PROBLEMA1

Il triangolo ABC, rettangolo in A, ha l'ipotenusa $BC = 2a$; sia P il punto medio di AC, Q la sua proiezione ortogonale su BC e $A\hat{B}C = \alpha$.

1. Si calcoli il rapporto:

$$\frac{PQ + QC}{BQ}$$

e lo si esprima in funzione di $x = \tan\alpha$, controllando che risulti

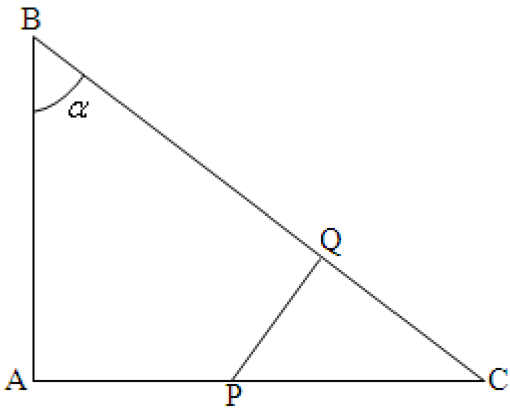
$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 2}$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.
3. Si determinino le coordinate del punto $\mathrm{D}(x_\mathrm{D}, y_\mathrm{D})$ in cui la curva γ incontra il suo asintoto e si scrivano le equazioni della tangente e della normale in tale punto.
4. Si determini l'area della superficie piana, appartenente al I quadrante, delimitata dall'asse delle ascisse, dalla curva γ e dalla retta $x = x_\mathrm{D}$.

RISOLUZIONE

Punto 1

Consideriamo la figura sottostante.



Il triangolo ABC è rettangolo pertanto per il teorema sui triangoli rettangoli $\overline{AB} = 2a\cos\alpha, \overline{AC} = 2a\sin\alpha$; il triangolo PQC è anch'esso rettangolo con ipotenusa $\overline{PC} = \frac{\overline{AC}}{2} = a\sin\alpha$ di conseguenza, applicando nuovamente il teorema sui triangoli rettangoli, $\overline{PQ} = \overline{PC}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = a\sin\alpha\cdot\cos\alpha, \overline{QC} = \overline{PC}\cdot\sin\alpha = a\sin^2\alpha$. Il segmento BQ misura per differenza $\overline{BQ} = \overline{BC} - \overline{QC}\cdot = 2a - a\sin^2\alpha$. Il rapporto $\frac{PQ+QC}{BQ}$ vale quindi:

$\frac{PQ+QC}{BQ} = \frac{a\sin\alpha\cos\alpha + a\sin^2\alpha}{2a - a\sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{2-\sin^2\alpha}$. Se $x = \tan\alpha$ si ha $\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ e $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{x}{1+x^2}$ pertanto il rapporto vale

$$f(x)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{2-\frac{x^2}{1+x^2}}=\frac{\frac{x^2+x}{1+x^2}}{\frac{x^2+2}{1+x^2}}=\frac{x^2+x}{x^2+2}$$ come indicato nella traccia.

La limitazione geometrica $0<x<\frac{\pi}{2}$ in termini di $x=\tan\alpha$ equivale a $x>0$.

Punto 2

Studiamo la funzione $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+2}$ prescindendo dalla limitazione geometrica $x>0$.

Dominio: R in quanto il denominatore x^2+2 non si annulla mai;

Intersezione ascisse:

$$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+2}=0\Rightarrow x^2+x=0\Rightarrow x(x+1)=0\Rightarrow x=-1\vee x=0;$$

Intersezioni ordinate: $x=0\Rightarrow f(0)=0$;

Simmetrie: la funzione non è nè pari nè disapri;

Positività: la funzione è positiva se il numeratore è positivo in quanto il denominatore x^2+2 è sempre positivo, pertanto

$$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+2}>0\Rightarrow x^2+x>0\Rightarrow x<-1\vee x>0;$$

Asintoti verticali: non ve ne sono in quanto il dominio è R;

Asintoti orizzontali: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x}{x^2+2}=1$ pertanto $y=1$ è asintoto orizzonatale destro e sinistro;

