PROBLEMA 1

La sezione trasversale di un canale di imgazione ha la forma di un trapezio isoscele con la base maggiore in alto. Sia la base minore che i due lati obliqui misurano 2 metri.

1. Se x è l'angolo acuto del trapezio, si dimostri che l'area della sezione trasversale del canale è:

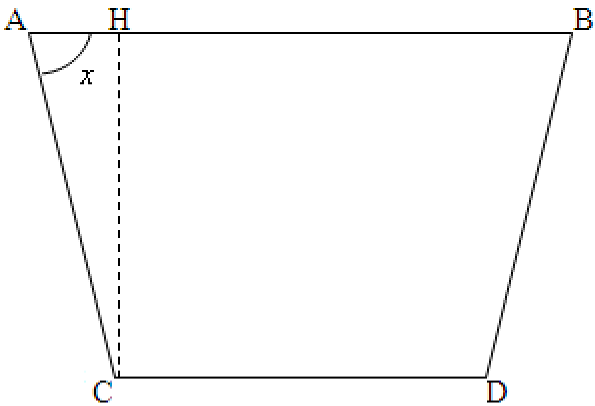
$$A(x) = 4\sin x(1+\cos x)$$

2. Si studi la funzione $A(x)$ e se ne tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.
3. Si calcoli l'area della regione di piano σ delimitata da γ e dall'asse delle x.
4. Si scelga a caso un punto all'interno del rettangolo determinato dagli assi cartesiani, dalla retta $x = \pi$ e dalla tangente alla curva γ nel suo punto di massimo relativo. Si determini la probabilità che il punto scelto a caso risulti esterno a σ.

RISOLUZIONE

Punto 1

Consideriamo la figura



La base maggiore del trapezio è pari a $\overline{AB}=\overline{CD}+2\overline{AH}$;
per il teorema sui triangoli rettangoli
$\overline{AH}=\overline{AC}\cos x=2\cos x, \overline{CH}=\overline{AC}\sin x=2\sin x$ pertanto la base maggiore misura $\overline{AB}=2+4\cos x$ e l'area del trapezio isoscele è

$$A(x)=\frac{\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)\cdot\overline{CH}}{2}=\frac{(2+4\cos x+2)\cdot 2\sin x}{2}=4\sin x\cdot(1+\cos x)$$

con la limitazione geometrica $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Punto 2

Studiamo la funzione $A(x)=4\sin x(1+\cos x)$ nell'intervallo $0\le x\le 2\pi$.

Dominio: $[0,2\pi]$;

Intersezione ascisse:

$A(x)=4\sin x(1+\cos x)=0 \Rightarrow \sin x=0 \vee \cos x=-1$; le soluzioni di $\sin x=0$ sono $x=0 \vee x=\pi \vee x=2\pi$ mentre la soluzione di $\cos x=-1$ è $x=\frac{3\pi}{2}$;

Intersezioni ordinate: $x = 0 \Rightarrow A(0) = 0$;
Simmetrie: la funzione presenta una simmetria dispari rispetto alla retta $x = \pi$ in quanto
$A(2\pi - x) = 4\sin(2\pi - x)[1 + \cos(2\pi - x)] = -4\sin x(1 + \cos x) = -A(x)$
ed è inoltre periodica di periodo $T = 2\pi$;
Positività: poiché $(1 + \cos x) \geq 0 \ \ \forall x \in [0,2\pi]$, la funzione è positiva negli intervalli in cui $\sin x$ è positiva ovvero negli intervalli in cui $\sin x > 0$; pertanto $A(x) = 4\sin x(1 + \cos x) \geq 0 \Rightarrow x \in (0, \pi)$;
Asintoti verticali: non ve ne sono in quanto la funzione non presenta punti di discontinuità;
Asintoti orizzontali: non ve ne sono in quanto il dominio è $[0,2\pi]$;
Asintoti obliqui: non ve ne sono in quanto il dominio è $[0,2\pi]$;
Crescenza e decrescenza: la derivata prima è
$f'(x) = 4\cos x + 4\cos 2x = 4(2\cos^2 x + \cos x - 1) = 4(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$
poiché $(1 + \cos x) \geq 0 \ \ \forall x \in [0,2\pi]$ la derivata prima sarà positiva se $(2\cos x - 1) > 0$ cioè se $\cos x > \frac{1}{2}$ ovvero per $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$

pertanto la funzione è strettamente crescente in $\left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$ e

strettamente decrescente in $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ e presenta un massimo relativo ed

assoluto in $M\left(\frac{\pi}{3}, 3\sqrt{3}\right)$ e un minimo relativo ed assoluto in

