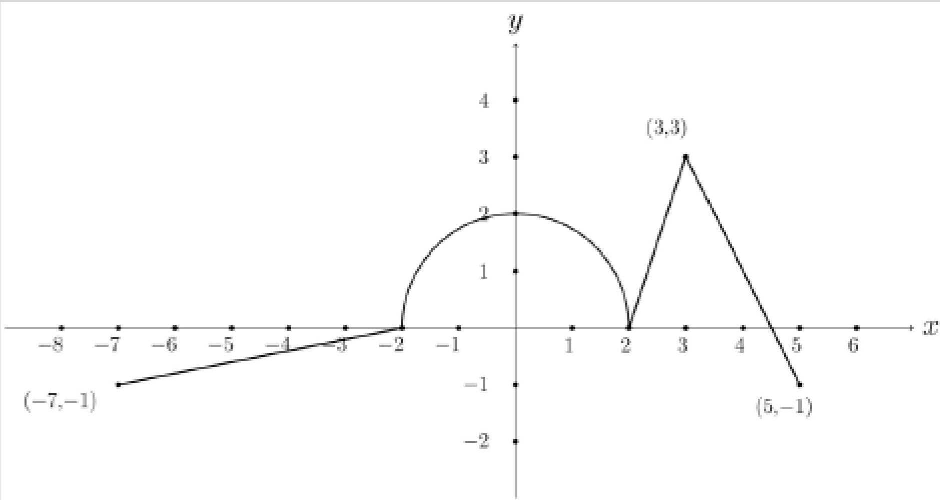
PROBLEMA1

La funzione *f* è definita e derivabile sull'intervallo chiuso $\left[-7,5\right]$ ed è $f(0)=5$. Il grafico di $y=f'(x)$, la derivata di *f*, consiste di tre segmenti e una semicirconferenza di raggio 2 e centro in O, come indicato nella figura sotto.



1. Si determinimo $f(3)$ e $f(-2)$
2. Si determinino le ascisse di ciascun punto di flesso del grafico di $y=f(x)$, illustrando il ragionamento seguito.
3. La funzione *g* è definita da $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$. Si determinino le ascisse, con $-7<x<5$, dei punti critici di *g*, specificando se si tratta di massimo, di minimo o nè l'uno nè l'altro ed esponendo il ragionamento seguito.

RISOLUZIONE

Punto 1

Possiamo scrivere la funzione $f(x)$ come

$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = 5 + \int_0^x f'(t)dt$; di conseguenza

$f(3) = 5 + \int_0^3 f'(t)dt$; l'integrale definito $\int_0^3 f'(t)dt$ rappresenta l'area sottesa dalla derivata prima nell'intervallo $[0,3]$ e risulta essere la somma dell'area di un quarto di cerchio di raggio 2 e dell'area del triangolo di cateto maggiore pari a 3 e cateto minore unitario; pertanto

$\int_0^3 f'(t)dt = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 + \frac{3 \cdot 1}{2} = \pi + \frac{3}{2}$ e

$f(3) = 5 + \int_0^3 f'(t)dt = 5 + \pi + \frac{3}{2} = \frac{13}{2} + \pi$. Analogamente

$f(-2) = 5 + \int_0^{-2} f'(t)dt = 5 - \int_{-2}^0 f'(t)dt$ e $\int_{-2}^0 f'(t)dt$ rappresenta l'area sottesa dalla derivata prima nell'intervallo $[-2,0]$ e risulta essere pari all'area di un quarto di cerchio di raggio 2, $\int_{-2}^0 f'(t)dt = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = \pi$,

pertanto $f(-2) = 5 - \int_{-2}^0 f'(t)dt = 5 - \pi$.

Punto 2

I punti di flesso vanno ricercati nei punti in cui la derivata prima cambia monotonia; dal grafico deduciamo che le ascisse di suddetti punti sono $x = 0, x = 2, x = 3$. In particolare $x = 0$ è ascissa di flesso a tangente obliqua con pendenza pari a 2 in quanto $f'(0) = 2$, mentre per $x = 2$ e

$x=3$ vanno fatte alcune considerazioni. Dal grafico della derivata prima possiamo dedurre anche la sua forma analitica:

- $x\in[-7,-2]$, la derivata prima è una la di estremi $(-7,-1)$ e $(-2,0)$ di equazione $y=\frac{x+2}{5}$;
- $x\in[-2,2]$, la derivata prima è la semicirconferenza di centro l'origine e raggio 2 nel semipiano $y\geq 0$ di equazione $y=\sqrt{4-x^2}$;
- $x\in[2,3]$, la derivata prima è la retta di estremi $(2,0)$ e $(3,3)$ di equazione $y=3(x-2)$;
- $x\in[3,5]$, la derivata prima è la retta di estremi $(3,3)$ e $(5,-1)$ di equazione $y=9-2x$.