Asintoti obliqui: non ve ne sono in quanto la presenza di asintoti orizzontali per funzioni razionali fratte, quale è $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+2}$, esclude la presenza di asintoti obliqui;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $f'(x)=\frac{-x^2+4x+2}{\left(x^2+2\right)^2}$ per cui il denominatore è sempre positivo, mentre numeratore è positivo se $-x^2+4x+2>0 \Rightarrow x^2-4x-2<0$ ovvero se $2-\sqrt{6}<x<2+\sqrt{6}$ pertanto la funzione è strettamente crescente in $\left(2-\sqrt{6},2+\sqrt{6}\right)$ e strettamente decrescente in $\left(-\infty,2-\sqrt{6}\right)\cup\left(2+\sqrt{6},+\infty\right)$ e presenta un minimo relativo in $m\left(2-\sqrt{6},\frac{2-\sqrt{6}}{4}\right)$ e un massimo relativo in

$M\left(2+\sqrt{6},\frac{2+\sqrt{6}}{4}\right)$;

Concavità e convessità: la derivata seconda è pari a

$f''(x)=\frac{2\left(x^3-6x^2-6x+4\right)}{\left(x^2+2\right)^3}$ e per trovare i flessi va risolta la disequazione cubica $x^3-6x^2-6x+4=0$. Essa può essere risolta o per via grafica risolvendo il sistema $\begin{cases} y=x^3 \\ y=6x^2+6x-4 \end{cases}$ ovvero trovando le intersezioni tra la cubica $y=x^3$ e la parabola $y=6x^2+6x-4$, oppure si può utilizzare il metodo di Cardano. Applicando il metodo di Cardano, le soluzioni dell'equazione $x^3-6x^2-6x+4=0$ sono tutte e tre reali e pari a

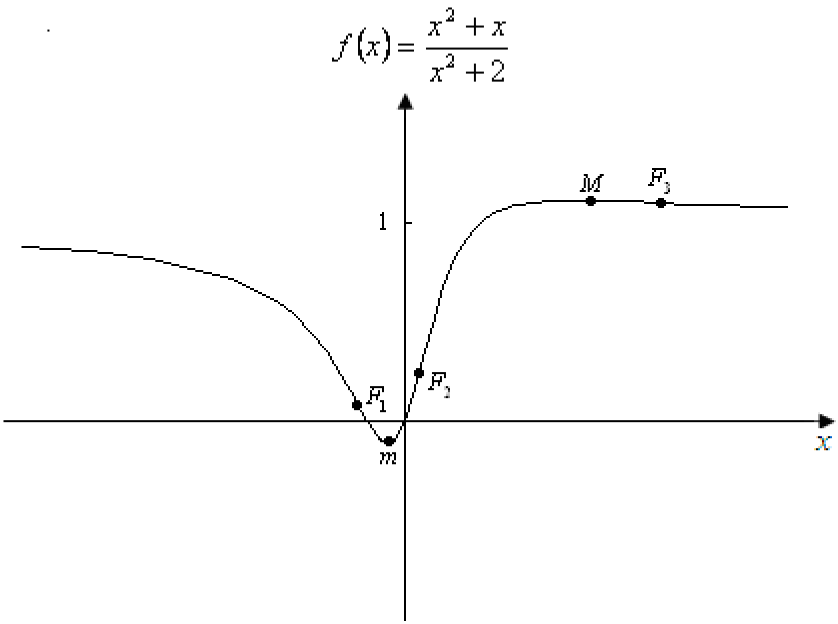
$x_1=2+2\sqrt{6}\cos\left[\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\cong 6{,}796$,

$x_2=2+2\sqrt{6}\cos\left[\frac{1}{3}\left(2\pi-\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right]\cong 0{,}466$ e

$x_3=2+2\sqrt{6}\cos\left[\frac{1}{3}\left(4\pi-\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right]\cong -1{,}262$. Si lascia al lettore la verifica che le radici sono quelle suddette. In conclusione la funzione

$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+2}$ presenta tre flessi a tangente obliqua alle ascisse su indicate.

Il grafico γ è di seguito presentato.



