## PROBLEMA1

Si considerino le funzioni $f$ e $g$ definite, per tutti gli $x$ reali, da:

$$f(x)=\left|27x^3\right| \qquad \text{e} \qquad g(x)=\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$$

1. Qual è il periodo della funzione $g$? Si studino $f$ e $g$ e se ne disegnino i grafici $G_f$ e $G_g$ in un conveniente sistema di riferimento cartesiano $Oxy$.
2. Si scrivano le equazioni delle rette $r$ e $s$ tangenti, rispettivamente, a $G_f$ e a $G_g$ nel punto di ascissa $x=\frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da $r$ e $s$?
3. Sia R la regione del piano delimitata da $G_f$ e $G_g$. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R, ruotando attorno all'asse $x$, genera il solido S e, ruotando attorno all'asse $y$, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perchè, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T

# RISOLUZIONE

## Punto 1

Una funzione sinusoidale di periodo $T$ può essere scritta come $\sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$; nel caso in esame la funzione $g(x)=\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ è equivalente a $g(x)=\sin\left(\frac{2}{4/3}\pi x\right)$ il cui periodo è $T=\frac{4}{3}$.

Alternativamente possiamo sfruttare la definizione di funzione periodica: una funzione è periodica di periodo $T$ se $g(x)=g(x+T)$ e nel caso in esame se $\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)=\sin\left[\frac{3}{2}\pi(x+T)\right]$; ricordando che una funzione seno è periodica di $2k\pi$ con $k\in Z$, l'equazione $\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)=\sin\left[\frac{3}{2}\pi(x+T)\right]$ equivale a imporre $\frac{3}{2}\pi(x+T)=\frac{3}{2}\pi x+2k\pi$ da cui si ricava $T=\frac{4}{3}k$; il periodo minimo lo si ricava ponendo $k=1$ ed è pari a $T=\frac{4}{3}$.

Studiamo la funzione $f(x)=\left|27x^3\right|$.

Il grafico della funzione $f(x)=\left|27x^3\right|$ possiamo ricavarlo da quello della funzione $h(x)=27x^3$ ribaltando verso le ordinate positive la parte di grafico al di sotto dell'asse delle ascisse. Pertanto studiamo la funzione $h(x)=27x^3$

*Dominio*: R;

*Intersezione ascisse:* $h(x)=27x^3=0\Rightarrow x=0$

*Intersezioni ordinate:* $x=0\Rightarrow h(0)=0$;

*Simmetrie*: la funzione è dispari in quanto $h(-x)=27(-x)^3=-27x^3=-h(x)$;

*Positività:* la cubica $h(x)=27x^3$ è positiva se $x>0$;

*Asintoti verticali:* non ve ne sono in quanto il dominio è R;

*Asintoti orizzontali*: $\lim_{x\to\pm\infty}h(x)=\pm\infty$ per cui non ve ne sono;

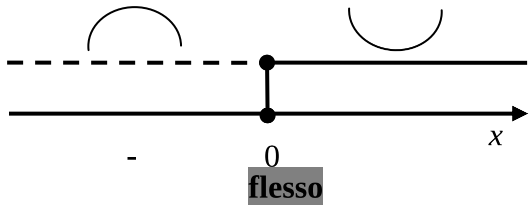
*Asintoti obliqui*: non ve ne sono in quanto $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{h(x)}{x}=+\infty$;

*Crescenza e decrescenza:* la derivata prima è $h'(x)=81x^2$ per cui all'interno del dominio la funzione è strettamente crescente e si annulla solo in $x=0$.

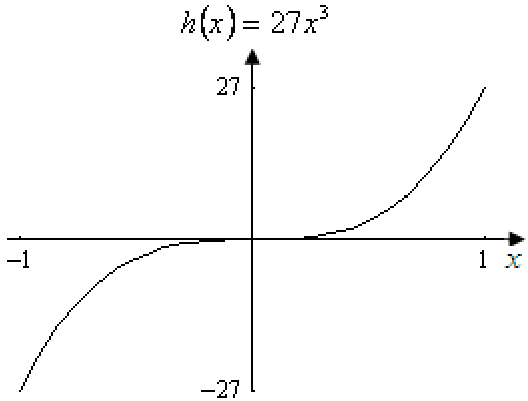
*Concavità e convessità*: $h''(x)=162x$ per cui la funzione ha concavità verso l'alto in $(0,+\infty)$ e verso il basso in $(-\infty,0)$; poichè

$h'(0)=0, h''(0)=0, h'''(0)=162>0$ quindi $F(0,0)$ è un flesso a tangente orizzontale di equazione $y=0$.