La derivata seconda sarà quindi pari a:

$$f''(x)=\begin{cases}\frac{1}{5} & \text{se} \quad -7\leq x<-2\\ -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} & \text{se} \quad -2<x<2\\ 3 & \text{se} \quad 2<x<3\\ -2 & \text{se} \quad 3<x\leq 5\end{cases}$$

Dal prospetto soprastante notiamo subito che la derivata seconda si annulla in $x=0$, che pertanto è ascissa di flesso a tangente obliqua come precedentemente dimostrato. Calcoliamo ora i limiti destro e sinistro per $x=2$ e $x=3$:

$$\lim_{x\to 2^-} f''(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f''(x)=3$$

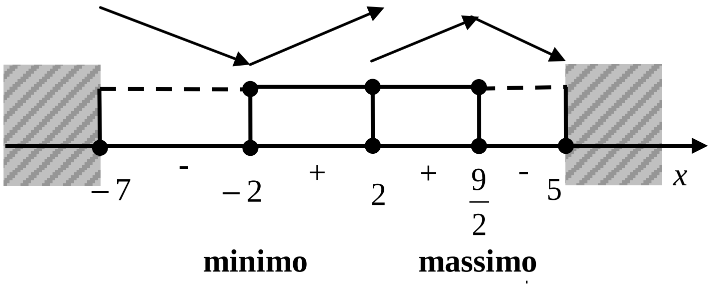
$$\lim_{x\to 3^-} f''(x)=3$$

$$\lim_{x\to 3^+} f''(x)=-2$$

Dai limiti soprastanti deduciamo che in $x=2$ la derivata seconda non è definita in quanto il limite destro è finito e pari a 3 mentre quello sinistro è $-\infty$; anche in $x=3$ la derivata seconda non è definita in quanto $x=3$ è punto angoloso per la derivata prima poichè il limite destro è pari a -2 mentre quello sinistro è pari a 3; quindi in conclusione $x=2$ e $x=3$ sono comunque ascisse di flessi della funzione in quanto in essi la derivata prima cambia monotonia, anche se la derivata seconda in essi non è definita.

Anche se non espressamente richiesto proviamo a fornire un grafico della funzione $f(x)=5+\int_0^x f'(t)dt$.

Dal grafico della derivata prima deduciamo che $f'(x)$ è negativa in $[-7,-2)\cup\left(\frac{9}{2},5\right]$ e positiva in $(-2,2)\cup\left(2,\frac{9}{2}\right)$, pertanto $x=-2$ è ascissa di minimo relativo e $x=\frac{9}{2}$ ascissa di massimo relativo, come si evince dal quadro dei segni della derivata prima a lato.

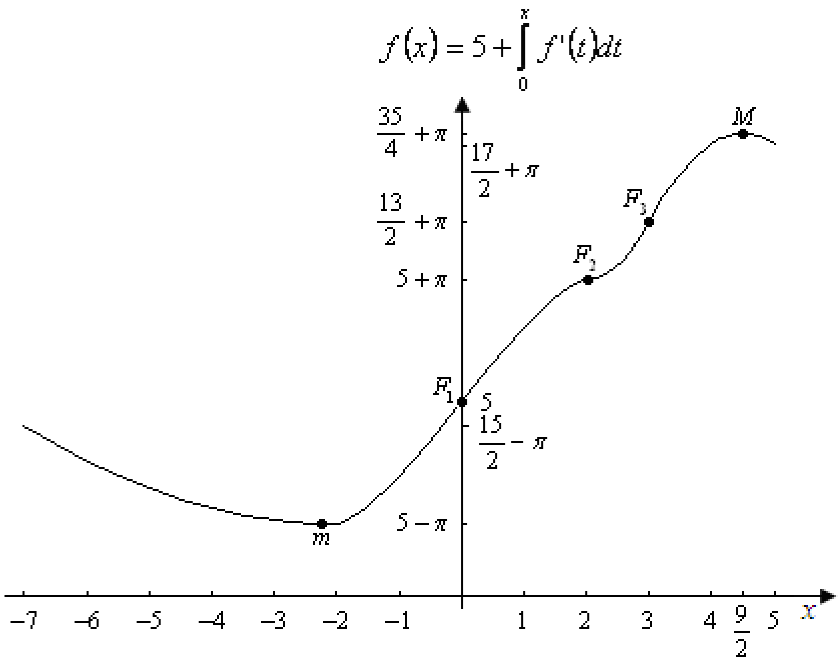


Sappiamo inoltre che essa presenta tre flessi alle ascisse $x=0, x=2, x=3$ e che in particolare $x=0$ è a tangente orizzontale e che $f(3)=\frac{13}{2}+\pi$ e $f(-2)=5-\pi$.

