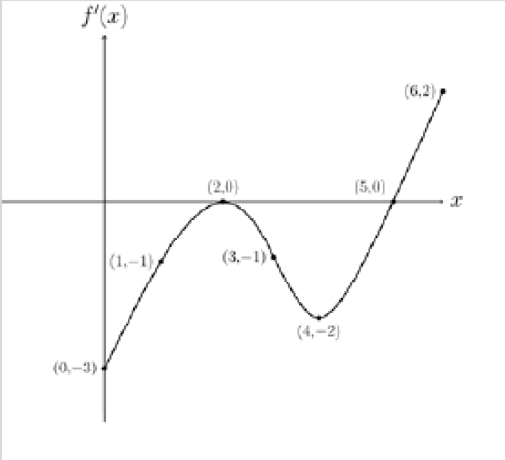
PROBLEMA1

Della funzione *f*, definita per $0 \le x \le 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata prima $f'(x)$, disegnato a lato, presenta due tangenti orizzontali per $x = 2$ e $x = 4$.



Si sa anche che $f(0) = 9$, $f(3) = 6$ e $f(5) = 3$.

1. Si trovino le ascisse dei punti di flesso di f motivando le risposte in modo esauriente.
2. Per quale valore di x la funzione f presenta il suo minimo assoluto? Sapendo che $\int_0^6 f'(t)dt = -5$ per quale valore di x la funzione f presenta il suo massimo assoluto?
3. Sulla base delle informazioni note, quale andamento potrebbe avere il grafico di *f*?
4. Sia *g* la funzione definita da $g(x) = xf(x)$. Si trovino le equazioni delle rette tangenti ai grafici di *f* e *g* nei rispettivi punti di ascissa $x = 3$ e si determini la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto che esse formano.

RISOLUZIONE

Punto 1

Dal grafico di $f'(x)$ si evince che la derivata prima:
si annulla in $x = 2$ e $x = 5$;
è crescente negli intervalli $[0,2) \cup (4,6]$;
ha pendenza nulla in $x = 2$ e $x = 4$
di conseguenza la derivata di $f'(x)$ e cioè $f''(x)$ è positiva in $[0,2) \cup (4,6]$, negativa in $(2,4)$ e si annulla in $x = 2$ e $x = 4$. I punti di flesso di *f* sono da ricercare nei punti in cui $f''(x)$ cambia segno e quindi in corrispondenza delle ascisse $x = 2$ e $x = 4$. In particolare poichè $f'(2) = 0$ il punto con ascissa $x = 2$ sarà un flesso a tangente orizzontale, mentre, poichè $f'(4) = -2$, il punto con ascissa $x = 4$ sarà un flesso a tangente obliqua con pendenza pari a -2.
Le ascisse dei punti di flesso possono essere determinate anche in maniera alternativa. La tangente al grafico di $f'(x)$ in ogni punto x_0 dell'intervallo $[0,6]$ ha equazione $y = f''(x_0)(x - x_0) + f'(x_0)$, pertanto, poiché i punti di flesso sono i punti in cui la derivata seconda si annulla, questi ultimi vanno ricercati nei punti in cui il coefficiente angolare $f''(x_0)$ della retta tangente al grafico di $f'(x)$ è zero, ovvero nei punti in cui la retta tangente al grafico di $f'(x)$ è orizzontale; questo accade alle ascisse $x = 2$ e $x = 4$ come già precedentemente mostrato.

Punto 2

Poichè $f(x)$ è derivabile, e quindi continua, nell'intervallo chiuso e limitato $[0,6]$, sarà ivi dotata di massimo e minimo assoluto per il teorema di Weierstrass. Dal grafico deduciamo che $f(x)$ è strettamente decrescente in $[0,5)$ e strettamente crescente in $(5,6]$, pertanto $f(x)$ assume il suo minimo assoluto in $x = 5$ e vale $f(5) = 3$.

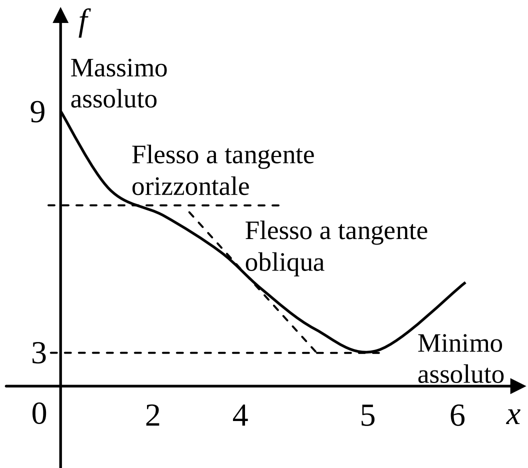
Il massimo assoluto può essere assunto in uno degli estremi dell'intervallo $[0,6]$. Per ipotesi $f(0)=9$ mentre per calcolare $f(6)$, applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha $\int_0^6 f'(t)dt = f(6)-f(0) = f(6)-9$; imponendo $\int_0^6 f'(t)dt = -5$ si deduce che $f(6)-9=-5 \Rightarrow f(6)=4$, pertanto, poiché $f(6)=4<9=f(0)$, il massimo assoluto è assunto in $x=0$ e vale $f(0)=9$.