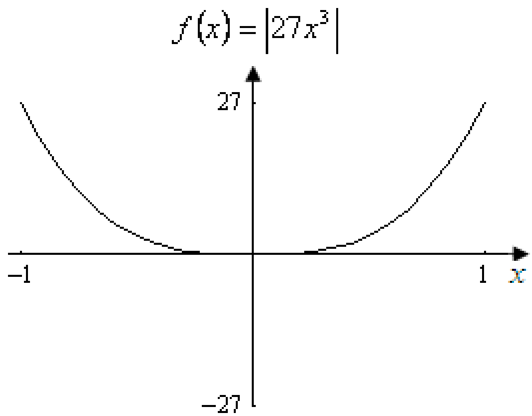
$$h''(x)>0 \Rightarrow x>0$$
$$h''(x)<0 \Rightarrow x<0$$
$$h''(x)=0 \Rightarrow x=0$$




Il grafico $G_h$ è di seguito presentato:




Il grafico $G_f$, ricavato da quello di $G_h$, è di seguito presentato:



Studiamo la a funzione $g(x)=\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$

*Dominio*: R;
*Intersezione ascisse*:
$g(x)=\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)=0 \Rightarrow \frac{3}{2}\pi x=k\pi \Rightarrow x=\frac{2}{3}k, k\in Z$
*Intersezioni ordinate*: $x=0 \Rightarrow g(0)=0$ ;
*Simmetrie*: la funzione è dispari in quanto $g(-x)=\sin\left(-\frac{3}{2}\pi x\right)=-\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)=-g(x)$ ;
*Positività*: la funzione è positiva se $2k\pi<\frac{3}{2}\pi x<\pi+2k\pi \Rightarrow \frac{4}{3}k<x<\frac{2}{3}+\frac{4}{3}k, k\in Z$ ;
*Asintoti verticali*: non ve ne sono in quanto la funzione è limitata;
*Asintoti orizzontali*: ve ne sono in quanto la funzione è limitata;
*Asintoti obliqui*: non ve ne sono in quanto la funzione è limitata;

*Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $g'(x)=\frac{3}{2}\pi\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ per cui la funzione è strettamente crescente negli intervalli in cui $\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right)>0$ e strettamente decrescente negli intervalli in cui $\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right)<0$.

Poiché

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) > 0 \Rightarrow 2k\pi < \frac{3}{2}\pi x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < \frac{3}{2}\pi x < 2\pi + 2k\pi \Rightarrow$$

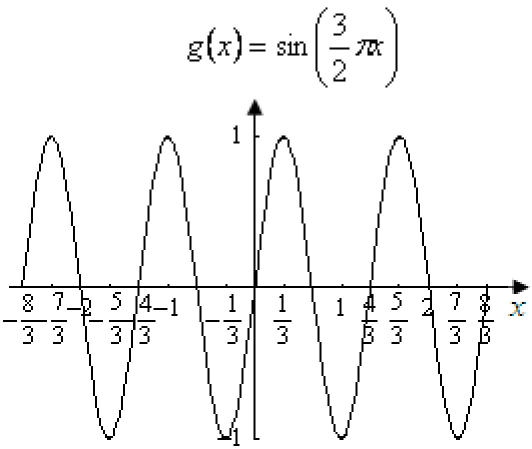
$$\Rightarrow \frac{4}{3}k < x < \frac{1}{3} + \frac{4}{3}k \vee 1 + \frac{4}{3}k < x < \frac{4}{3} + \frac{4}{3}k, k \in Z$$

e

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{3}{2}\pi x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{4}{3}k < x < 1 + \frac{4}{3}k, k \in Z$$

deduciamo che la funzione è strettamente crescente negli intervalli $\left(\frac{4}{3}k, \frac{1}{3} + \frac{4}{3}k\right) \cup \left(1 + \frac{4}{3}k, \frac{4}{3} + \frac{4}{3}k\right)$ con $k \in Z$ e strettamente decrescente in $\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}k, 1 + \frac{4}{3}k\right)$ con $k \in Z$; in conclusione la funzione presenta massimi relativi in $M_k\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}k, 1\right)$ e minimi relativi in $m_k\left(1 + \frac{4}{3}k, -1\right)$ con $k \in Z$.

*Concavità e convessità*: la derivata seconda è $g''(x) = -\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ e si annulla in $x = \frac{2}{3}k, k \in Z$ per cui i punti $\left(\frac{2}{3}k, 0\right)$ sono flessi.



# Punto 2

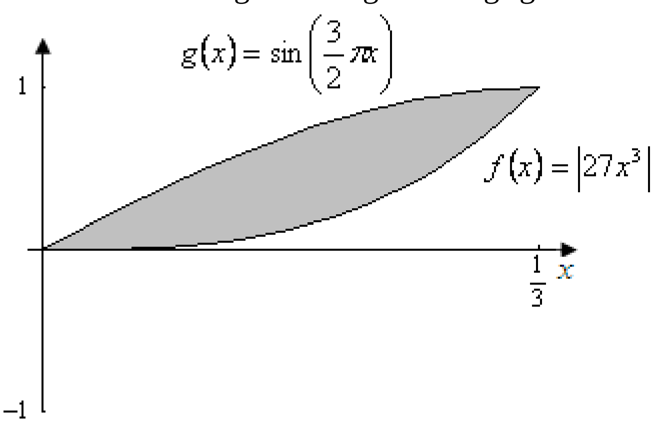
Per $x \in [0,+\infty)$ $f(x)=\left|27x^3\right| = 27x^3$. La tangente in $x=\frac{1}{3}$ alla funzione $f(x)=\left|27x^3\right|$ ha equazione $y = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$ dove $f\left(\frac{1}{3}\right)=1,\ f'\left(\frac{1}{3}\right)=\left[81x^2\right]_{x=\frac{1}{3}}=9$ per cui l'equazione della tangente è $y=9\left(x-\frac{1}{3}\right)+1=9x-2$.