Calcoliamo ora il valore della funzione in alcune ascisse:

- $f(-7)=5+\int_0^{-7} f'(t)dt=5-\int_{-7}^{0} f'(t)dt$; l'integrale definito $\int_{-7}^{0} f'(t)dt$ è pari all'area di un quarto di cerchio di raggio 2 cui va sottratta l'area del triangolo rettangolo di cateti 1 e 5, pertanto $\int_{-7}^{0} f'(t)dt=\pi-\frac{5}{2}$ da cui $f(-7)=5-\int_{-7}^{0} f'(t)dt=5+\frac{5}{2}-\pi=\frac{15}{2}-\pi$;
- $f(2)=5+\int_0^{2} f'(t)dt$ dove $\int_0^{2} f'(t)dt$ è l'area di un quarto di cerchio di raggio 2 pertanto $f(2)=5+\int_0^{2} f'(t)dt=5+\pi$;
- $f\left(\frac{9}{2}\right)=5+\int_0^{2} f'(t)dt+\int_2^{\frac{9}{2}} f'(t)dt=f(2)+\int_2^{\frac{9}{2}} f'(t)dt$ dove $\int_2^{\frac{9}{2}} f'(t)dt$ è l'area del triangolo di altezza 3 e base $\frac{5}{2}$ pertanto $f\left(\frac{9}{2}\right)=f(2)+\int_2^{\frac{9}{2}} f'(t)dt=5+\pi+\frac{15}{4}=\frac{35}{4}+\pi$;
- $f(5)=f\left(\frac{9}{2}\right)+\int_{\frac{9}{2}}^{5} f'(t)dt$ dove $\int_{\frac{9}{2}}^{5} f'(t)dt$ è l'area cambiata di segno di un triangolo rettangolo di cateti 1 e $\frac{1}{2}$, pertanto $f(5)=f\left(\frac{9}{2}\right)+\int_{\frac{9}{2}}^{5} f'(t)dt=\frac{35}{4}+\pi-\frac{1}{4}=\frac{17}{2}+\pi$.

- Dai risultati soprastanti deduciamo che, poiché $f\left(\frac{9}{2}\right) > f(-7)$, il punto $M\left(\frac{9}{2}, \frac{35}{4}+\pi\right)$ è di massimo assoluto e, poiché $f(-2) < f(5)$, il punto $m(-2{,}5-\pi)$ è di minimo assoluto.
- Il grafico di $f(x) = 5 + \int_0^x f'(t)dt$ è di seguito presentato.



Punto 3

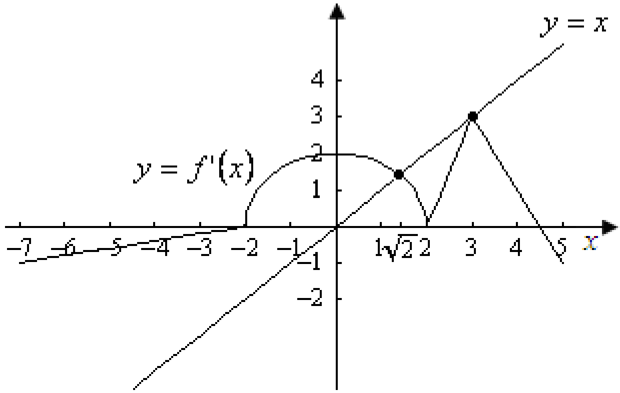
La derivata prima della funzione $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ è $g'(x) = f'(x) - x$, pertanto per trovare i punti critici di

$g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ bisogna trovare le ascisse per cui
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x$.