Punto 3

Di $f(x)$ sappiamo che:

- assume solo valori positivi, in quanto è positivo il minimo assoluto;
- decresce strettamente su $[0,5)$ da $f(0)=9$ a $f(5)=3$;
- cresce strettamente su $(5,6]$ da $f(5)=3$ a $f(6)=4$;
- ha un minimo assoluto in $m(5,3)$;
- ha un massimo assoluto in $M(0,9)$;
- ha un flesso orizzontale in $x=2$ e un flesso a tangente obliqua in $x=4$ con pendenza pari a -2

Quindi il grafico di $f(x)$ potrebbe essere il seguente:



Punto 4

Sia $g(x) = xf(x)$. La retta tangente a *f* in (3,6) ha equazione $y = m(x-3)+6$ con $m = f'(3) = -1$ per cui l'equazione della tangente è $y = 9 - x$.

La retta tangente a *g* in $(3, 3f(3)) = (3,18)$ ha equazione $y = m(x-3)+18$ con $m = g'(3)$; la derivata della funzione $g(x) = xf(x)$ è $g'(x) = f(x) + xf'(x)$ per cui $g'(3) = f(3) + 3f'(3) = 6 - 3 = 3$ pertanto l'equazione della tangente è $y = 3(x-3)+18 = 3x+9$. L'ampiezza dell'angolo acuto α è dato dalla formula $\tan(\alpha) = \left|\frac{m_f - m_g}{1 + m_f m_g}\right| = \left|\frac{-4}{-2}\right| = 2 \Rightarrow \alpha = \arctan(2) \cong 63°\,25'\,48''$

PROBLEMA2

Siano *f* e *g* le funzioni definite da $f(x)=e^x$ e $g(x)=\ln x$

1. Fissato un riferimento cartesiano *Oxy*, si disegnino i grafici di *f* e di *g* e si calcoli l'area della regione R che essi delimitano tra $x=\frac{1}{2}$ e $x=1$.

2. La regione R, ruotando attorno all'asse *x*, genera il solido S e, ruotando attorno all'asse *y*, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.

3. Fissato $x_0>0$, si considerino le rette r e s tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa x_0. Si dimostri che esiste un solo x_0 per il quale r ed s sono parallele. Di tale valore x_0 si calcoli un'approssimazione arrotondata ai centesimi.

4. Sia $h(x)=f(x)-g(x)$. Per quali valori di x la funzione $h(x)$ presenta, nell'intervallo chiuso $\frac{1}{2}\le x\le 1$, il minimo e il massimo assoluti? Si illustri il ragionamento seguito.

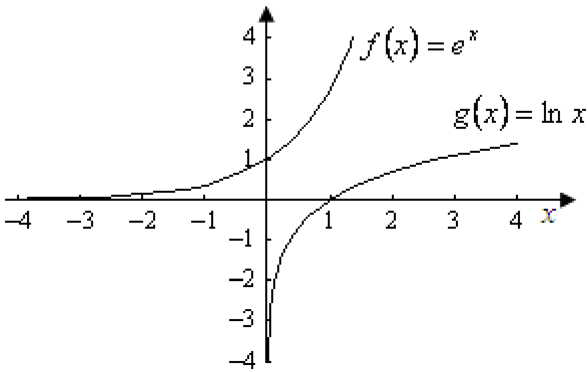
RISOLUZIONE

Punto 1

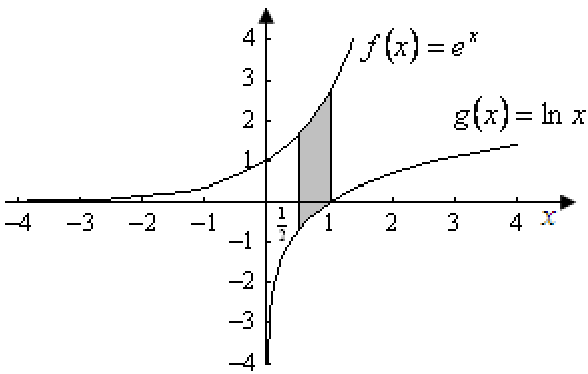
La funzione $g(x)=\ln x$ è la classica funzione logaritmica, definita in $(0,+\infty)$, interseca l'asse delle ascisse in $x=1$, positiva in $(1,+\infty)$, ha $x=0$ come asintoto verticale ed è strettamente crescente in tutto il dominio.