La tangente in $x=\frac{1}{3}$ alla funzione $g(x)=\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ ha equazione $y=g'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+g\left(\frac{1}{3}\right)$ dove $g\left(\frac{1}{3}\right)=1, g'\left(\frac{1}{3}\right)=\left[\frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right)\right]_{x=\frac{1}{3}}=0$ per cui l'equazione della tangente è $y=1$. D'altronde l'ascissa $x=\frac{1}{3}$ è ascissa di massimo per cui la tangente in $x=\frac{1}{3}$ è orizzontale e pari al valore massimo che può assumere una funzione sinusoidale, cioè 1.

Date due rette di coefficienti angolari $m,m'$, l'angolo acuto formato tra le due può essere ricavato dalla formula $\tan(\alpha)=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|$ da cui, sapendo che $m=9, m'=0$, ricaviamo $\tan(\alpha)=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|=9$ per cui $\alpha=\arctan(9)=1{,}46\ \text{rad}=83°40'$

## Punto 3

Le due funzioni $f(x)=\left|27x^3\right|$ e $g(x)=\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ si intersecano solamente nei punti di ascisse $x=0, x=\frac{1}{3}$. Nell'intervallo $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ la funzione $g(x)=\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ sta al di sopra di $f(x)=\left|27x^3\right|$ e in questo intervallo $f(x)=\left|27x^3\right|=27x^3$. La regione R di cui calcolare l'area è di seguito raffigurata in grigio:




L'area richiesta vale

$$S(R)=\int_0^{\frac{1}{3}}[g(x)-f(x)]dx=\int_0^{\frac{1}{3}}\left[\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)-27x^3\right]dx=$$

$$=\left[-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right)-\frac{27x^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{3}}=\left(-\frac{1}{12}+\frac{2}{3\pi}\right)=\frac{8-\pi}{12\pi}$$

## Punto 4

Il volume S del solido generato dalla rotazione della regione R attorno all'asse delle *x* può essere ottenuto come differenza tra il volume $V_1$ del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla curva $g(x) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$, dalla retta $x = \frac{1}{3}$ e dall'asse *x* attorno all'asse *x*, e il volume $V_2$ del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla curva $f(x) = 27x^3$, dalla retta $x = \frac{1}{3}$ e dall'asse *x* attorno all'asse *x* . Pertanto si ha:

$$V(S) = V_1 - V_2 = \pi\int_0^{\frac{1}{3}}\left[\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)\right]^2 dx - \pi\int_0^{\frac{1}{3}}\left(27x^3\right)^2 dx$$

Anche se ci viene richiesto di non calcolarlo, proviamo comunque a risolvere l'integrale definito soprastante:

$$V(S) = \pi\int_0^{\frac{1}{3}}\left[\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)\right]^2 dx - \pi\int_0^{\frac{1}{3}}\left(27x^3\right)^2 dx = \pi\int_0^{\frac{1}{3}}\left[\frac{1-\cos(3\pi x)}{2} - 729x^6\right]dx =$$

$$= \pi\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(3\pi x)}{6\pi} - \frac{729}{7}x^7\right]_0^{\frac{1}{3}} = \pi\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{21}\right) = \frac{5}{42}\pi$$

Il volume T del solido generato dalla rotazione della regione R attorno all'asse delle *y* può essere ottenuto come differenza tra il volume $V_3$ del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla curva $f^{-1}(y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3}$, dalla retta $y = 1$ e dall'asse *y* attorno all'asse *y*, e il volume $V_4$ del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla curva $g^{-1}(y) = \frac{2\arcsin(y)}{3\pi}$ , dalla retta $y = 1$ e dall'asse *y* attorno all'asse *y* . Pertanto si ha:

$$V(T)=V_3-V_4=\pi\int_0^1\left(\frac{\sqrt[3]{y}}{3}\right)^2 dy-\pi\int_0^1\left[\frac{2\arcsin(y)}{3\pi}\right]^2 dy$$

Anche se ci viene richiesto di non calcolarlo, proviamo comunque a risolvere l'integrale definito soprastante iniziando a calcolare

$\pi\int_0^1\left(\frac{\sqrt[3]{y}}{3}\right)^2 dy$; esso è pari a

$$\pi\int_0^1\left(\frac{\sqrt[3]{y}}{3}\right)^2 dy=\pi\int_0^1\left(\frac{y^{\frac{2}{3}}}{9}\right)dy=\frac{\pi}{9}\cdot\frac{3}{5}\cdot\left[y^{\frac{5}{3}}\right]_0^1=\frac{\pi}{15};$$

applicando l'integrazione per parti si ha

$$\pi\int_0^1\left[\frac{2\arcsin(y)}{3\pi}\right]^2 dy=\frac{4}{9\pi}\int_0^1\arcsin^2(y)dy=$$

$$=\frac{4}{9\pi}\left[2\sqrt{1-y^2}\arcsin(y)-2y+y\arcsin^2(y)\right]_0^1=$$

$$=\frac{4}{9\pi}\left[\left(-2+\frac{\pi^2}{4}\right)\right]=\frac{\pi^2-8}{9\pi}$$