Vediamo quali sono le intersezioni di $f'(x)$ con la bisettrice del primo e terzo quadrante di equazione $y = x$:

- $x \in [-7,-2]$, $f'(x) = \frac{x+2}{5}$ e l'intersezione con $y = x$ fornisce la soluzione $x = \frac{1}{2}$ non accettabile in quanto non appartenente a $[-7,-2]$;
- $x \in [-2,2]$, $f'(x) = \sqrt{4 - x^2}$ e l'intersezione con $y = x$ fornisce la soluzione $x = \sqrt{2}$ accettabile in quanto appartenente a $[-2,2]$;
- $x \in [2,3]$, $f'(x) = 3(x-2)$ e l'intersezione con $y = x$ fornisce la soluzione $x = 3$ accettabile in quanto appartenente a $[2,3]$;
- $x \in [3,5]$, $f'(x) = 9 - 2x$ e l'intersezione con $y = x$ fornisce la soluzione $x = 3$ accettabile in quanto appartenente a $[3,5]$.

Pertanto l'equazione $f'(x) = x$ ha due soluzioni, $x = \sqrt{2}$ e $x = 3$.
Se mettiamo i grafici di $f'(x)$ e della bisettrice del primo e terzo quadrante di equazione $y = x$ in un unico sistema di riferimento cartesiano *Oxy*, possiamo notare i risultati sopra ottenuti.



Dal grafico soprastante notiamo che in $\left[-7,\sqrt{2}\right)$ risulta $f'(x) > x \Leftrightarrow g'(x) > 0$ mentre in $\left(\sqrt{2},3\right)\cup(3,5]$ risulta $f'(x) < x \Leftrightarrow g'(x) < 0$, pertanto $x = \sqrt{2}$ è massimo relativo per $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$, mentre $x = 3$ non è né di minimo né di massimo.

L'ordinata del massimo relativo è $g\left(\sqrt{2}\right) = f\left(\sqrt{2}\right) - 1$ dove $f\left(\sqrt{2}\right) = 5 + \int_0^{\sqrt{2}} f'(t)dt$; l'integrale definito $\int_0^{\sqrt{2}} f'(t)dt$ è pari all'area di un quarto di cerchio di raggio 2 cui va sottratta l'area del triangolo mistilineo di estremi $\left(\sqrt{2},0\right),\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right),(2,0)$; l'area del triangolo mistilineo può essere vista come la differenza tra l'area del settore circolare di raggio 2 ed apertura $\frac{\pi}{4}$ e l'area di un triangolo rettangolo isoscele di cateto $\sqrt{2}$, di conseguenza

$$\int_0^{\sqrt{2}} f'(t)dt = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2 + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 1,$$ pertanto

$f\left(\sqrt{2}\right) = 6 + \frac{\pi}{2}$ e $g\left(\sqrt{2}\right) = 5 + \frac{\pi}{2}$. Per via alternativa l'integrale definito

$\int_0^{\sqrt{2}} f'(t)dt$ può essere calcolato direttamente ricordando che

$\int \sqrt{4-t^2}\,dt = \frac{t}{2}\sqrt{4-t^2} + 2\arcsin\left(\frac{t}{2}\right) + C, C \in R$, pertanto

$f\left(\sqrt{2}\right) = \left[\frac{t}{2}\sqrt{4-t^2} + 2\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\pi}{2}$ come precedentemente calcolato.

In conclusione il massimo relativo per $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ è

$M\left(\sqrt{2}, 5 + \frac{\pi}{2}\right)$.

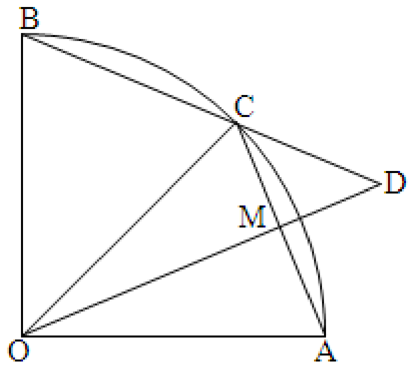
PROBLEMA 2

Si consideri l'arco AB, quarta parte di una circonferenza di centro O e raggio 1.

1. Sia C un punto di AB, M il punto medio della corda AC e D il punto di incontro delle rette
   OM e BC. Si provi che il triangolo CMD è rettangolo isoscele qualunque sia la scelta di C
   sull'arco AB, e, successivamente, si esprima in funzione di $x = AC$ il rapporto $\dfrac{CD^2}{AM^2 + OA^2}$ controllando che risulta:
   $$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 4}$$
2. Si studi la funzione $f(x)$, si tracci il suo grafico indipendentemente dai limiti geometrici e, indicato con γ il ramo appartenente al primo quadrante, si dica se esiste su γ un punto di ordinata massima e, in caso affermativo, lo si determini.
3. Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata da γ e dalla retta r, tangente al grafico di $f(x)$ nel suo punto T di ascissa 2.