La funzione $f(x)=e^x$ è definita e continua e derivabile in tutto R; non interseca mai l'asse delle ascisse, mentre interseca le ordinate in $(0,1)$, è sempre positiva, ha $y=0$ come asintoto orizzontale sinistro ed è strettamente crescente in tutto il dominio.

Di seguito il grafico di entrambe le funzioni nello stesso riferimento cartesiano *Oxy*.



L'area da calcolare è di seguito raffigurata in grigio.



L'area richiesta è:

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(e^x - \ln x\right)dx = \left[e^x - x(\ln x - 1)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \left[e - 1(0-1) - \sqrt{e} + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - 1 \right) \right] = e - \sqrt{e} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$$

in cui si è sfruttato l'integrale per parti $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C, C \in R$

Punto 2

Il volume del solido S (ruotando attorno all'asse delle *x*, la limitazione data da $y = \ln x$ è inessenziale in quanto la relativa parte di grafico si trova nel quarto quadrante) si ottiene come:

$$V(S) = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\left(e^x\right)^2 \right] dx = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{2x} dx = \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left(\frac{e^2 - e}{2} \right)\pi$$

Il volume del solido T può essere calcolato applicando il metodo dei gusci cilindrici. Il solido generato dalla rotazione attorno all'asse *y* di una regione piana può essere visto come somma di tanti "gusci cilindrici", cioè cilindri cavi di raggio interno *x*, raggio esterno $x + \Delta x$ ed altezza $f(x)$.

Consideriamo il volume finito ΔV di un "guscio" come volume infinitesimo dV, quindi trattiamo Δx come infinitesimo dx; esso può essere espresso nella forma:

$$dV = \pi\left[(x + dx)^2 - x^2\right] \cdot f(x) = 2\pi \cdot x \cdot dx \cdot f(x) - \pi \cdot (dx)^2 \cdot f(x)$$

Poiché $(dx)^2$ è un infinitesimo di ordine superiore a dx, allora il termine $\pi \cdot (dx)^2 \cdot f(x)$ è trascurabile rispetto a $2\pi \cdot x \cdot dx \cdot f(x)$, pertanto

$$dV = \pi\left[(x + dx)^2 - x^2\right] \cdot f(x) \cong 2\pi \cdot x \cdot dx \cdot f(x)$$

Il volume del solido dovuto alla rotazione intorno all'asse delle ordinate, pensato come somma di tanti volumetti dV relativi all'intervallo di ascisse $[a,b]$, è pertanto pari a

$V=\int_a^b dV=2\pi\int_a^b xf(x)dx$. Se la regione da ruotare è delimitata da due funzioni, $f(x)$ e $g(x)$ con $g(x)\geq f(x)$ il volume solido dovuto alla rotazione intorno all'asse delle ordinate sarà pari a

$$V=2\pi\int_a^b x[g(x)-f(x)]dx.$$

Nel caso in esame il volume richiesto sarà pari a

$$V(T)=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\left(e^x-\ln x\right)dx$$

Applicando l'integrazione per parti si ha

$$\int xe^x dx=e^x(x-1)+C, C\in R$$

$$\int x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C, C\in R$$

Pertanto

$$V(T)=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\left(e^x-\ln x\right)dx=2\pi\left[e^x(x-1)-\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{e}}{2}-\frac{1}{8}\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)\right]=\pi\left(\sqrt{e}-\frac{\ln 2}{4}+\frac{3}{8}\right)$$