$m\left(\frac{5\pi}{3}, -3\sqrt{3}\right)$;
Concavità e convessità: la derivata seconda è pari a
$f''(x) = -4\sin x(4\cos x + 1)$ e si annulla se $\sin x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{4}$;
le soluzioni di $\sin x = 0$ sono $x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi$ mentre le soluzioni di $\cos x = -\frac{1}{4}$ sono $x = \pi - \arccos\left(\frac{1}{4}\right) \vee x = \pi + \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$

pertanto in $(0,2\pi)$ la funzione presenta cinque flessi, di cui $F_1(\pi,0)$ a tangente orizzontale e

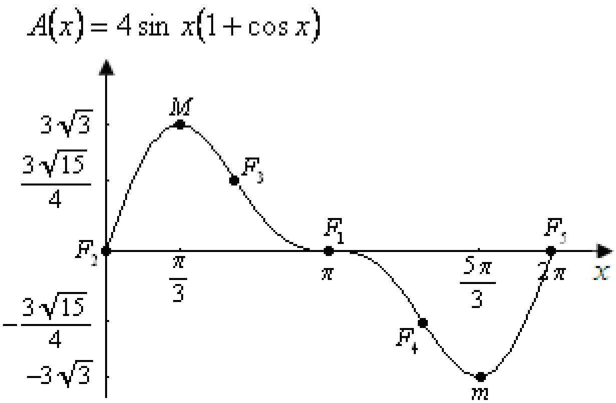
$$F_2(0,0), F_3\left(\pi-\arccos\left(\frac{1}{4}\right),\frac{3\sqrt{15}}{4}\right), F_4\left(\pi+\arccos\left(\frac{1}{4}\right),-\frac{3\sqrt{15}}{4}\right), F_5(2\pi,0)$$

a tangente obliqua e ha concavità verso l'alto in

$\left(\pi-\arccos\left(\frac{1}{4}\right),\pi\right)\cup\left(\pi+\arccos\left(\frac{1}{4}\right),2\pi\right)$ e verso il basso in

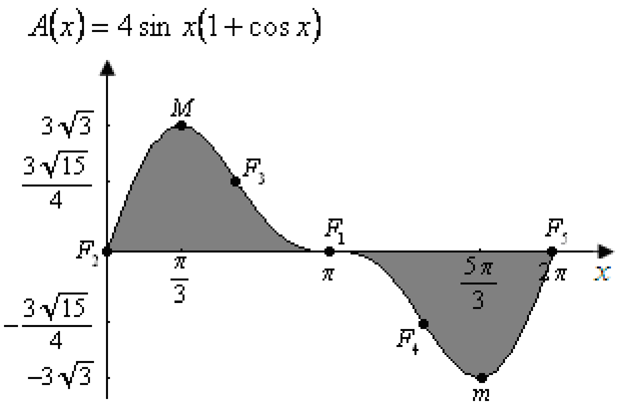
$\left(0,\pi-\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)\cup\left(\pi,\pi+\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)$.

Il grafico γ è di seguito presentato.



Punto 3

L'area da calcolare è raffigurata in grigio di seguito.



