema a è certamente maggiore della metà del lato di base x in quanto il triangolo EOH è rettangolo in O, una ulteriore condizione da imporre sul lato di base x è $\frac{x}{2}<a=\frac{S_l}{2x}\Rightarrow x<\sqrt{S_l}$ pertanto i limiti geometrici impongono $0<x<\sqrt{S_l}$.

Il volume della piramide è pari a

$$V(x)=\frac{1}{3}S_b\cdot h=\frac{1}{3}x^2\cdot\sqrt{\frac{S_l^2-x^4}{4x^2}}=\frac{1}{6}\sqrt{S_l^2x^2-x^6}.$$

Per massimizzare il volume calcoliamo la derivata prima della funzione $V(x)=\frac{1}{6}\sqrt{S_l^2x^2-x^6}$, si ha $V'(x)=\frac{S_l^2x-3x^5}{6\sqrt{S_l^2x^2-x^6}}$ che si annulla in

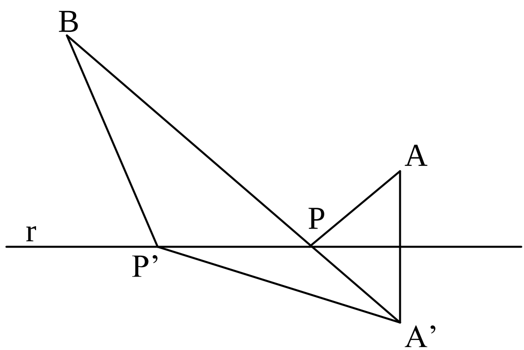
$x=0, x=\pm\sqrt[4]{\frac{S_l^2}{3}}$. Considerando la limitazione geometrica $x>0$, la funzione volume è strettamente crescente in $\left(0,\sqrt[4]{\frac{S_l^2}{3}}\right)$ e strettamente decrescente in $\left(\sqrt[4]{\frac{S_l^2}{3}},\sqrt{S_l}\right)$ per cui assume massimo in $x=\sqrt[4]{\frac{S_l^2}{3}}$ cui corrisponde il valore massimo

$$V\left(\sqrt[4]{\frac{S_l^2}{3}}\right)=\frac{1}{6}\sqrt{S_l^2\sqrt{\frac{S_l^2}{3}}-\frac{S_l^2}{3}\sqrt{\frac{S_l^2}{3}}}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{3}S_l^2\sqrt{\frac{S_l^2}{3}}}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}S_l^3}=$$

$$=\frac{S_l}{6}\sqrt[4]{\frac{4S_l^2}{27}}.$$

Quesito 9

Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto ad una retta r, ne determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r. Si risolva il problema nel modo che si preferisce.



Consideriamo la figura a lato. Sia A' il simmetrico di A rispetto ad r; il segmento A'B interseca la retta r in P in quanto A' e B si trovano in semipiani diversi rispetto alla retta r. Dimostriamo che il punto P è quello che realizza il cammino minimo tra A e B. Consideriamo un ulteriore punto P' differente da P ed appartenente alla retta r; in un triangolo la somma delle lunghezze di due lati è maggiore della lunghezza del terzo, per cui

$A'P'+P'B > A'B = A'P + PB$ da cui deduciamo che il punto P è quello che minimizza il cammino tra A e B.

Quesito 10

Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni x reale?

A) $\cos\left(\sin\left(x^2+1\right)\right)$ B) $\sin\left(\cos\left(x^2+1\right)\right)$

C) $\sin\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)$ D) $\cos\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)$

Si giustifichi la risposta.

Ragioniamo per esclusione.

La funzione $g(x) = \sin\left[\cos\left(x^2+1\right)\right]$ non può essere positiva per ogni x reale in quanto se valutata in $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}-1}$ vale

$$g\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}-1}\right) = \sin\left[\cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}-1}^{\,2}+1\right)\right] = \sin\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-1+1\right)\right] = \sin\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \sin(0) = 0$$

La funzione $h(x) = \sin\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]$ non può essere positiva per ogni x reale in quanto se valutata in $x = \sqrt{e^{\frac{3\pi}{2}}-1}$ vale

$$h\left(\sqrt{e^{\frac{3\pi}{2}}-1}\right) = \sin\left[\ln\left(\sqrt{e^{\frac{3\pi}{2}}-1}^{\,2}+1\right)\right] = \sin\left[\ln\left(e^{\frac{3\pi}{2}}-1+1\right)\right] = \sin\left(\ln e^{\frac{3\pi}{2}}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 < 0$$

La funzione $i(x) = \cos\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]$ non può essere positiva per ogni x reale in quanto se valutata in $x = \sqrt{e^{\pi}-1}$ vale

$$i\left(\sqrt{e^{\pi}-1}\right)=\cos\left[\ln\left(\sqrt{e^{\pi}-1}^{\,2}+1\right)\right]=\cos\left[\ln\left(e^{\pi}-1+1\right)\right]=\cos\left(\ln e^{\pi}\right)=$$

$$=\cos\left(\pi\right)=-1<0$$

Di conseguenza la funzione che è sempre positiva per ogni x reale è la A) $f(x)=\cos\left(\sin\left(x^2+1\right)\right)$

Alternativamente, poiché la funzione coseno è pari ed assume valori positivi per $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, poiché la funzione $\sin\left(x^2+1\right)$ assume tutti i valori compresi nell'intervallo $[-1,1]$ e poiché $[-1,1]\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, deduciamo che $f(x)=\cos\left(\sin\left(x^2+1\right)\right)$ è positiva per ogni x reale.