RISOLUZIONE

Punto 1



Consideriamo la figura a lato.
Il triangolo AOC è isoscele su base AC in quanto AO e OC sono due raggi; se M è il punto medio di AC, il segmento OM non è altro che l'altezza del triangolo AOC, pertanto l'angolo in M è retto. Proviamo ora che CMD è anche isoscele.

Poniamo $A\hat{O}C = 2\alpha$, di conseguenza $B\hat{O}C = 90° - 2\alpha$; poiché AOC e BOC sono isosceli si ha $A\hat{O}M = M\hat{O}C = \alpha$ e $O\hat{B}C = O\hat{C}B = \frac{180° - (90° - 2\alpha)}{2} = 45° + \alpha$.

L'angolo $O\hat{C}M = 90° - \alpha$ in quanto il triangolo OMC è rettangolo, pertanto $O\hat{C}B + O\hat{C}M = (45° + \alpha) + (90° - \alpha) = 135°$ per cui $M\hat{C}D = 180° - 135° = 45°$, ed essendo CMD rettangolo, anche $M\hat{D}C = 45°$, pertanto il triangolo CMD è isoscele.

Se $\overline{AC} = x$, con $0 < x < 2$, $\overline{AM} = \overline{CM} = \frac{x}{2}$ e $\overline{CD} = \overline{CM} \cdot \sqrt{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$

pertanto $f(x) = \frac{CD^2}{AM^2 + OA^2} = \frac{\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} = \frac{2x^2}{x^2 + 4}$ come indicato dalla traccia.

Punto2

Studiamo la funzione $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+4}$.

Dominio: R;

Intersezione asse ascisse: $x=0 \Rightarrow f(0)=0$;

Intersezione asse ordinate: $f(x)=0 \Rightarrow x=0$;

Simmetrie: la funzione è pari in quanto

$$f(-x)=\frac{2(-x)^2}{(-x)^2+4}=\frac{2x^2}{x^2+4}=f(x);$$

Positività: $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+4}\geq 0 \Rightarrow \forall x \in R$;

Asintoti verticali: non ve ne sono in quanto il dominio è R;

Asintoti orizzontali: poiché $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2+4}=2$ la retta $y=2$ è asintoto orizzontale destro e sinistro;

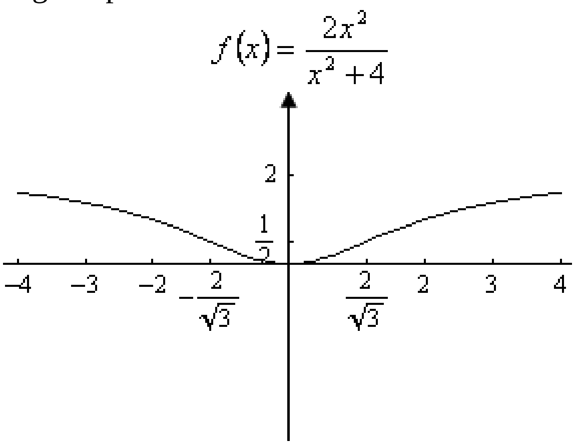
Asintoti obliqui: poichè $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+4}$ è razionale fratta, la presenza dell'asintoto orizzontale esclude la presenza di quello obliquo;

Crescenza e decrescenza: $f'(x)=\frac{16x}{(x^2+4)^2}$ per cui la derivata prima è positiva in $(0,+\infty)$ e negativa in $(-\infty,0)$, pertanto $f(x)$ è strettamente crescente in $(0,+\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty,0)$ e presenta di conseguenza un minimo relativo ed assoluto in $(0,0)$;

Concavità e convessità: $f''(x)=\frac{16(4-3x^2)}{(x^2+4)^4}$ pertanto $f(x)$ presenta concavità verso l'alto in $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ e verso il basso in

$\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ e i punti $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{1}{2}\right)$ sono due flessi a tangente obliqua con pendenza rispettivamente $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ e $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

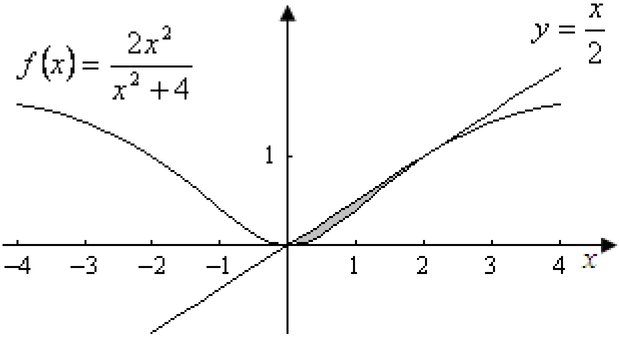
Il grafico è di seguito presentato.