Vista la simmetria della funzione rispetto alla retta $x = \pi$, essa è pari a:

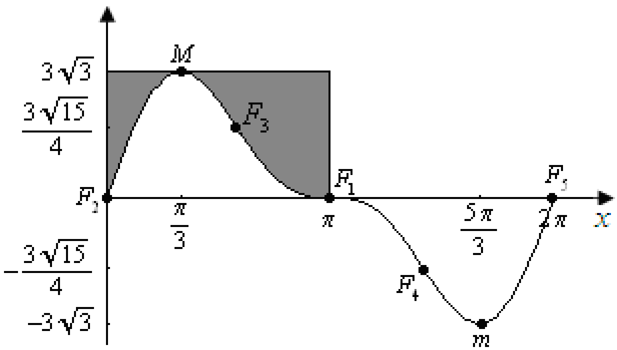
$$S = 2\int_0^{\pi}(4\sin x + 4\sin x\cos x)dx = 2\int_0^{\pi}(4\sin x + 2\sin 2x)dx =$$

$$= 2[-4\cos x - \cos 2x]_0^{\pi} = 2[(4-1)-(-4-1)] = 16$$

Punto 4

Consideriamo la figura di seguito.
Bisogna calcolare la probabilità che il punto scelta a caso appartenga alla regione in grigio.

$A(x) = 4\sin x(1+\cos x)$



La tangente a γ nel punto di massimo relativo $M\left(\frac{\pi}{3}, 3\sqrt{3}\right)$ ha equazione $y = 3\sqrt{3}$; il rettangolo ha area $3\sqrt{3}\pi$, mentre l'area della regione di piano delimitata da γ e dalle rette $x = 0$ e $x = \pi$ è 8 pertanto la probabilità richiesta è $p = \frac{3\sqrt{3}\pi - 8}{3\sqrt{3}\pi} \cong 50{,}1\%$.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x)=\frac{\ln^2 x+2\ln x+2}{x}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*.
2. Si scrivano le equazioni della tangente a γ nei punti di flesso e si calcoli l'area del trapezio che esse formano con gli assi cartesiani.
3. Si calcoli il volume del solido generato dal suddetto trapezio in una rotazione completa attorno all'asse *x*.
4. Si calcoli l'area della regione di piano, limitata dalla curva γ, dall'asse delle *x* e dalle rette $x=1,\ x=e$.

RISOLUZIONE

Punto 1

Studiamo la funzione $f(x)=\dfrac{\ln^2 x+2\ln x+2}{x}$

Dominio: $x>0$;
Intersezione ascisse: non esistono intersezioni con l'asse delle ascisse in quanto il numeratore $\ln^2 x+2\ln x+2$, essendo esprimibile come $(\ln x+1)^2+1$, nel dominio è sempre positivo e non si annulla mai;
Intersezioni ordinate: non vi sono intersezioni con l'asse delle ordinate in quanto $x=0$ non appartiene al dominio;
Simmetrie: non ve ne sono;
Positività: poichè sia il numeratore $\ln^2 x+2\ln x+2=(\ln x+1)^2+1$ che il denominatore sono positivi all'interno del dominio $D=(0,+\infty)$, deduciamo che la funzione è positiva nel dominio $D=(0,+\infty)$;
Asintoti verticali: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ pertanto $x=0$ è asintoto verticale destro;

Asintoti orizzontali: il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$ pertanto applicando de l'Hopital si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x + 2\ln x + 2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2(\ln x + 1)}{x}$; il limite si presenta ancora nella forma indeterminata $0\cdot\infty$ per cui riapplicando de l'Hopital diventa $\lim_{x\to+\infty} \frac{2(\ln x + 1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ pertanto $y = 0$ è asintoto orizzontale destro;

Asintoti obliqui: non ve ne sono in quanto $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ e $q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = 0$;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x}\right)\cdot x - \left(\ln^2 x + 2\ln x + 2\right)\cdot 1}{x^2} = -\frac{\ln^2 x}{x^2}$$

per cui la funzione è strettamente decrescente in tutto il dominio $D = (0,+\infty)$;