Punto 3

Il punto di intersezione $\mathrm{D}(x_{\mathrm{D}}, y_{\mathrm{D}})$ tra $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+2}$ e il suo asintoto orizzontale $y=1$ si ricava risolvendo l'equazione $\frac{x^2+x}{x^2+2}=1$ da cui si ottiene $x=2$ ovvero $\mathrm{D}(2,1)$.

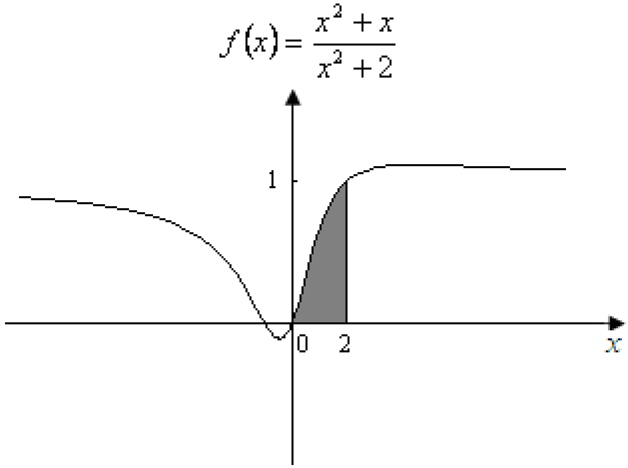
La tangente a γ nel punto $D(2,1)$ ha equazione $y = m(x-2)+1$ con

$$m = f'(2) = \left[\frac{-x^2+4x+2}{\left(x^2+2\right)^2}\right]_{x=2} = \frac{1}{6} \text{ e cioè } y = \frac{1}{6}(x-2)+1 = \frac{x}{6}+\frac{2}{3}.$$

La normale a γ nel punto $D(2,1)$ ha equazione $y = -\frac{1}{m}(x-2)+1$ e cioè $y = -6(x-2)+1 = -6x+13$.

Punto 4

L'area da calcolare è raffigurata di seguito in grigio.



Essa è pari a

$$S=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(\frac{x^2+x}{x^2+2}\right)dx=\int_0^2\left(1+\frac{x}{x^2+2}-\frac{2}{x^2+2}\right)dx=$$

$$=\int_0^2\left[1+\frac{x}{x^2+2}-\sqrt{2}\,\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\right]dx=\left[x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)-\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^2=$$

$$=\left[2+\frac{1}{2}\ln 6-\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\right)\right]-\frac{1}{2}\ln 2=2+\frac{1}{2}\ln 3-\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\right)$$

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x)=\frac{3x+2}{\sqrt{x-5}}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*.
2. Si scriva l'equazione della tangente alla curva γ nel punto di flesso e si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo φ che essa forma con la direzione positiva dell'asse *x*.
3. Si calcoli il volume del solido Ω, generato dalla superficie piana Σ, delimitata dalla curva γ, dall'asse delle *x* e dalle rette $x=6$ e $x=10$, in una rotazione completa attorno all'asse *x*.
4. Se tutte le misure fossero espresse in dm, potrebbe un recipiente, avente la stessa capacità del solido Ω, contenere $3\,\mathrm{m}^3$ di acqua?

RISOLUZIONE

Punto 1

Studiamo la funzione $f(x)=\dfrac{3x+2}{\sqrt{x-5}}$

Dominio: $x-5>0 \Rightarrow x>5$;

Intersezione ascisse: $f(x)=\dfrac{3x+2}{\sqrt{x-5}}=0 \Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}$ che non appartiene al dominio, pertanto non vi sono intersezioni con l'asse delle ascisse;

Intersezioni ordinate: non vi sono intersezioni con l'asse delle ordinate in quanto $x=0$ non appartiene al dominio;

Simmetrie: non ve ne sono;

Positività: all'interno del dominio $(5,+\infty)$ sia il numeratore che il denominatore sono sempre positivi, pertanto la funzione è sempre positiva;

Asintoti verticali: $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=+\infty$ pertanto $x=5$ è asintoto verticale destro;