In conclusione

$$V(T)=V_3-V_4=\pi\int_0^1\left(\frac{\sqrt[3]{y}}{3}\right)^2 dy-\pi\int_0^1\left[\frac{2\arcsin(y)}{3\pi}\right]^2 dy=\frac{\pi}{15}-\frac{\pi^2-8}{9\pi}=$$

$$=\frac{40-2\pi^2}{45\pi}$$

Alternativamente, il calcolo del volume $V(T)$ può essere effettuato attraverso l'applicazione del metodo dei gusci cilindrici. Il solido generato dalla rotazione attorno all'asse $y$ di una regione piana può essere visto come somma di tanti "gusci cilindrici", cioè cilindri cavi di raggio interno $x$, raggio esterno $x+\Delta x$ ed altezza $f(x)$. Consideriamo il volume finito $\Delta V$ di un "guscio" come volume infinitesimo $dV$ , quindi trattiamo $\Delta x$ come infinitesimo dx ; esso può essere espresso nella forma:

$$dV = \pi\left[(x+dx)^2 - x^2\right]\cdot f(x) = 2\pi\cdot x\cdot dx\cdot f(x) - \pi\cdot(dx)^2\cdot f(x)$$

Poiché $(dx)^2$ è un infinitesimo di ordine superiore a $dx$, allora il termine $\pi\cdot(dx)^2\cdot f(x)$ è trascurabile rispetto a $2\pi\cdot x\cdot dx\cdot f(x)$, pertanto

$$dV = \pi\left[(x+dx)^2 - x^2\right]\cdot f(x) \cong 2\pi\cdot x\cdot dx\cdot f(x)$$

Il volume del solido dovuto alla rotazione intorno all'asse delle ordinate, pensato come somma di tanti volumetti $dV$ relativi all'intervallo di ascisse $[a,b]$, è pertanto pari a $V = \int_a^b dV = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$.

Se la regione da ruotare è delimitata da due funzioni, $f(x)$ e $g(x)$ con $g(x) \geq f(x)$ il volume solido dovuto alla rotazione intorno all'asse delle ordinate sarà pari a $V = 2\pi\int_a^b x[g(x) - f(x)]dx$.

Nel caso in esame il volume richiesto sarà pari a

$$V(T) = 2\pi\int_0^{\frac{1}{3}} x\left[\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 27x^3\right]dx = 2\pi\int_0^{\frac{1}{3}}\left[x\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 27x^4\right]dx$$

Applicando l'integrazione per parti l'integrale $\int x\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)dx$ è pari a:

$$\int x\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)dx = -\frac{2}{3\pi}x\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) + \frac{2}{3\pi}\int\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right)dx =$$

$$= -\frac{2}{3\pi}x\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) + \frac{4}{9\pi^2}\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right) + C, C \in R$$

In conclusione l'integrale indefinito sarà

$$V(T)=2\pi\int_0^{\frac{1}{3}}\left[x\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)-27x^4\right]dx=$$

$$=2\pi\left[-\frac{2}{3\pi}x\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right)+\frac{4}{9\pi^2}\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)-\frac{27}{5}x^5\right]_0^{\frac{1}{3}}=$$

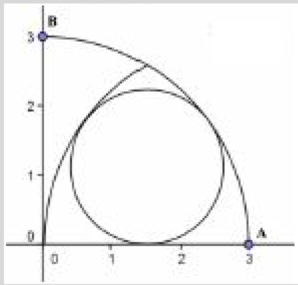
$$=2\pi\left(\frac{4}{9\pi^2}-\frac{1}{45}\right)=\frac{40-2\pi^2}{45\pi}$$

come già precedentemente trovato.

# PROBLEMA2

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy sono assegnati l'arco di circonferenza di centro O e estremi A(3,0) e B(0,3) e l'arco L di parabola d'equazione $x^2 = 9 - 6y$ i cui estremi sono il punto A e il punto (0,3/2).

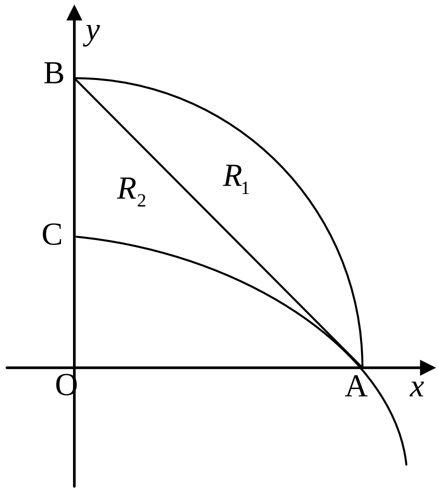
1. Sia *r* la retta tangente in A a L. Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui *r* divide la regione R racchiusa tra L e l'arco AB.
2. La regione R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse *x*, hanno, per ogni $0 \le x \le 3$, area $S(x) = e^{5-3x}$. Si determini il volume di W.
3. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse *x*.
4. Si provi che l'arco L è il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco AB e all'asse *x*. Infine, tra le circonferenze di cui L è il luogo dei centri si determini quella che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3, come nella figura a lato.