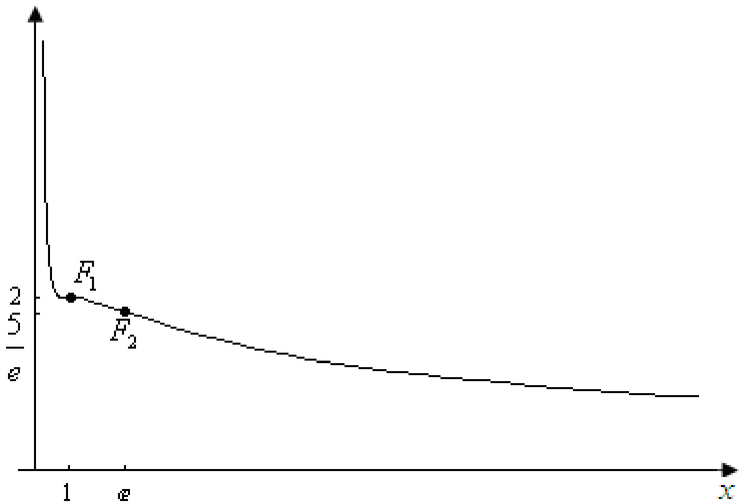
Concavità e convessità: la derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{-\frac{2\ln x}{x}\cdot x^2 - \left(-\ln^2 x\right)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x \cdot (\ln x - 1)}{x^3}$$

e, nel dominio $D = (0,+\infty)$, risulta essere positiva se $\ln x \cdot (\ln x - 1) > 0$ cioè se $\ln x < 0 \vee \ln x > 1$ ovvero se $x < 1 \vee x > e$; tenendo conto della condizione $x > 0$, deduciamo che la funzione rivolge concavità verso l'alto in $(0,1)\cup(e,+\infty)$ e verso il basso in $(1,e)$ e presenta un flesso a tangente orizzontale in $F_1(1,2)$ e uno a tangente obliqua in $F_2\left(e, \frac{5}{e}\right)$.

Il grafico γ è di seguito presentato:

$$f(x)=\frac{\ln^2 x+2\ln x+2}{x}$$



Punto2

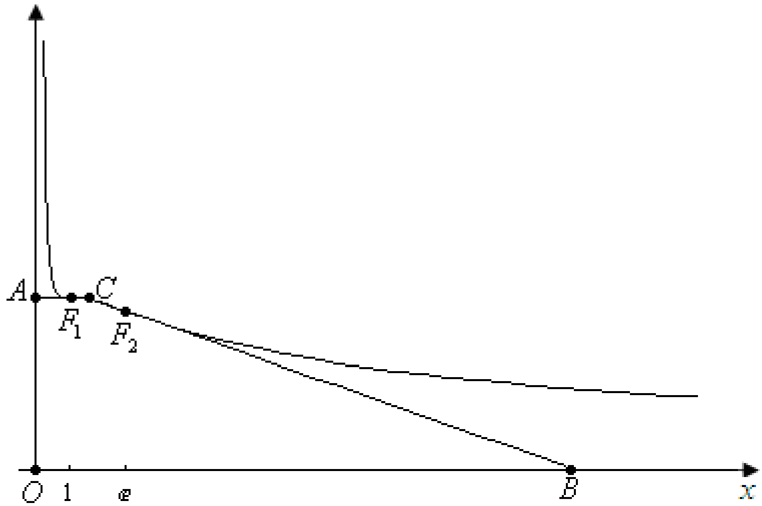
La tangente a γ in $F_1(1,2)$ è orizzontale ed ha equazione $y=2$ mentre la tangente in $F_2\left(e,\frac{5}{e}\right)$ ha equazione $y=m(x-e)+\frac{5}{e}$ con

$$m=f'(e)=\left[-\frac{\ln^2 x}{x^2}\right]_{x=e}=-\frac{1}{e^2}\text{, cioè } y=-\frac{1}{e^2}(x-e)+\frac{5}{e}=-\frac{1}{e^2}x+\frac{6}{e}.$$

La tangente $y=2$ interseca l'asse delle ordinate in $A(0,2)$ mentre la tangente $y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{6}{e}$ interseca l'asse delle ascisse in $B(6e,0)$, ed entrambe si intersecano in $C(6e-2e^2,2)$.