Poiché la funzione è strettamente crescente in $(0,+\infty)$, sul ramo γ del primo quadrante non esiste un punto ad ordinata massima.

Punto 3

La tangente al grafico di $f(x)$ in $T(2,1)$ è $y=m(x-2)+1$ dove $m=f'(2)=\left[\frac{16x}{\left(x^2+4\right)^2}\right]_{x=2}=\frac{1}{2}$ pertanto la tangente ha equazione $y=\frac{1}{2}(x-2)+1=\frac{x}{2}$. Le intersezioni della retta tangente con $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+4}$ si ricavano risolvendo l'equazione $\frac{2x^2}{x^2+4}=\frac{x}{2}$ da cui $x^3-4x^2+4x=x(x-2)^2=0 \Rightarrow x=0 \vee x=2$. L'area richiesta è raffigurata in grigio di seguito.



Essa è pari a

$$S=\int_0^2\left(\frac{x}{2}-\frac{2x^2}{x^2+4}\right)dx=\int_0^2\left(\frac{x}{2}-2+\frac{8}{x^2+4}\right)dx=\int_0^2\left[\frac{x}{2}-2+4\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\right]dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{4}-2x+4\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2=1-4+4\arctan(1)=\pi-3$$

QUESTIONARIO

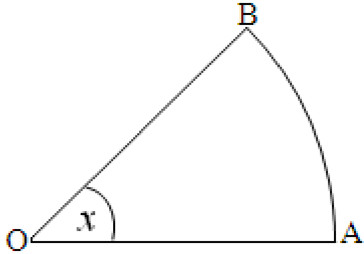
Quesito 1

Quante sono tutte le funzioni iniettive da un insieme *A* di *n* elementi in un insieme *B* di *m* elementi?

Una funzione $f : A \to B$ si dice iniettiva se soddisfa la proprietà di unicità per cui per ogni elemento *m* di *B* esiste al più un elemento *n* di *A* per il quale $m = f(n)$. Pertanto una condizione da imporre sulla cardinalità dei due insiemi è $n \le m$, in quanto se $n > m$ non possono esistere funzioni iniettive da *A* a *B*.
Siano allora $A = \{1,2,\ldots\ldots,n\}$ e $B = \{1,2,\ldots\ldots,m\}$ gli insiemi finiti standard rispettivamente con *n* ed *m* elementi e sia $f : A \to B$ una funzione iniettiva.
Il valore $f(1)$ può essere uno qualunque degli *m* elementi di *B*; il valore $f(2)$ può essere uno qualunque degli $(m-1)$ elementi di *B* in quanto, per l'iniettività di *f*, il valore $f(1)$ non può essere più assunto, pertanto le possibili scelte per i valori $f(1)$ e $f(2)$ sono $m \cdot (m-1)$. iterando il procedimento, il valore $f(n)$ può essere uno qualunque degli $(m-n+1)$ elementi di *B* in quanto, per l'iniettività di *f*, i valori $f(1), f(2),\ldots\ldots, f(n-1)$ non possono essere più assunti, pertanto le possibili scelte per i valori $f(1), f(2),\ldots\ldots, f(n-1), f(n)$ sono $m \cdot (m-1) \cdot \cdots \cdots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$ e coincidono con il numero di disposizioni semplici di *m* oggetti presi *n* alla volta, o di classe *n* e si indica con $D_{m,n}$. Nel caso in cui $n = m$, il numero delle disposizioni diventa $D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ che coincide con il numero di permtazioni degli *n* elementi.

Quesito 2

Tra tutti i settori circolari che hanno un perimetro di 100 metri, si determini quello di area massima.