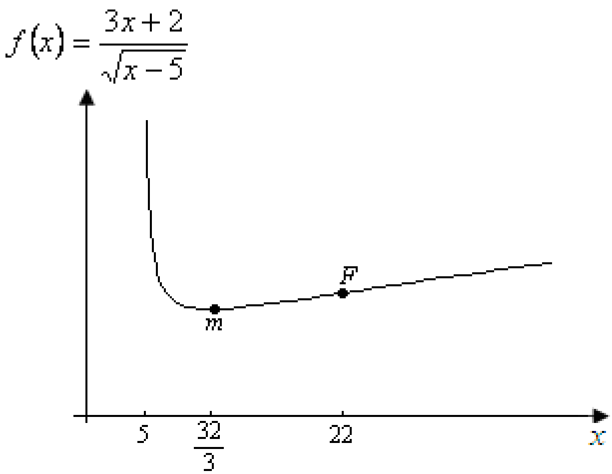
Asintoti orizzontali: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ per cui non ve ne sono;

Asintoti obliqui: non ve ne sono in quanto $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ e $q = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx] = +\infty$;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $f'(x) = \frac{\sqrt{x-5}(3x-32)}{2(x-5)^2}$ per cui la funzione è strettamente decrescente in $\left(5, \frac{32}{3}\right)$ e strettamente crescente in $\left(\frac{32}{3}, +\infty\right)$ pertanto $m\left(\frac{32}{3}, 2\sqrt{51}\right)$ è un punto di minimo relativo;

Concavità e convessità: la derivata seconda è $f''(x) = \frac{3\sqrt{x-5}\cdot(22-x)}{4\cdot(x-5)^3}$ e risulta essere positiva per $5 < x < 22$ e negativa per $x > 22$, pertanto la funzione volge concavità verso l'alto in $(5,22)$ e verso il basso in $(22,+\infty)$ e presenta un flesso in $F(22, 4\sqrt{17})$.

Il grafico γ è di seguito presentato:



Punto2

La tangente a γ in $F\left(22, 4\sqrt{17}\right)$ ha equazione $y = m(x-22) + 4\sqrt{17}$ con $m = f'(22) = \left[\frac{\sqrt{x-5}(3x-32)}{2(x-5)^2}\right]_{x=22} = \frac{\sqrt{17}}{17}$, cioè

$$y = \frac{\sqrt{17}}{17}(x-22) + 4\sqrt{17} = \frac{\sqrt{17}}{17}x + \frac{46\sqrt{17}}{17}$$ e l'angolo φ che essa forma con la direzione positiva dell'asse x è tale per cui $\tan\varphi = \frac{\sqrt{17}}{17}$

da cui $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{17}}{17}\right) \cong 13°38'$.

Punto 3

Il volume del solido Ω, generato dalla superficie Σ, delimitata dalla curva γ, dall'asse delle x e dalle rette $x = 6$ e $x = 10$, in una rotazione completa attorno all'asse x è pari a:

$$V(\Omega) = \pi \int_6^{10} \left(\frac{3x+2}{\sqrt{x-5}}\right)^2 dx = \pi \int_6^{10} \left(\frac{9x^2+12x+4}{x-5}\right) dx =$$

$$= \pi \int_6^{10} \left(9x + 57 + \frac{289}{x-5}\right) dx = \pi \left[\frac{9}{2}x^2 + 57x + 289 \ln|x-5|\right]_6^{10} =$$

$$= \pi\left[(450 + 570 + 289\ln 5) - (162 + 342)\right] = \pi(516 + 289\ln 5)$$

Punto 4

Se le misure fossero espresse in dm il volume sarebbe pari a $V(\Omega) = \pi(516 + 289\ln 5)\,\mathrm{dm}^3 \cong 3082{,}30\,\mathrm{dm}^3$, ovvero $V(\Omega) \cong 3{,}08230\,\mathrm{m}^3$ pertanto potrebbe un recipiente, avente la stessa capacità del solido, contenere $3\,\mathrm{m}^3$ di acqua.

QUESTIONARIO

Quesito 1

Alcuni ingegneri si propongono di costruire una galleria rettilinea che colleghi il paese A, situato su un versante di una collina, col paese B, che si trova sul versante opposto. Da una terza località C i progettisti misurano le distanze *CA*=837 *metri*, *CB*=1764 *metri* e l'angolo $A\hat{C}B = 44{,}5°$. Si calcoli quale sarà lunghezza della galleria.