Il trapezio di cui calcolare l'area è di seguito raffigurato.

$$f(x) = \frac{\ln^2 x + 2\ln x + 2}{x}$$



L'altezza del trapezio è $\overline{AO} = 2$, la base maggiore $\overline{OB} = 6e$ e la base minore $\overline{AC} = 6e - 2e^2$ di conseguenza la sua area è pari a

$$S = \frac{\overline{AO} \cdot \left(\overline{OB} + \overline{AC}\right)}{2} = 2e(6 - e).$$

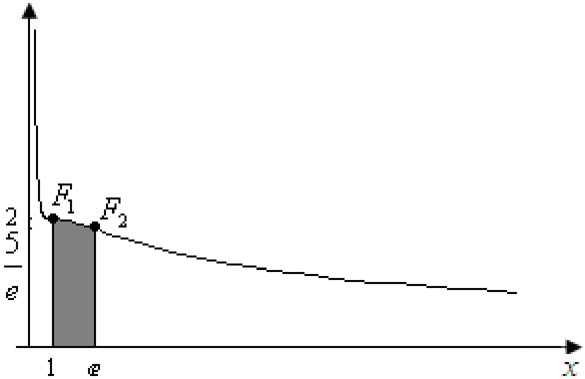
Punto 3

Il volume del solido generato dal suddetto trapezio in una rotazione completa attorno all'asse *x* si compone di un cilindro di altezza $\overline{AC} = 6e - 2e^2$ e raggio di base $\overline{AO} = 2$ il cui volume è $V_{Cilindro} = \pi \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AO}^2 = 8\pi e(3 - e)$ e di un cono di altezza pari a $\overline{OB} - \overline{AC} = 2e^2$ e raggio di base $\overline{AO} = 2$ il cui volume è $V_{Cono} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\overline{OB} - \overline{AC}\right) \cdot \overline{AO}^2 = \frac{8}{3}\pi e^2$. Di conseguenza il volume del solido è $V_{Cilindro} + V_{Cono} = 8\pi e(3 - e) + \frac{8}{3}\pi e^2 = \frac{8\pi e(9 - 2e)}{3}$.

Punto 4

L’area richiesta è di seguito raffigurata in grigio

$$f(x)=\frac{\ln^2 x+2\ln x+2}{x}$$



Essa è pari a:

$$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(\frac{\ln^2 x+2\ln x+2}{x}\right)dx=\left[\frac{\ln^3 x}{3}+\ln^2 x+2\ln|x|\right]_1^e=\frac{1}{3}+1+2=\frac{10}{3}$$

,

QUESTIONARIO

Quesito 1

Alcuni ingegneri si propongono di costruire una galleria rettilinea che colleghi il paese A, situato su un versante di una collina, col paese B, che si trova sul versante opposto. Da una terza località C i progettisti misurano le distanze *CA*=837 *metri*, *CB*=1764 *metri* e l'angolo $A\hat{C}B = 44{,}5°$. Si calcoli quale sarà lunghezza della galleria.

Applicando il teorema di Carnot si ha:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 - 2\cdot\overline{CA}\cdot\overline{CB}\cdot\cos\left(A\hat{C}B\right)} =$$

$$= \sqrt{837^2 + 1164^2 - 2\cdot 837\cdot 1164\cdot\cos\left(44{,}5°\right)} \cong 815{,}9 \text{ metri}$$

Quesito 2

Data la funzione $\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2}$, quando x tende a zero.

La funzione $\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2}$ può essere scritta come $\frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^2(1-\cos x)}$; se x tende a zero il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ pertanto applicando il teorema di De l'Hopital si ha

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^2(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x - 2\sin x}{2x - 2x\cos x + x^2\sin x}$ che si presenta ancora nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$; riapplicando De l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x}{2x-2x\cos x+x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x}{2-2\cos x+4x\sin x+x^2\cos x}$$ che è ancora nella forma $\frac{0}{0}$, per cui procedendo ancora con de l'Hopital si ha

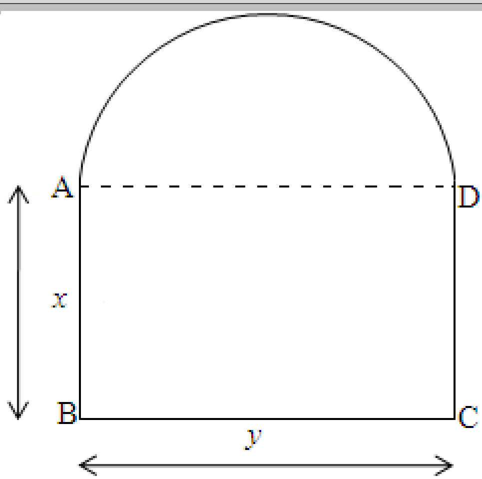
$$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x}{2-2\cos x+4x\sin x+x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{6\sin x+6x\cos x-x^2\sin x}$$ che è ancora nella forma $\frac{0}{0}$, per cui applicando l'ultima volta de l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{6\sin x+6x\cos x-x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{12\cos x-8x\sin x-x^2\cos x}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