## RISOLUZIONE

## Punto 1

Consideriamo la seguente figura.




Indichiamo con $C\left(0,\frac{3}{2}\right)$ l'intersezione dell'arco di parabola L con l'asse delle ordinate.

La retta tangente ad L in A(3,0) ha equazione $y = m(x-3)$ con

$$m = \left.\frac{d\left(\frac{3}{2}-\frac{x^2}{6}\right)}{dx}\right|_{x=3} = -\left.\frac{x}{3}\right|_{x=3} -1$$ per cui essa ha equazione $y = -x+3$

L'area del quarto di cerchio di raggio 3 è $S(O\widehat{A}B) = \frac{1}{4}\pi \cdot 3^2 = \frac{9\pi}{4}$; l'area del triangolo OAB è $S(OAB) = \frac{9}{2}$, per cui l'area $R_1$ è

$$S(R_1) = S(O\widehat{A}B) - S(OAB) = \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{4}(\pi - 2)$$

L'area sottesa dall'arco di parabola è $S\left(O\widehat{A}C\right)=\int_0^3\left(\frac{3}{2}-\frac{x^2}{6}\right)dx=\left[\frac{3}{2}x-\frac{x^3}{18}\right]_0^3=\frac{9}{2}-\frac{27}{18}=3$ per cui $S(R_2)=S(OAB)-S\left(O\widehat{A}C\right)=\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$.

## Punto 2

Il volume richiesto è pari a

$$V(W)=\int_0^3 S(x)dx=\int_0^3 e^{5-3x}dx=\left[-\frac{e^{5-3x}}{3}\right]_0^3=\frac{e^5-e^{-4}}{3}.$$

## Punto 3

Il volume richiesto è dato dalla differenza tra il volume di una semisfera di raggio 3 e il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse *x* della regione compresa tra L e l'asse *x*.

Il volume della semisfera è $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{4}{3}\cdot 3^3=18\pi$ mentre il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse *x* della regione compresa tra L e l'asse *x* è pari a

$$\pi\int_0^3\left(\frac{3}{2}-\frac{x^2}{6}\right)^2dx=\pi\left[\frac{x^5}{180}-\frac{x^3}{6}+\frac{9}{4}x\right]_0^3=\pi\left(\frac{243}{180}-\frac{27}{6}+\frac{27}{4}\right)=\frac{18}{5}\pi,$$

pertanto il volume richiesto è pari a $V(R)=18\pi-\frac{18}{5}\pi=\frac{72}{5}\pi$.

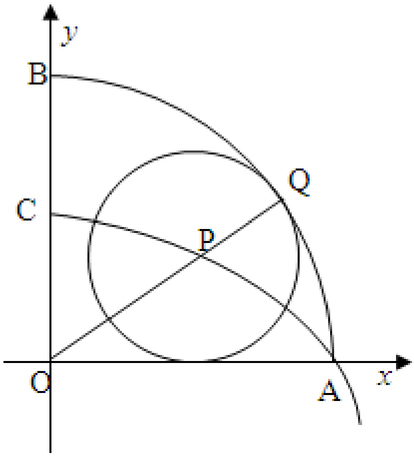
Alternativamente il volume richiesto, ricordando che nel primo quadrante l'arco di circonferenza di centro O e estremi A(3,0) e B(0,3) ha equazione $y=\sqrt{9-x^2}$, può essere calcolato nel seguente modo:

$$V(R)=\pi\int_0^3\left[\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}-\frac{x^2}{6}\right)^2\right]dx=\pi\int_0^3\left(9-x^2\right)dx-\pi\int_0^3\left(\frac{3}{2}-\frac{x^2}{6}\right)^2dx=$$

$$=\pi\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_0^3-\pi\left[\frac{x^5}{180}-\frac{x^3}{6}+\frac{9}{4}x\right]_0^3=18\pi-\frac{18}{5}\pi=\frac{72}{5}\pi$$

## Punto 4

Consideriamo la figura seguente.

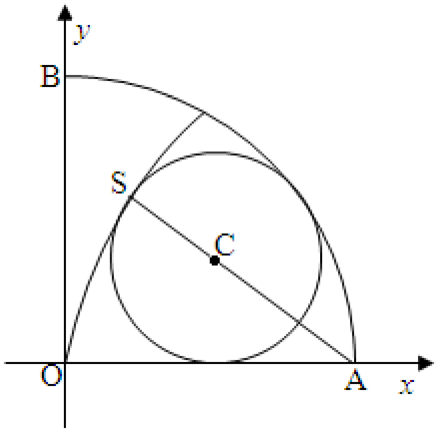



Sia $P(x,y)$ con $0<x<3, 0<y<3$, il generico punto del luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco AB e all'asse *x*. Una circonferenza di centro $P(x,y)$ è tangente all'arco AB se $\overline{OP}+\overline{PQ}=\overline{OQ}$ dove $\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}, \overline{PQ}=y, \overline{OQ}=3$ e quindi se $\sqrt{x^2+y^2}+y=3 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=3-y$. Posto $y\le 3$, condizione verificata dalla limitazione geometrica imposta sull'ordinata del punto P, elevando al quadrato si ha:

$$x^2+y^2=(3-y)^2 \Rightarrow x^2+y^2=9+y^2-6y \Rightarrow x^2=9-6y$$

che con le condizioni $0 < x < 3, 0 < y < 3,$ coincide con l'equazione di L.