Applicando il teorema di Carnot si ha:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 - 2\cdot\overline{CA}\cdot\overline{CB}\cdot\cos\left(A\hat{C}B\right)} = \sqrt{837^2 + 1164^2 - 2\cdot 837\cdot 1164\cdot \cos$$

Quesito 2

Data la funzione $\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2}$, quando x tende a zero.

La funzione $\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2}$ può essere scritta come $\frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^2(1-\cos x)}$; se x tende a zero il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ pertanto applicando il teorema di De l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^2(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x - 2\sin x}{2x - 2x\cos x + x^2\sin x}$$

che si presenta ancora nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$; riapplicando De l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x - 2\sin x}{2x - 2x\cos x + x^2\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2 - 2\cos x}{2 - 2\cos x + 4x\sin x + x^2\cos x}$$

che è ancora nella forma $\frac{0}{0}$, per cui procedendo ancora con de l'Hopital si ha

$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x}{2-2\cos x+4x\sin x+x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{6\sin x+6x\cos x-x^2\sin x}$ che è ancora nella forma $\frac{0}{0}$, per cui applicando l'ultima volta de l'Hopital si ha

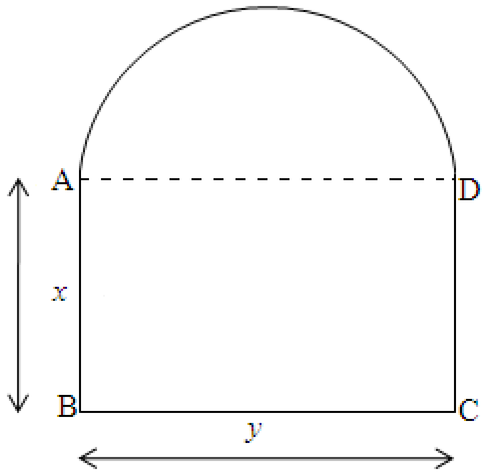
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{6\sin x+6x\cos x-x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{12\cos x-8x\sin x-x^2\cos x}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

.

Quesito 3

Una finestra ha la forma di un rettangolo sormontato da un semicerchio avente per diametro un lato del rettangolo; il contorno della finestra misura l. Si determinino le dimensioni del rettangolo affinché l'area totale della finestra sia massima.

Osserviamo che nel testo non è indicato esplicitamente che uno dei due, il rettangolo o il semicerchio dovessero essere forniti di lato o, rispettivamente di diametro.
Proporremo pertanto due soluzioni, la prima che non considera il lato o diametro rispettivamente del rettangolo o semicerchio, e la seconda, invece, che considera tale lato/diametro. Consideriamo la figura a lato.



Siano x e y le misure dei lati AB e BC del rettangolo con

$0<x<\frac{l}{2}, 0<y<\frac{l}{2}$.

Nel primo caso, il contorno della finestra è pari alla somma del perimetro del rettangolo cui va tolto il diametro *y* del semicerchio e del contorno del semicerchio. Il contorno del semicerchio è pari a $\pi \cdot R = \frac{\pi y}{2}$, pertanto si ha $2x + y + \frac{\pi y}{2} = l$ da cui $x = \frac{l}{2} - y\left(\frac{\pi + 2}{4}\right)$.

Poichè $0 < x < \frac{l}{2}$, la condizione $x = \frac{l}{2} - y\left(\frac{\pi + 2}{4}\right)$ ci fa ricavare una condizione più stringente su *y*: $0 < \frac{l}{2} - y\left(\frac{\pi + 2}{4}\right) < \frac{l}{2} \Rightarrow 0 < y < \frac{2l}{\pi + 2}$.