Quesito 3

Una finestra ha la forma di un rettangolo sormontato da un semicerchio avente per diametro un lato del rettangolo; il contorno della finestra misura l. Si determinino le dimensioni del rettangolo affinché l'area totale della finestra sia massima.

Osserviamo che nel testo non è indicato esplicitamente che uno dei due, il rettangolo o il semicerchio dovessero essere forniti di lato o, rispettivamente di diametro.
Proporremo pertanto due soluzioni, la prima che non considera il lato o diametro rispettivamente del rettangolo o semicerchio, e la seconda, invece, che considera tale lato/diametro.
Consideriamo la figura.



Siano x e y le misure dei lati AB e BC del rettangolo con $0 < x < \frac{l}{2}, 0 < y < \frac{l}{2}$.

Nel primo caso, il contorno della finestra è pari alla somma del perimetro del rettangolo cui va tolto il diametro y del semicerchio e del contorno del semicerchio. Il contorno del semicerchio è pari a $\pi \cdot R = \frac{\pi y}{2}$, pertanto si ha $2x + y + \frac{\pi y}{2} = l$ da cui $x = \frac{l}{2} - y\left(\frac{\pi+2}{4}\right)$.

Poiché $0 < x < \frac{l}{2}$, la condizione $x = \frac{l}{2} - y\left(\frac{\pi+2}{4}\right)$ ci fa ricavare una condizione più stringente su y: $0 < \frac{l}{2} - y\left(\frac{\pi+2}{4}\right) < \frac{l}{2} \Rightarrow 0 < y < \frac{2l}{\pi+2}$.

L'area totale della finestra è pari alla somma dell'area del rettangolo uguale a $xy = \frac{ly}{2} - y^2\left(\frac{\pi+2}{4}\right)$ e dell'area del semicerchio uguale a $\frac{\pi \cdot R^2}{2} = \frac{\pi y^2}{8}$: $S(y) = \frac{ly}{2} - y^2\left(\frac{\pi+2}{4}\right) + \frac{\pi y^2}{8} = \frac{ly}{2} - y^2\left(\frac{\pi+4}{8}\right)$ con $0 < y < \frac{2l}{\pi+2}$. Poiché l'area della finestra è una parabola con concavità verso il basso, il massimo è raggiunto nell'ascissa del vertice:

$$y_{\max} = -\frac{\frac{l}{2}}{-2\left(\frac{\pi+4}{8}\right)} = \frac{2l}{\pi+4}$$

, compreso nell'intervallo $\left(0, \frac{2l}{\pi+2}\right)$, cui corrisponde $x_{\max} = \frac{l}{2} - \left(\frac{2l}{\pi+4}\right)\left(\frac{\pi+2}{4}\right) = \frac{l}{\pi+4}$ e

$$S(y_{\max}) = \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{2l}{\pi+4}\right) - \left(\frac{2l}{\pi+4}\right)^2\left(\frac{\pi+4}{8}\right) = \frac{l^2}{2(\pi+4)}.$$

Nel secondo caso, invece, si ha $2x+2y+\frac{\pi y}{2}=l$ da cui

$x=\frac{l}{2}-y\left(\frac{\pi+4}{4}\right)$ pertanto $0<\frac{l}{2}-y\left(\frac{\pi+4}{4}\right)<\frac{l}{2}\Rightarrow 0<y<\frac{2l}{\pi+4}$ e