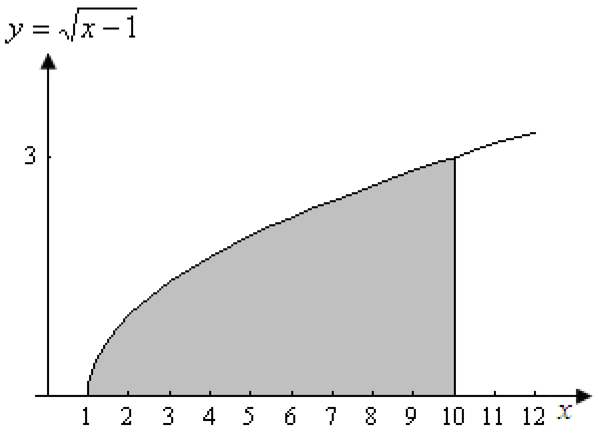


Consideriamo il settore circolare AOB a lato di raggio $\overline{AO} = \overline{OB} = r$ ed apertura x con $x \in [0,2\pi]$. Il suo perimetro è $2p(r,x) = 2r + rx$ mentre la sua area è $S(r,x) = \frac{r^2 x}{2}$

Imponendo che il perimetro sia 100 metri si ricava $2p(r,x) = 2r + rx = 100 \Rightarrow x = \frac{100-2r}{r}$, pertanto, poiché $x \in [0,2\pi]$, imponendo la disuguaglianza $0 \le \frac{100-2r}{r} \le 2\pi$ ricaviamo $0 \le \frac{100}{r} - 2 \le 2\pi \Rightarrow \frac{50}{\pi+1} \le r \le 50$. Sostituendo nella formula dell'area si ha $S(r,x) = S(r) = \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{100-2r}{r}\right) = 50r - r^2$. La funzione area è una parabola con concavità verso il basso il cui massimo è raggiunto nell'ascissa del vertice, $r_{\max} = -\frac{50}{-2} = 25\,\text{m}$, accettabile in quanto rispetta la condizione $\frac{50}{\pi+1} \le r \le 50$, cui corrisponde $x_{\max} = \frac{100-50}{25} = 2\,[rad]$ da cui $x^{\circ}_{\max} = \frac{180° \cdot x[rad]}{\pi[rad]} = \frac{360°}{\pi} = 114°35'30''$. Il valore dell'area massima è pertanto $S(25,2) = \frac{25^2 \cdot 2}{2} = 625\,\text{m}^2$.

Quesito 3

Sia R la regione del piano racchiusa tra il grafico di $y=\sqrt{x-1}$, la retta $x=10$ e l'asse *x*. Si trovi il volume del solido generato da R nella rotazione attorno alla retta $y=-1$.



La funzione $y=\sqrt{x-1}$ non è altro che l'arco di parabola di equazione $x=y^2+1$ con asse coincidente con l'asse delle ascisse e vertice in $(1,0)$ definito nel semipiano $y\geq 0$. Il volume W del solido generato dalla rotazione della regione R, a lato raffigurata, attorno alla retta $y=-1$ può essere ottenuto applicando il Principio di Cavalieri, cioè immaginando il solido di rotazione come insieme delle sue sezioni con piani perpendicolari all'asse *x*; tali sezioni sono corone circolari di raggio interno costante pari a $R_{\text{int}}=1$, e raggio esterno pari a $R_{est}(x)=\sqrt{x-1}+1$. Pertanto il volume richiesto è pari a

$$V(W)=\pi\int_1^{10}\left[R_{est}^2(x)-R_{\text{int}}^2(x)\right]dx=\pi\int_1^{10}\left[\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2-(1)^2\right]dx=$$

$$=\pi\int_1^{10}\left[\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2-(1)^2\right]dx=\pi\int_1^{10}\left(x-1+2\sqrt{x-1}\right)dx=$$

$$=\pi\left[\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{10}=\pi\left(\frac{81}{2}+36\right)=\frac{153}{2}\pi$$

Quesito 4

Si determini l'equazione della normale alla curva $y = e^{-x}$ nel suo punto di ascissa $x = \ln 4$.

La retta normale è la retta perpendicolare alla tangente nel punto di tangenza. La retta tangente al grafico di $y = e^{-x}$ in $\left(\ln 4, \frac{1}{4}\right)$ è

$y = f'(\ln 4)(x - \ln 4) + \frac{1}{4}$ dove $f'(\ln 4) = \left[-e^{-x}\right]_{x=\ln 4} = -\frac{1}{4}$ per cui

l'equazione è $y = -\frac{1}{4}(x - \ln 4) + \frac{1}{4}$. Di conseguenza la retta normale ha equazione $y = 4(x - \ln 4) + \frac{1}{4}$.

Quesito 5

Fra tutti i parallelepipedi a base quadrata con diagonale di misura d, si determini quello di volume massimo.