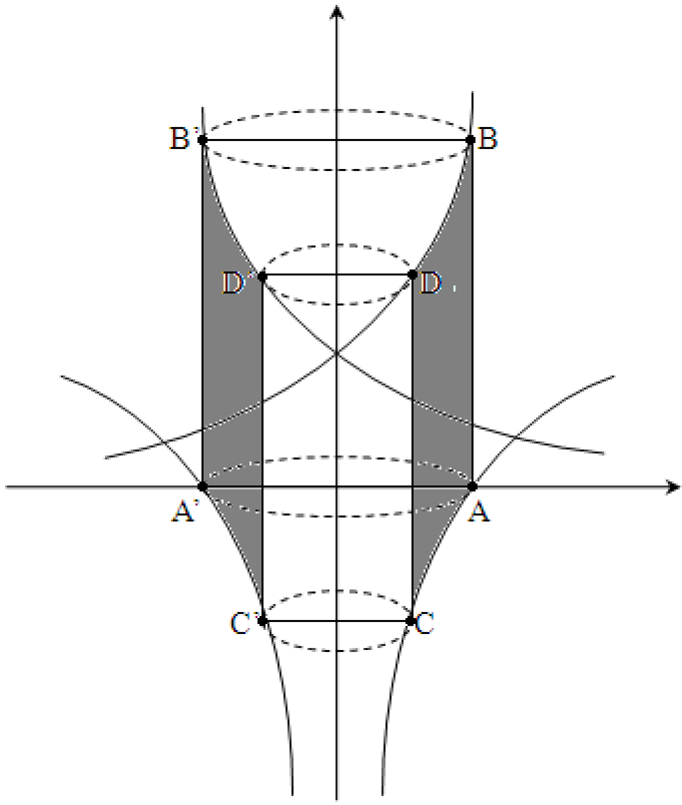
Alternativamente il volume può essere calcolato utilizzando le funzioni inverse; consideriamo a riguardo la figura di seguito in cui viene raffigurata in grigio la regione R ruotata attorno all'asse *y*. I vertici del cilindro ABB'A' sono $A(1,0), B(1,e), B'(-1,e), A'(-1,0)$ mentre i vertici del cilindro CDD'C' sono

$$C\left(\frac{1}{2},-\ln 2\right), D\left(\frac{1}{2},\sqrt{e}\right), D'\left(-\frac{1}{2},\sqrt{e}\right), C'\left(-\frac{1}{2},-\ln 2\right).$$

Detti:

- V_1 il volume del cilindro, avente raggio di base 1 e altezza e;
- V_2 il volume del solido ottenuto ruotando la funzione logaritmica attorno all'asse *y*, con $-\ln 2 \le y \le 0$;
- V_3 il volume del solido ottenuto ruotando la funzione esponenziale attorno all'asse *y*, con $\sqrt{e} \le y \le e$;
- V_4 il volume del cilindro, avente raggio di base $\frac{1}{2}$ e altezza $\sqrt{e}+\ln 2$

il volume del solido T è $V(T)=V_1+V_2-V_3-V_4$.



L'inversa della funzione $y = e^x$ è $x = \ln y$ e l'inversa di $y = \ln x$ è $x = e^y$, pertanto il volume è pari a:

$$V(T) = V_1 + V_2 - V_3 - V_4 =$$

$$= \pi \cdot 1^2 \cdot e + \pi \int_{-\ln 2}^{0} e^{2y} dy - \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{e} + \ln 2\right) - \int_{\sqrt{e}}^{e} \ln^2 y dy$$

L'integrale definito $\pi \int_{-\ln 2}^{0} e^{2y} dy$ è pari a

$\pi \int_{-\ln 2}^{0} e^{2y} dy = \pi \left[\frac{e^{2y}}{2} \right]_{-\ln 2}^{0} = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{8}\pi$, mentre l'integrale definito

$\pi \int_{\sqrt{e}}^{e} \ln^2 y dy$, ricordando che $\int \ln^2 y dy = y\left(\ln^2 y - 2\ln y + 2\right) + C, C \in R$,

è pari a

$$\pi \int_{\sqrt{e}}^{e} \ln^2 y dy = \pi \left[y\left(\ln^2 y - 2\ln y + 2\right) \right]_{\sqrt{e}}^{e} = \pi \left[e(1-2+2) - \sqrt{e}\left(\frac{1}{4} - 1 + 2 \right) \right] =$$

$$= \pi \left(e - \frac{5}{4}\sqrt{e} \right)$$

In conclusione

$$V(T) = \pi \cdot e + \frac{3}{8}\pi - \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{e} + \ln 2}{4} \right) - \pi\left(e - \frac{5}{4}\sqrt{e} \right) = \pi\left(\sqrt{e} - \frac{\ln 2}{4} + \frac{3}{8} \right)$$

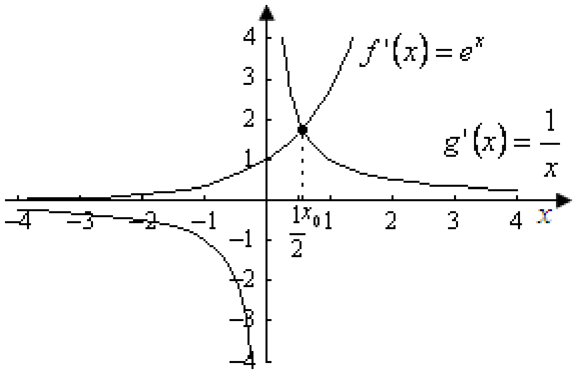
come precedentemente calcolato.