L'area totale della finestra è pari alla somma dell'area del rettangolo uguale a $xy = \frac{ly}{2} - y^2\left(\frac{\pi + 2}{4}\right)$ e dell'area del semicerchio uguale a $\frac{\pi \cdot R^2}{2} = \frac{\pi y^2}{8}$: $S(y) = \frac{ly}{2} - y^2\left(\frac{\pi + 2}{4}\right) + \frac{\pi y^2}{8} = \frac{ly}{2} - y^2\left(\frac{\pi + 4}{8}\right)$ con $0 < y < \frac{2l}{\pi + 2}$. Poichè l'area della finestra è una parabola con concavità verso il basso, il massimo è raggiunto nell'ascissa del vertice:

$y_{\max} = -\frac{\frac{l}{2}}{-2\left(\frac{\pi + 4}{8}\right)} = \frac{2l}{\pi + 4}$, compreso nell'intervallo $\left(0, \frac{2l}{\pi + 2}\right)$, cui corrisponde $x_{\max} = \frac{l}{2} - \left(\frac{2l}{\pi + 4}\right)\left(\frac{\pi + 2}{4}\right) = \frac{l}{\pi + 4}$ e

$$S(y_{\max}) = \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{2l}{\pi + 4}\right) - \left(\frac{2l}{\pi + 4}\right)^2\left(\frac{\pi + 4}{8}\right) = \frac{l^2}{2(\pi + 4)}.$$

Nel secondo caso, invece, si ha $2x + 2y + \frac{\pi y}{2} = l$ da cui $x = \frac{l}{2} - y\left(\frac{\pi + 4}{4}\right)$ pertanto $0 < \frac{l}{2} - y\left(\frac{\pi + 4}{4}\right) < \frac{l}{2} \Rightarrow 0 < y < \frac{2l}{\pi + 4}$ e

$S(y)=\frac{ly}{2}-y^2\left(\frac{\pi+4}{4}\right)+\frac{\pi y^2}{8}=\frac{ly}{2}-y^2\left(\frac{\pi+8}{8}\right)$; il massimo è raggiunto nell'ascissa del vertice: $y_{\max}=-\frac{\frac{l}{2}}{-2\left(\frac{\pi+8}{8}\right)}=\frac{2l}{\pi+8}$, compreso nell'intervallo $\left(0,\frac{2l}{\pi+4}\right)$, cui corrisponde

$x_{\max}=\frac{l}{2}-\left(\frac{2l}{\pi+8}\right)\left(\frac{\pi+4}{4}\right)=\frac{2l}{\pi+8}$ e

$S(y_{\max})=\frac{l}{2}\cdot\left(\frac{2l}{\pi+8}\right)-\left(\frac{2l}{\pi+8}\right)^2\left(\frac{\pi+8}{8}\right)=\frac{l^2}{2(\pi+8)}$.

Quesito 4

Si scriva l'equazione della tangente al grafico della funzione:

$$f(x) = \log_x\left(x^2 + 4\right)$$

nel punto P di ascissa $x = 2$.

Il punto P ha coordinate $(2, \log_2 8) \equiv (2,3)$ pertanto l'equazione della tangente è $y = m(x-2)+3$ dove $m = f'(2)$. Utilizzando la proprietà del cambiamento di base dei logaritmi, scriviamo la funzione $f(x) = \log_x\left(x^2 + 4\right)$ come $f(x) = \dfrac{\ln\left(x^2+4\right)}{\ln x}$ la cui derivata è

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{2x}{x^2+4}\right)\cdot \ln x - \dfrac{1}{x}\cdot \ln\left(x^2+4\right)}{\ln^2 x}$$, pertanto

$$m = f'(2) = \frac{\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln 8}{\ln^2 2} = -\frac{\ln 2}{\ln^2 2} = -\frac{1}{\ln 2}$$ e la tangente ha equazione

$$y = -\frac{1}{\ln 2}\cdot (x-2) + 3 = -\frac{x}{\ln 2} + 3 + \frac{2}{\ln 2}.$$

Quesito 5

La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y = x^2\sqrt{x+1}$ e dall'asse *x* nell'intervallo $-1 \le x \le 0$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse *x*, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di Σ.

Ogni sezione è un quadrato di area $S(x) = x^4(x+1)$ pertanto il volume del solido Σ si ottiene integrando la superficie $S(x) = x^4(x+1)$ in $[-1,0]$:

$$V(\Sigma) = \int_{-1}^{0} S(x)dx = \int_{-1}^{0} x^4(x+1)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (x^5 + x^4)dx = \left[\frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$$

Quesito 6

Sia data la funzione: $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{per} \quad -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{e^{x^2}-1}{x\sin x} & \text{per} \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$

Si dica se essa è continua nel punto $x = 0$.