Consideriamo la figura seguente e cerchiamo la circonferenza, di cui L è il luogo dei centri, che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3.




Indicando con $C\left(x, -\frac{x^2}{6}+\frac{3}{2}\right)$ con $0 < x < 3$ ed $R$ rispettivamente il centro ed il raggio della circonferenza richiesta, e con S il punto di tangenza di quest'ultima con la circonferenza con centro in A e raggio 3, deve aversi $\overline{AC} = \overline{AS} - R$, dove

$$\overline{AC} = \sqrt{(3-x)^2 + \left(-\frac{x^2}{6}+\frac{3}{2}\right)^2}, \overline{AS} = 3, R = \left(-\frac{x^2}{6}+\frac{3}{2}\right).$$

Imponendo l'uguaglianza si ha:

$$\overline{AC} = \overline{AS} - 3 \Rightarrow \sqrt{(3-x)^2 + \left(-\frac{x^2}{6}+\frac{3}{2}\right)^2} = 3 - \left(-\frac{x^2}{6}+\frac{3}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(3-x)^2 + \left(-\frac{x^2}{6}+\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{x^2}{6}+\frac{3}{2},$$

e poichè $\frac{x^2}{6}+\frac{3}{2}$ è sempre positivo, elevando al quadrato si ha:

$$(3-x)^2+\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{x^2}{6}+\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-6x+9+\frac{x^4}{36}-\frac{x^2}{2}+\frac{9}{4}=\frac{x^4}{36}+\frac{x^2}{2}+\frac{9}{4}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x=9\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

Quindi il centro della circonferenza è $C\left(\frac{3}{2},\frac{9}{8}\right)$, il raggio è $R=\frac{9}{8}$; di conseguenza la sua equazione è

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{8}\right)^2=\frac{81}{64}\Rightarrow x^2+y^2-3x-\frac{9}{4}y+\frac{9}{4}=0.$$

# QUESTIONARIO

## Quesito 1

Cosa rappresenta il limite seguente e qual è il suo valore?

$$\lim_{h\to 0}\frac{5\left(\frac{1}{2}+h\right)^4-5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}$$

Calcoliamo il limite $\lim_{h\to 0}\frac{5\left(\frac{1}{2}+h\right)^4-5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}$. Esso rappresenta il limite del rapporto incrementale $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ calcolato nel punto $x=\frac{1}{2}$; si tratta quindi della derivata prima della funzione $f(x)=5x^4$ calcolata in $x=\frac{1}{2}$. Poiché $f'(x)=20x^3$, il limite richiesto è pari a

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{2}$.

Alternativamente possiamo calcolare direttamente il limite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{5\left(\frac{1}{2}+h\right)^4-5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5\left[\left(\frac{1}{2}+h\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1}{2}+h\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5\left(h^2+h+\frac{1}{2}\right)\left(h^2+h\right)}{h}=5\cdot\lim_{h\to 0}\left(h^2+h+\frac{1}{2}\right)(h+1)=\frac{5}{2}$$

ritrovando il risultato precedentemente calcolato.

## Quesito 2

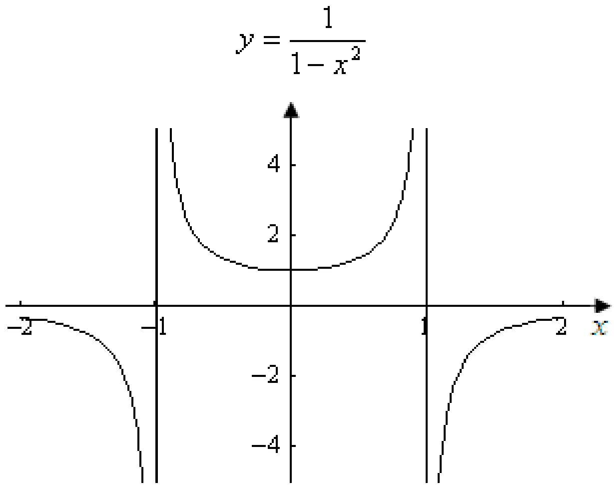
Si illustri il significato di *asintoto* e si fornisca un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

Si dice che la funzione $y = f(x)$ ammette la retta *r* come asintoto se la distanza del generico punto P della curva dalla retta *r* tende a zero quando l'ascissa di P, o l'ordinata di P, o entrambe tendono all'infinito. Distinguiamo tre tipi di asintoti, verticale, orizzontale ed obliquo.