Punto 3

Le rette r ed s sono parallele se sono uguali i coefficienti angolari, cioè $m_r = m_s$. Ricordando che il coefficiente angolare è pari al valore della derivata prima nel punto considerato, si ha $m_r = e^x, m_s = \frac{1}{x}$, pertanto le due rette sono parallele se $e^x = \frac{1}{x}$.

Dobbiamo ora dimostrare che esiste un solo $x_0 > 0$ tale per cui l'equazione $F(x) = e^x - \frac{1}{x} = 0$.

Rappresentiamo nello stesso riferimento cartesiano Oxy entrambe le funzioni derivate prime $f'(x)=e^x, g'(x)=\frac{1}{x}$.



Dal grafico si evince che esse si intersecano in un solo punto $x_0 \in \left(\frac{1}{2},1\right)$; d'altronde $F\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0, F(1)=e-1>0$, pertanto a norma del teorema degli zeri la radice x_0 dell'equazione $F(x)=e^x-\frac{1}{x}=0$ cadrà nell'intervallo $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Il calcolo numerico della radice sarà effettuato mediante metodo dicotomico o di bisezione e mediante metodo delle tangenti o di Newton-Raphson.

- *Metodo dicotomico o di bisezione*

Di seguito la tabella che mostra i passi dell'algoritmo.

n	a_n	b_n	$\frac{a_n+b_n}{2}$	$F(a_n)$	$F(b_n)$	$F\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$	$\varepsilon_n = b_n - a_n$	$\varepsilon_n < \frac{1}{100}$
0	0,5000	1,0000	0,7500	-0,3513	1,7183	0,7837	0,5000	NO
1	0,5000	0,7500	0,6250	-0,3513	0,7837	0,2682	0,2500	NO
2	0,5000	0,6250	0,5625	-0,3513	0,2682	-0,0227	0,1250	NO
3	0,5625	0,6250	0,5938	-0,0227	0,2682	0,1266	0,0625	NO
4	0,5625	0,5938	0,5781	-0,0227	0,1266	0,0530	0,0313	NO
5	0,5625	0,5781	0,5703	-0,0227	0,0530	0,0154	0,0156	NO
6	0,5625	0,5703	0,5664	-0,0227	0,0154	-0,0036	0,0078	SI

Dopo 7 iterazioni la soluzione approssimata al centesimo è $x_0 \cong 0{,}57$.

- *Metodo delle tangenti o di Newton-Raphson*

Si applica la formula ricorsiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n} - \frac{1}{x_n}}{e^{x_n} + \frac{1}{x_n^2}} = \frac{x_n^2 e^{x_n}(x_n - 1) + 2x_n}{x_n^2 e^{x_n} + 1}$$ con punto

iniziale $x_0 = 1$ in cui $F(x_0)$ e $F''(x_0)$ sono concordi.
La tabella seguente mostra tutti i passi dell'algoritmo.

n	x_n	x_{n+1}	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$	$\varepsilon_n < \frac{1}{100}$
0	1	0,538		
1	0,538	0,566	0,462	NO
2	0,566	0,567	0,028	NO
3	0,567	0,567	0,001	SI

Dopo 4 iterazioni la soluzione approssimata al centesimo è $x_0 \cong 0,57$ come precedentemente trovato. Si noti come il metodo delle tangenti o di Newton-Raphson abbia una velocità di convergenza maggiore rispetto al metodo dicotomico o di bisezione.

Punto 4

La funzione $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - \ln x$ è derivabile e quindi continua in $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, pertanto a norma del teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluto in suddetto intervallo.

La derivata prima è $h'(x) = f'(x) - g'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ e se guardiamo il grafico in cui entrambe le funzioni $f'(x) = e^x, g'(x) = \frac{1}{x}$ sono rappresentate nello stesso riferimento cartesiano *Oxy* notiamo che

$$f'(x) < g'(x) \Leftrightarrow h'(x) < 0 \quad \text{se} \quad x < x_0 \cong 0{,}57$$
$$f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow h'(x) > 0 \quad \text{se} \quad x > x_0 \cong 0{,}57$$
$$f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow h'(x) = 0 \quad \text{se} \quad x = x_0 \cong 0{,}57$$

pertanto, considerando il solo intervallo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $h'(x)$ è strettamente decrescente in $\left[\frac{1}{2}, x_0\right)$ e strettamente crescente in $(x_0, 1]$ per cui $h(x)$ presenta un minimo relativo in corrispondenza dell'ascissa $x = x_0 \cong 0{,}57$.