Per dire se la funzione è continua in $x = 0$, è necessario calcolare i limiti a destra e sinistra di $x = 0$ e confrontarli: se sono uguali la funzione è continua in $x = 0$ altrimenti è discontinua.
Il limite sinistro vale: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(1-x) = 1$ mentre il limite destro vale $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-1}{x\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}}$; sfruttando i limiti notevoli si

ha $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-1}{x^2}=1$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}=1$ pertanto $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-1}{x\sin x}=1$, di conseguenza la funzione è continua in $x=0$.

Quesito 7

Si determini il campo di esistenza della funzione: $y=\log\frac{8-x}{3x+2}+\sqrt{5+4x-x^2}$.

Il campo di esistenza è dato dal seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \frac{8-x}{3x+2}>0 \\ 5+4x-x^2\geq 0 \end{cases}$$

in cui la prima disequazione garantisce l'esistenza del logaritmo e la seconda garantisce l'esistenza della radice.

La disequazione $\frac{8-x}{3x+2}>0$ è soddisfatta per $-\frac{2}{3}<x<8$ mentre la disequazione $5+4x-x^2\geq 0$ ovvero $(x-5)(x+1)\leq 0$ è soddisfatta per $-1\leq x\leq 5$, pertanto il sistema di disequazioni equivale a $\begin{cases} -\frac{2}{3}<x<8 \\ -1\leq x\leq 5 \end{cases}$

la cui soluzione è $-\frac{2}{3}<x\leq 5$.

Quesito 8

Un tetraedro regolare di rame (densità $\rho = 8{,}9\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$), avente lo spigolo $\mathrm{l} = 6\,\mathrm{cm}$, presenta all'interno una cavità di forma sferica. Sapendo che la massa del tetraedro è m = 200 g, si calcoli la lunghezza del raggio della cavità.

Il volume di un tetraedro di spigolo $\mathrm{l} = 6\,\mathrm{cm}$ è $V_{tetraedro} = \frac{\sqrt{2}}{12} l^3$; se il tetraedro fosse pieno la sua massa sarebbe pari al prodotto della densità $\rho = 8{,}9\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$ per il volume, cioè

$M = \rho \cdot V_{tetraedro} = 8{,}9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 6^3 = 226{,}56$ grammi; la massa mancante è quindi $m' = 226{,}56 - 200 = 26{,}56$ grammi corrispondente a un volume $V' = \frac{m'}{\rho} = \frac{26{,}56}{8{,}9} = 2{,}98\ \mathrm{cm}^3$. Imponendo che il volume della sfera di raggio *R*, sia uguale a $V' = 2{,}98\ \mathrm{cm}^3$ si ottiene

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2{,}98 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{2{,}98 \cdot 3}{4\pi}} \cong 0{,}89\ \mathrm{cm}.$$

Quesito 9

Si calcoli il valore medio della funzione: $y=\dfrac{x^5-1}{x^2+1}$, nell'intervallo $0\le x\le 1$.

Ricordiamo innanzitutto il teorema della media integrale:
Se la funzione $f(x)$ *è continua nell'intervallo chiuso* $[a,b]$, *esiste almeno un punto* $c\in(a,b)$ *in cui risulta* $\int_a^b f(x)dx=(b-a)\cdot f(c)$ *o equivalentemente* $f(c)=\dfrac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$.

Nel caso in esame il valor medio è

$$V_M=\int_0^1\left(\frac{x^5-1}{x^2+1}\right)dx=\int_0^1\left(x^3-x+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\arctan x\right]_0^1=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi+1}{4}$$

Quesito 10

Si dimostri che il teorema di Pitagora è un caso particolare del teorema di Carnot.

Se in un triangolo sono note le misure di due lati *a*, *b* e dell'angolo α compreso fra essi, il teorema di Carnot ci permette di calcolare la misura del terzo lato *c* attraverso la formula $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$. Se il triangolo è rettangolo, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e, poiché $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, il terzo lato misura $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, pertanto è stato dimostrato che il teorema di Pitagora è il caso particolare del teorema di Carnot per $\alpha = \frac{\pi}{2}$.