La retta *r* è asintoto verticale ed ha equazione $x = a, a \in R$ se $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$; in particolare l'asintoto verticale è destro se $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ e sinistro se $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$. Notiamo che in generale possono esistere sia l'asintoto verticale destro che sinistro, solo uno dei due o nessuno dei due.
La retta *r* è asintoto orizzontale ed ha equazione $y = b, b \in R$ se $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$; in particolare l'asintoto orizzontale è destro se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ e sinistro se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$. Notiamo che in generale possono esistere sia l'asintoto orizzontale destro che sinistro ed essere differenti, solo uno dei due o nessuno dei due.
La retta *r* è asintoto verticale ed ha equazione $y = mx + q, m, q \in R, m \neq 0$ se $m = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right], q = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx\right]$; in particolare l'asintoto obliquo è destro se $m = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right], q = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - mx\right]$ e sinistro se $m = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right], q = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - mx\right]$.

Notiamo che in generale possono esistere sia l'asintoto obliquo destro che sinistro ed essere differenti, solo uno dei due o nessuno dei due.

Un esempio di funzione con due asintoti verticali ed uno orizzontale è $y = \frac{1}{1-x^2}$; nel caso in esame $x = \pm 1$ sono gli asintoti verticali e $y = 0$ quello orizzontale come a lato mostrato.




## Quesito 3

La posizione di una particella è data da $s(t) = 20\left(2e^{-\frac{t}{2}} + t - 2\right)$. Qual è la sua accelerazione al tempo $t = 4$?

La velocità è la derivata prima della posizione, mentre l'accelerazione è la derivata prima della velocità e quindi la derivata seconda della posizione. Nel caso in esame si ha:

$$v(t) = s'(t) = 20\left(-e^{-\frac{t}{2}} + 1\right)$$

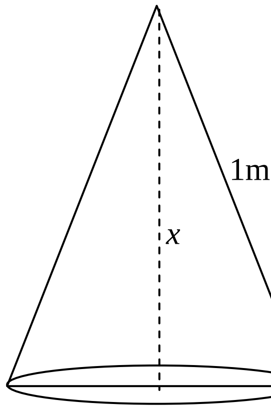
$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 10e^{-\frac{t}{2}}$$

Pertanto l'accelerazione al tempo $t = 4$ è pari a $a(4) = 10e^{-2}$.

## Quesito 4

Quale è la capacità massima, in litri, di un cono di apotema 1 metro?

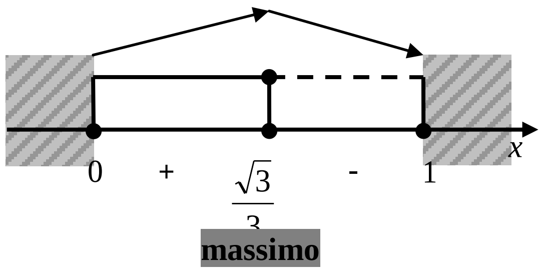
Indichiamo con $0 < x < 1$ l'altezza del cono, di conseguenza il raggio di base è per il teorema di Pitagora $R = \sqrt{1-x^2}$ . Il volume del cono è pari a $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$ e cioè $V(x) = \frac{\pi}{3} x(1-x^2)$; la massimizzazione del volume equivale alla massimizzazione della funzione $f(x) = x(1-x^2)$ la cui derivata prima è $f'(x) = 1-3x^2$ cui corrisponde il seguente quadro dei segni:




$$V'(x) > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$V'(x) < 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} < x < 1$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$




Dal quadro dei segni deduciamo che la funzione è strettamente crescente in $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e strettamente decrescente in $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ , pertanto il massimo è raggiunto per $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ cui corrisponde

$V\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\pi\sqrt{3}}{27}\,\text{m}^3$. Ricordando che $1\,\text{dm}^3=1\,\text{l}$ si il volume massimo espresso in litri è $V\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2000\pi\sqrt{3}}{27}\,\text{litri}\cong 403\,\text{litri}$

## Quesito 5

Siano dati nello spazio $n$ punti $P_1,P_2,P_3,\ldots,P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?

Il numero di segmenti è pari al numero delle combinazioni di n oggetti di classe 2 e quindi è dato da: $\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$;

analogamente il numero di triangoli è

$\binom{n}{3}=\frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}$ e di tetraedri

$$\binom{n}{4}=\frac{n!}{4!\cdot(n-4)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{24}$$

## Quesito 6

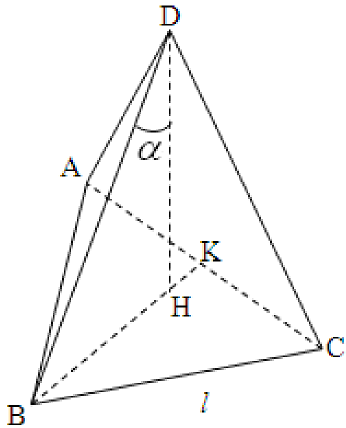
Sia $f(x)=5\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x-\frac{5}{2}\sin 2x-\cos 2x-17$; si calcoli $f'(x)$

Osserviamo che, per la formula di duplicazione del seno si ha $5\sin x\cos x=\frac{5}{2}\sin 2x$ e per la formula di duplicazione del coseno si ha

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, pertanto la funzione di partenza diventa una costante $f(x) = -17$, la cui derivata è nulla.