Confrontando il valore della funzione agli estremi dell'intervallo e nell'ascissa del punto di minimo relativo otteniamo:

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} + \ln 2 \cong 2{,}3419$$
$$h(x_0) \cong 2{,}3304$$
$$h(1) = e \cong 2{,}7183$$

pertanto il massimo assoluto è assunto all'ascissa $x = 1$ e il minimo assoluto all'ascissa $x = x_0 \cong 0{,}57$.

QUESTIONARIO

Quesito 1

Si calcoli

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{3x} - 3^{4x}}{x}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, pertanto applicando De l'Hospital si ha

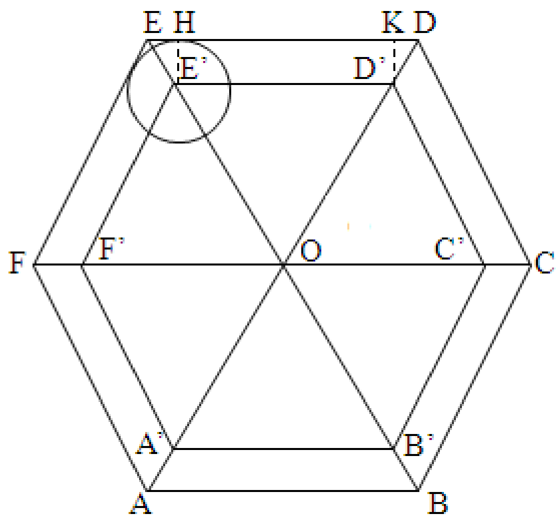
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{3x} - 3^{4x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3\ln 2 \cdot 2^{3x} - 4\ln 3 \cdot 3^{4x}}{2x} = \frac{3\ln 2 - 4\ln 3}{0^+} = -\infty$$

in quanto $3\ln 2 - 4\ln 3 = \ln \frac{8}{81} < 0$

Quesito 2

Una moneta da 1 euro (il suo diametro è 23, 25 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle esagonali (regolari) di lato 10 cm. Qual è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella (cioè non tagli i lati degli esagoni)?

Consideriamo la figura a lato.
La moneta non taglia i lati dell'esagono se il suo centro cade all'interno o sul bordo dell'esagono A'B'C'D'E'F'. Il lato di questo esagono è pari a
$\overline{E'D'} = \overline{ED} - \overline{EH} - \overline{KD}$.
I due triangoli EE'H e DD'K sono congruenti, essendo rettangoli e con un angolo di 30° e l'altro di 60°; pertanto



$$\overline{EH} = \overline{KD} = \overline{E'H} \cdot \tan(30°) = \overline{E'H} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Di conseguenza il lato dell'esagono A'B'C'D'E'F' è

$\overline{E'D'} = \overline{ED} - 2\overline{E'H} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$ dove $2\overline{E'H}$ è il diametro della moneta,

pertanto in millimitri il lato sarà pari a $\overline{E'D'} = \left(100 - 7{,}75 \cdot \sqrt{3}\right)$. La probabilità richiesta è pari al rapporto tra le aree dei due esagoni; poichè i due esagoni sono simili, tale probabilità sarà pari al quadrato del rapporto tra i due lati, e cioè:

$$p = \left(\frac{100 - 7{,}75\sqrt{3}}{100}\right)^2 \cong 0{,}7496 = 74{,}96\%$$

Quesito 3

Sia $f(x)=3^x$. Per quale valore di *x*, approssimato a meno di 10^{-3}, la pendenza della retta tangente alla curva nel punto $(x, f(x))$ è uguale a 1?

La pendenza della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ in un punto $(x, f(x))$ è data dal valore della derivata della funzione calcolata nel punto *x*. La funzione in esame è derivabile in tutto R, e la sua derivata è $f'(x)=\ln 3\cdot 3^x$; imponendo l'uguaglianza $f'(x)=1$ si ha:

$$f'(x)=\ln 3\cdot 3^x=1 \Leftrightarrow x=\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)=-\log_3(\ln 3)$$

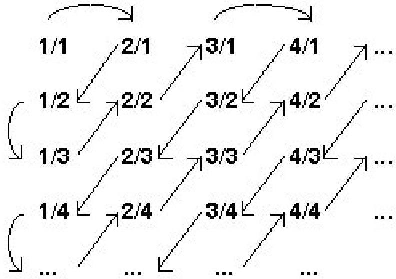
Applicando la regola del cambiamento di base dei logaritmi, e riscrivendo in base e si ha:

$$x=-\log_3(\ln 3)=-\frac{\ln(\ln 3)}{\ln 3}\cong -0{,}086$$

Quesito 4

L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali sono insiemi equipotenti? Si giustifichi la risposta.