Il volume del parallelepipedo è dato dal prodotto delle tre dimensioni, cioè dell'area di base per l'altezza. Indichiamo con $x > 0$ il lato di base e con $y > 0$ l'altezza. Conoscendo la misura d della diagonale, l'altezza è $y = \sqrt{d^2 - 2x^2}$ da cui deduciamo l'ulteriore limitazione $x < \frac{d\sqrt{2}}{2}$ sul lato di base, pertanto il volume è $V(x) = x^2 y = x^2\sqrt{d^2 - 2x^2}$ con $0 < x < \frac{d\sqrt{2}}{2}$. La massimizzazione del volume la effettuiamo mediante derivazione. La derivata prima è

$V'(x) = 2x\sqrt{d^2 - 2x^2} + x^2 \cdot \left(\frac{-2x}{\sqrt{d^2 - 2x^2}}\right) = \frac{2x\left(d^2 - 3x^2\right)}{\sqrt{d^2 - 2x^2}}$ che risulta essere positiva in $\left(0, \frac{d\sqrt{3}}{3}\right)$ e negativa in $\left(\frac{d\sqrt{3}}{3}, \frac{d\sqrt{2}}{2}\right)$, pertanto la funzione volume è strettamente crescente in $\left(0, \frac{d\sqrt{3}}{3}\right)$ e strettamente decrescente in $\left(\frac{d\sqrt{3}}{3}, \frac{d\sqrt{2}}{2}\right)$ e presenta pertanto un massimo all'ascissa $x = \frac{d\sqrt{3}}{3}$. Notiamo che in corrispondenza di $x = \frac{d\sqrt{3}}{3}$ l'altezza del parallelepipedo è $y = \sqrt{d^2 - 2\left(\frac{d\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{d\sqrt{3}}{3}$, pertanto il parallelepipedo di volume massimo coincide con il cubo di spigolo $l = \frac{d\sqrt{3}}{3}$ e il volume massimo è pari a

$$V\left(\frac{d\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{d\sqrt{3}}{3}\right)^2 \sqrt{d^2 - 2\left(\frac{d\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \left(\frac{d\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}d^3.$$

Quesito 6

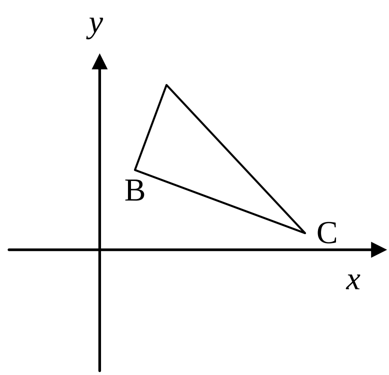
Si calcoli: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x) + 3x}{\sin(5x)}$

Ricordando i limiti fondamentali $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(mx)}{nx} = \frac{m}{n}, \lim_{x\to 0} \frac{\sin(mx)}{nx} = \frac{m}{n}$, il limite richiesto diventa $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x) + 3x}{\sin(5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\tan(3x)}{3x} + 1}{\frac{\sin(5x)}{3x}} = \frac{1+1}{\frac{5}{3}} = \frac{6}{5}$.

Quesito 7

Sia AB un segmento di lunghezza 20dm. Si determini il luogo dei punti C dello spazio tali che $A\hat{B}C$ sia retto e $B\hat{A}C$ misuri 60°.

Consideriamo la figura seguente
Il luogo appartiene sia al piano s passante per B e
perpendicolare ad AB che alla superficie conica indefinita
formata da tutte le semirette di origine A che formano con AB
 un angolo di 60°: il luogo cercato è quindi la circonferenza,
giacente nel piano s, di centro B e raggio r pari al raggio di base di un cono di semiapertura 60° e altezza 20, cioè



$r = \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \tan\left(B\hat{A}C\right) = 20 \cdot \tan(60°) = 20\sqrt{3}$; l'equazione di suddetta circonferenza è pertanto $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1200$.

Quesito 8

Quanti sono i numeri di 6 cifre che contengono: 2 volte esatte la cifra 1, 2 volte esatte la cifra 2 e non contengono la cifra 0?

Avendo fissato due cifre pari a 1 e due cifre pari a 2, le altre due cifre vanno ricercate in $\{3,4,5,6,7,8,9\}$ in quanto per ipotesi devono essere diverse da zero e non contenere 1 o 2 in quanto i numeri richiesti devono contenere solo due 1 e due 2.
I numeri aventi le altre due cifre uguali tra loro sono pari a:

$$7 \cdot \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 630 .$$

I numeri aventi le altre due cifre differenti tra loro sono pari a:

$$\binom{7}{2}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 2!}=21\cdot 180=3780.$$

In conclusione i numeri richiesti sono $630+3780=4410$.