## Quesito 7

È dato un tetraedro regolare di spigolo *l* e altezza *h*. Si determini l'ampiezza dell'angolo $\alpha$ formato da *l* e da *h*.




Consideriamo la figura a lato.

Per ipotesi il tetraedro è regolare, per cui è una piramide retta; il piede H dell'altezza coincide con l'incentro del triangolo equilatero ABC di base ed è anche ortocentro e baricentro. Da ciò deduciamo che il piede H divide l'altezza BK in due parti, di cui una doppia dell'altra. Poiché $\overline{BK} = l\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{BH} = \frac{2}{3}\overline{BK} = l\frac{\sqrt{3}}{3}$; il triangolo BHD è rettangolo in H e applicando il teorema dei triangoli rettangoli, deduciamo che $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ da cui $\alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cong 35{,}26°$.

## Quesito 8

Qual è il valor medio di $f(x)=\frac{1}{x}$ da $x=1$ a $x=e$?

Ricordiamo innanzitutto il teorema della media integrale:
*Se la funzione* $f(x)$ *è continua nell'intervallo chiuso* $[a,b]$, *esiste almeno un punto* $c\in(a,b)$ *in cui risulta* $\int_a^b f(x)dx=(b-a)\cdot f(c)$ *o equivalentemente* $f(c)=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$.

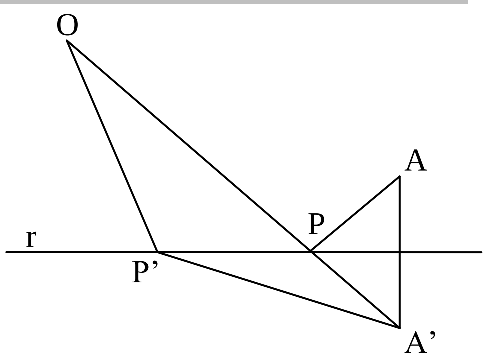
Nel caso in esame il valor medio è

$$V_M=\frac{1}{e-1}\int_1^e \frac{1}{x}dx=\frac{1}{e-1}\left[\ln|x|\right]_1^e=\frac{1}{e-1}$$

## Quesito 9

Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto ad una retta r, ne determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r. Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

Consideriamo la figura a lato.




Sia A' il simmetrico di A rispetto ad r; il segmento A'B interseca la retta r in P in quanto A' e B si trovano in semipiani diversi rispetto alla retta r. Dimostriamo che il punto P è quello che realizza il cammino minimo tra A e B. Consideriamo un ulteriore punto P' differente da P ed appartenente alla retta r; in un triangolo la somma delle lunghezze di due lati è maggiore della lunghezza del terzo, per cui $A'P'+P'B > A'B = A'P + PB$ da cui deduciamo che il punto P è quello che minimizza il cammino tra A e B.

## Quesito 10

Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni $x$ reale?

A) $\cos\left(\sin\left(x^2+1\right)\right)$ B) $\sin\left(\cos\left(x^2+1\right)\right)$

C) $\sin\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)$ D) $\cos\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)$

Si giustifichi la risposta.

Ragioniamo per esclusione.

La funzione $g(x)=\sin\left[\cos\left(x^2+1\right)\right]$ non può essere positiva per ogni $x$ reale in quanto se valutata in $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}-1}$ vale

$$g\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}-1}\right)=\sin\left[\cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}-1}^{\,2}+1\right)\right]=\sin\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-1+1\right)\right]=\sin\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\sin(0)=0$$

La funzione $h(x)=\sin\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]$ non può essere positiva per ogni $x$ reale in quanto se valutata in $x=\sqrt{e^{\frac{3\pi}{2}}-1}$ vale

$$h\left(\sqrt{e^{\frac{3\pi}{2}}-1}\right)=\sin\left[\ln\left(\sqrt{e^{\frac{3\pi}{2}}-1}^{\,2}+1\right)\right]=\sin\left[\ln\left(e^{\frac{3\pi}{2}}-1+1\right)\right]$$
$$=\sin\left(\ln e^{\frac{3\pi}{2}}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1<0$$

La funzione $i(x)=\cos\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]$ non può essere positiva per ogni $x$ reale in quanto se valutata in $x=\sqrt{e^{\pi}-1}$ vale

$$i\left(\sqrt{e^{\pi}-1}\right)=\cos\left[\ln\left(\sqrt{e^{\pi}-1}^{2}+1\right)\right]=\cos\left[\ln\left(e^{\pi}-1+1\right)\right]=\cos\left(\ln e^{\pi}\right)$$

$$=\cos(\pi)=-1<0$$

Di conseguenza la funzione che è sempre positiva per ogni $x$ reale è la

A) $f(x)=\cos\left(\sin\left(x^2+1\right)\right)$

Alternativamente, poiché la funzione coseno è pari ed assume valori positivi per $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, poiché la funzione $\sin\left(x^2+1\right)$ assume tutti i valori compresi nell'intervallo $[-1,1]$ e poiché $[-1,1]\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, deduciamo che $f(x)=\cos\left(\sin\left(x^2+1\right)\right)$ è positiva per ogni $x$ reale.