L'insieme N dei numeri naturali e quello Q dei numeri razionali sono equipotenti poiché entrambi costituiti da un'infinità numerabile di elementi.
Si possono infatti ordinare gli elementi di Q in modo da stabilire una corrispondenza biunivoca con l'insieme dei naturali N. Il procedimento che segue è detto di diagonalizzazione ed è dovuto al matematico G. Cantor.



La corrispondenza biunivoca è la seguente

Q	1/1	2/1	1/2	1/3	2/2	3/1	4/1	3/2	2/3	…
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…

Quesito 5

Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?

Il numero di segmenti è pari al numero delle combinazioni di n oggetti di classe 2 e quindi è dato da:

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{n\cdot(n-1)}{2};$$

analogamente il numero di triangoli è

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!\cdot(n-3)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}$$

e di tetraedri

$$\binom{n}{4} = \frac{n!}{4!\cdot(n-4)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{24}$$

Quesito 6

Si dimostri che la curva di equazione $y = x^3 + ax + b$ ha uno ed un solo punto di flesso rispetto a cui è simmetrica.

La cubica di equazione $y = x^3 + ax + b$ ha derivata prima e seconda rispettivamente pari a $y' = 3x^2 + a, y'' = 6x$, per cui essa ha concavità verso l'alto in $(0,+\infty)$ e verso il basso in $(-\infty,0)$ pertanto l'unico flesso è il punto $F(0,b)$ ed è a tangente orizzontale se $a = 0$ e obliqua se $a \neq 0$. Verifichia mo la simmetria centrale della curva rispetto a $F(0,b)$ trasformando l'equazione secondo le corrispondenti trasformazioni:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = 2b - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = 2b - y' \end{cases}$$

Sostituendo si ha:

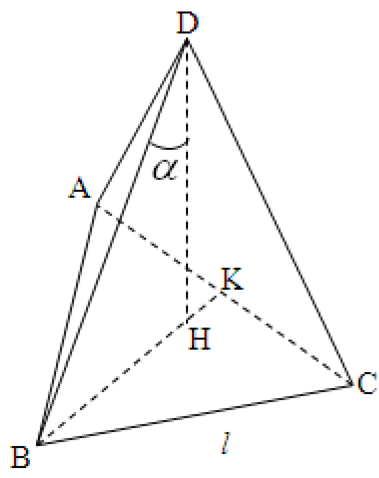
$$2b - y' = (-x')^3 + a(-x') + b \Rightarrow y' = (x')^3 + ax' + b$$

Pertanto la curva è simmetrica rispetto a $F(0,b)$.

Quesito 7

E' dato un tetraedro regolare di spigolo *l* e altezza *h*. Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da *l* e da *h*.

Consideriamo la figura a lato.
Per ipotesi il tetraedro è regolare, per cui è una piramide retta; il piede H dell'altezza coincide con l'incentro del triangolo equilatero ABC di base ed è anche ortocentro e baricentro. Da ciò deduciamo che il piede H divide l'altezza BK in due parti, di cui una



doppia dell'altra. Poiché $\overline{BK} = l\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{BH} = \frac{2}{3}\overline{BK} = l\frac{\sqrt{3}}{3}$; il triangolo BHD è rettangolo in H e applicando il teorema dei triangoli rettangoli, deduciamo che $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ da cui $\alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cong 35{,}26°$.

Quesito 8

Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti (A, B e C). Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi, e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento B si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si producono i pezzi rimanenti, e il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo \`e difettoso, con quale probabilit\`a esso proviene dallo stabilimento A?

La probabilità che un pezzo sia difettoso per la legge della probabilità totale è

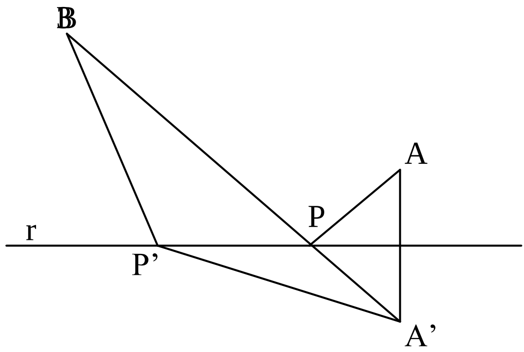
$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)\cdot P(D|A) + P(B)\cdot P(D|B) + P(C)\cdot P(D|C) = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{100} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{100} = \frac{49}{600} \end{aligned};$$

la probabilità che il pezzo difettoso provenga da A per la legge di Bayes è

$$P(A|D) = \frac{P(A)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{49}{600}} = \frac{30}{49} \cong 0{,}6122 = 61{,}22\%$$