$S(y)=\frac{ly}{2}-y^2\left(\frac{\pi+4}{4}\right)+\frac{\pi y^2}{8}=\frac{ly}{2}-y^2\left(\frac{\pi+8}{8}\right)$; il massimo è raggiunto

nell'ascissa del vertice: $y_{\max}=-\frac{\frac{l}{2}}{-2\left(\frac{\pi+8}{8}\right)}=\frac{2l}{\pi+8}$, compreso

nell'intervallo $\left(0,\frac{2l}{\pi+4}\right)$, cui corrisponde

$x_{\max}=\frac{l}{2}-\left(\frac{2l}{\pi+8}\right)\left(\frac{\pi+4}{4}\right)=\frac{2l}{\pi+8}$ e

$S(y_{\max})=\frac{l}{2}\cdot\left(\frac{2l}{\pi+8}\right)-\left(\frac{2l}{\pi+8}\right)^2\left(\frac{\pi+8}{8}\right)=\frac{l^2}{2(\pi+8)}$.

Quesito 4

Si scriva l'equazione della tangente al grafico della funzione:

$$f(x)=\log_x\left(x^2+4\right)$$

nel punto P di ascissa $x=2$.

Il punto P ha coordinate $(2,\log_2 8)\equiv(2,3)$ pertanto l'equazione della tangente è $y=m(x-2)+3$ dove $m=f'(2)$. Utilizzando la proprietà del cambiamento di base dei logaritmi, scriviamo la funzione $f(x)=\log_x\left(x^2+4\right)$ come $f(x)=\frac{\ln\left(x^2+4\right)}{\ln x}$ la cui derivata è

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{2x}{x^2+4}\right)\cdot\ln x-\frac{1}{x}\cdot\ln\left(x^2+4\right)}{\ln^2 x}$$, pertanto

$$m=f'(2)=\frac{\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 8}{\ln^2 2}=-\frac{\ln 2}{\ln^2 2}=-\frac{1}{\ln 2}$$ e la tangente ha equazione

$$y=-\frac{1}{\ln 2}\cdot(x-2)+3=-\frac{x}{\ln 2}+3+\frac{2}{\ln 2}.$$

Quesito 5

La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y=x^2\sqrt{x+1}$ e dall'asse x nell'intervallo $-1\le x\le 0$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse *x*, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di Σ.

Ogni sezione è un quadrato di area $S(x)=x^4(x+1)$ pertanto il volume del solido Σ si ottiene integrando la superficie $S(x)=x^4(x+1)$ in $[-1,0]$:

$$V(\Sigma)=\int_{-1}^{0}S(x)dx=\int_{-1}^{0}x^4(x+1)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(x^5+x^4\right)dx=\left[\frac{x^6}{6}+\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{0}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$$

Quesito 6

Sia dimostri che $\int_{1}^{2}\frac{x}{x-1}dx=+\infty$.

La funzione integranda non è definita in $x=1$ in quanto $\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\infty$, pertanto l'integrale da calcolare è un integrale improprio. Di conseguenza calcoliamo $\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{x}{x-1}dx$ e poi facendo tendere $\varepsilon \to 0^+$ calcoliamo il valore di $\int_{1}^{2} \frac{x}{x-1}dx = +\infty$.

L'integrale definito $\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{x}{x-1}dx$ è pari a

$\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{x}{x-1}dx = \int_{1+\varepsilon}^{2} \left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx = \left[x+\ln|x-1|\right]_{1+\varepsilon}^{2} = (1-\varepsilon-\ln\varepsilon)$, per cui

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{x}{x-1}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (1-\varepsilon-\ln\varepsilon) = +\infty.$$

Quesito 7

Tenuto conto che: $\log 2 = \int_{0}^{\pi/3} \tan x dx$

si calcoli un'approssimazione di log2, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Innanzitutto proviamo che $\log 2 = \int_{0}^{\pi/3} \tan x dx$. Si ha

$$\int_{0}^{\pi/3} \tan x dx = \left[-\ln|\cos x|\right]_{0}^{\pi/3} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2.$$

Come metodo di integrazione numerica, utilizziamo il metodo dei trapezi. Si suddivide l'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ in 4 intervalli di ampiezza $h = \frac{\pi}{12}$ mediante i 5 punti $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{12}, x_2 = \frac{\pi}{6}, x_3 = \frac{\pi}{4}, x_4 = \frac{\pi}{3}$ cui corrispondono i valori della funzione