Quesito 9

Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto ad una retta r, ne determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r. Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

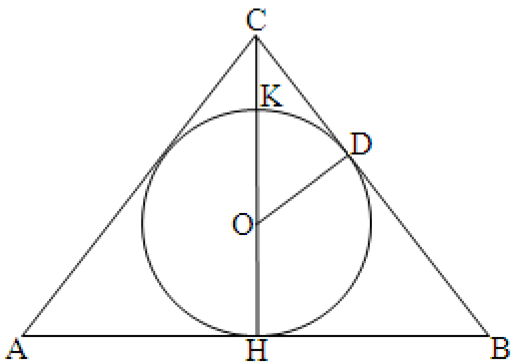


Consideriamo la figura a lato.
Sia A' il simmetrico di A rispetto ad r; il segmento A'B interseca la retta r in P in quanto A' e B si trovano in semipiani diversi rispetto alla retta r. Dimostriamo che il punto P è quello che realizza il cammino minimo tra A e B. Consideriamo un ulteriore punto P' differente da P ed appartenente alla retta r; in un triangolo la somma delle lunghezze di due lati è maggiore della lunghezza del terzo, per cui $A'P' + P'B > A'B = A'P + PB$ da cui deduciamo che il punto P è quello che minimizza il cammino tra A e B.

Quesito 10

Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio *r*, quello di minima area laterale ha il vertice che dista $r\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.

Consideriamo la figura a lato.



Poniamo $\overline{CO} = x$ con $x > r$; per il teorema di Pitagora $\overline{CD} = \sqrt{x^2 - r^2}$. I triangoli COD e CHB sono simili per cui vale la seguente proporzione tra lati omologhi $CD : OD = CH : HB$ che equivale a

$\sqrt{x^2 - r^2} : r = (x+r) : \overline{HB}$ da cui $\overline{HB} = \frac{r\sqrt{x^2 - r^2}}{x-r} = r\sqrt{\frac{x+r}{x-r}}$. Per il teorema di Pitagora

$$\overline{CB} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2} = \sqrt{(x+r)^2 + r^2\left(\frac{x+r}{x-r}\right)} = x\sqrt{\left(\frac{x+r}{x-r}\right)}$$

L'area laterale è pari a

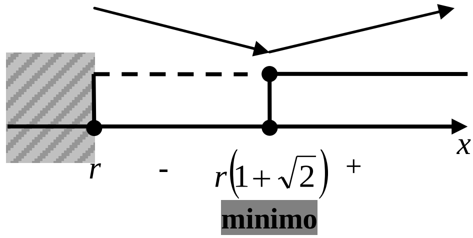
$$A_l(x) = \pi \cdot \overline{HB} \cdot \overline{CB} = \pi \cdot r\sqrt{\frac{x+r}{x-r}} \cdot x\sqrt{\left(\frac{x+r}{x-r}\right)} = \pi \cdot r \cdot \frac{x^2 + rx}{x-r}$$

La minimizzazione dell'area laterale la effettuiamo mediante derivazione. La derivata prima della funzione $A_l(x) = \pi \cdot r \cdot \frac{x^2 + rx}{x-r}$ è

$$A_l^{'}(x) = \pi \cdot r \cdot \left[\frac{(2x+r)(x-r) - x^2 - rx}{(x-r)^2}\right] = \pi \cdot r \cdot \frac{x^2 - 2rx - r^2}{(x-r)^2};$$

considerando la limitazione geometrica $x > r$, il quadro dei segni della derivata prima è di seguito mostrato:

$$A_l'(x) > 0 \Rightarrow x > r\left(1+\sqrt{2}\right)$$
$$A_l'(x) < 0 \Rightarrow r < x < r\left(1+\sqrt{2}\right)$$
$$A_l'(x) = 0 \Rightarrow x = r\left(1+\sqrt{2}\right)$$



da cui deduciamo che la funzione è strettamente decrescente in $\left(r, r\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$ e strettamente crescente in $\left(r\left(1+\sqrt{2}\right), +\infty\right)$ pertanto $x = r\left(1+\sqrt{2}\right)$ è ascissa di minimo.

Di conseguenza $\overline{CK} = r\left(1+\sqrt{2}\right) - r = r\sqrt{2}$.