$y_0 = f(0) = \tan(0) = 0,$

$$y_1 = f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3},$$

$$y_2 = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$y_3 = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

$$y_4 = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

L'area approssimata è

$$\int_0^{\pi/3} \tan x dx \cong \frac{\frac{\pi}{3}-0}{4}\left(\frac{y_0+y_4}{2}+y_1+y_2+y_3\right) = \frac{\pi}{12}\left(\frac{0+\sqrt{3}}{2}+2-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right) =$$

$$= \frac{\pi}{12}\left(\frac{18-\sqrt{3}}{6}\right) \cong 0{,}7098$$

con un errore

$$\varepsilon_n \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot\max_{[a,b]}|f''(x)| = \frac{\left(\frac{\pi}{3}-0\right)^3}{12\cdot 4^2}\cdot\max_{\left[0,\frac{\pi}{3}\right]}|f''(x)| = \frac{\pi^3}{5184}\cdot\max_{\left[0,\frac{\pi}{3}\right]}|f''(x)|$$

in cui la derivata seconda è $f''(x) = \frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2}$; il massimo di

$|f''(x)| = \left|\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\right|$ in $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ è assunto per $x = \frac{\pi}{3}$ e vale

$\max_{\left[0,\frac{\pi}{3}\right]}|f''(x)| = 8\sqrt{3}$ pertanto l'errore commesso è

$\varepsilon_n \leq \frac{\pi^3}{5184} \cdot 8\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{648}\pi^3 \cong 0{,}083$. Infatti il valore reale di $\log 2$ è 0,6931 e la differenza tra il valore approssimato e quello reale è $|0{,}7098 - 0{,}6931| = 0{,}0167 < 0{,}083$.

Un'approssimazione migliore si ottiene incrementando il numero di intervalli in cui si divide $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Quesito 8

Si determini per quale valore di *x* si ha $e^{10^x} = 10^{e^x}$.

Applicando il logaritmo naturale ad ambo i membri l'equazione diventa $10^x = e^x \cdot \ln 10$ e se riapplichiamo il logaritmo naturale ad ambo i membri si ha $x \cdot \ln 10 = x + \ln(\ln 10)$ pertanto la soluzione dell'equazione è $x = \frac{\ln(\ln 10)}{\ln 10 - 1}$.

Quesito 9

Si determini la probabilità che in otto lanci di una moneta si presenti croce un numero dispari di volte.

La probabilità di ottenere croce in un lancio è $p = \frac{1}{2}$; la probabilità di ottenere *k* volte croce in *n* lanci, con $n > k$, è data dalla distribuzione binomiale $P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, pertanto la probabilità che in otto

lanci di una moneta si presenti croce un numero dispari di volte è pari a
$P(1)+P(3)+P(5)+P(7)=$

$$=\binom{8}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^7+\binom{8}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5+\binom{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3+\binom{8}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^1=$$

$$=\left[\binom{8}{1}+\binom{8}{3}+\binom{8}{5}+\binom{8}{7}\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8=\left(\frac{8!}{7!\cdot 1!}+\frac{8!}{3!\cdot 5!}+\frac{8!}{5!\cdot 3!}+\frac{8!}{1!\cdot 7!}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8=$$

$$=(8+56+56+8)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{2}$$

Quesito 10

In una figliata di quattro gattini, è più probabile che due siano maschi e due siano femmine, oppure che tre siano di un sesso e uno dell'altro?

La probabilità di ottenere un maschio o una femmina è $p=\frac{1}{2}$;

la probabilità di ottenere *2* maschi su 4 gattini, usando la distribuzione binomiale, è data $P(2)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=\frac{3}{8}$,

mentre la probabilità di ottenere 3 maschi o tre femmine è

$$P(1)+P(3)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3+\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\left(\frac{4!}{3!\cdot 1!}+\frac{4!}{1!\cdot 3!}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=$$

$$=(4+4)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{2}$$

Quindi la probabilità di ottenere 3 gattini dello stesso sesso è maggiore della probabilità di ottenere 2 maschi e due femmine.