PROBLEMA 1

Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio *1*, in modo che la base maggiore contenga il diametro.

1. Si calcoli, in funzione dell'ampiezza *x* del suo angolo acuto, il volume del solido generato dal trapezio in una rotazione di 180° intorno alla congiungente dei punti medi delle basi, controllando che risulta:

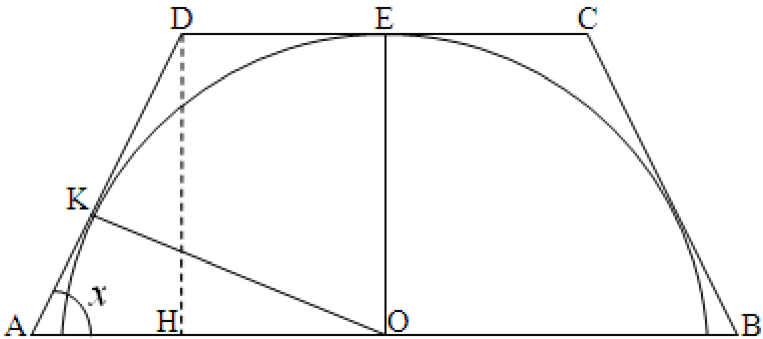
$$V(x) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\cos^2 x - 3\cos x + 3}{\sin^2 x}$$

2. Si studi la funzione $f(x) = 3V(x)/\pi$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 < x < 2\pi$, mettendo in evidenza la parte di grafico compatibile con i dati del problema.
3. Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di ascissa $x = \pi/2$ e si calcoli l'area del triangolo che essa determina con l'asse *x* e con la retta di equazione $x = \pi$.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse *x* e dalle rette di equazione $x = \pi/4$ e $x = \pi/2$.

RISOLUZIONE

Punto 1

Consideriamo la figura sottostante.



Sia $H\hat{A}D = x$ con $0 < x < \pi/2$.

Il triangolo AKO è rettangolo in K, pertanto a norma del teorema sui triangoli rettangoli $\overline{KO} = \overline{AO}\sin x \Rightarrow \overline{AO} = \frac{\overline{KO}}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}$; anche il triangolo AHD è rettangolo in H pertanto applicando il toerema sui triangoli rettangoli $\overline{DH} = \overline{AH}\tan x \Rightarrow \overline{AH} = \frac{\overline{DH}}{\tan x} = \frac{1}{\tan x}$. Di conseguenza la semibase minore del trapezio misura

$$\overline{DE} = \overline{OH} = \overline{AO} - \overline{AH} = \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right) = \left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right).$$

Il solido generato dal trapezio in una rotazione di 180° intorno alla congiungente dei punti medi delle basi è un tronco di cono il cui volume è uguale a:

$$V(x) = \frac{\pi}{3}\cdot\overline{DH}\cdot\left(\overline{AO}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{AO}\cdot\overline{DE}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1+\cos^2 x - 2\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\right) = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{\cos^2 x - 3\cos x + 3}{\sin^2 x}$$

Punto 2

Studiamo la funzione $f(x)=\frac{\cos^2 x-3\cos x+3}{\sin^2 x}$ in $(0,2\pi)$

Dominio: $\sin^2 x\neq 0\Rightarrow x\neq 0\wedge x\neq \pi\wedge x\neq 2\pi$ pertanto il dominio è $(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$;

Intersezione ascisse: la funzione non si annulla mai in quanto l'equazione $(\cos^2 x-3\cos x+3)=0$ non presenta soluzioni reali dal momento che il discriminante è negativo e le soluzioni pertanto sono complesse;

Intersezioni ordinate: non ci sono intersezioni con l'asse delle ordinate in quanto $x=0$ non appartiene al dominio;

Simmetrie: la funzione è pari in quanto

$$f(-x)=\frac{\cos^2(-x)-3\cos(-x)+3}{\sin^2(-x)}=\frac{\cos^2 x-3\cos x+3}{\sin^2 x}=f(x)$$, è

simmetrica rispetto alla retta $x=\pi$ in quanto

$$f(2\pi-x)=\frac{\cos^2(2\pi-x)-3\cos(2\pi-x)+3}{\sin^2(2\pi-x)}=\frac{\cos^2 x-3\cos x+3}{\sin^2 x}=f(x)$$

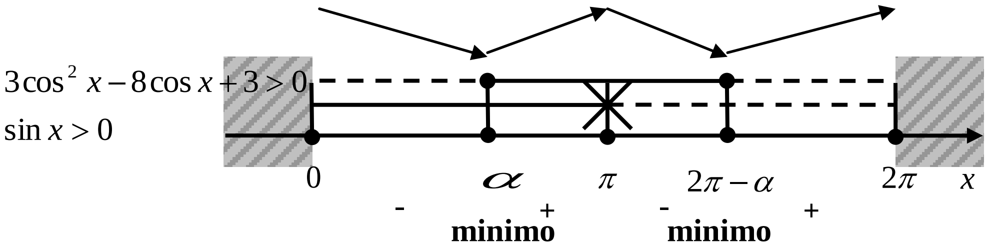
ed è periodica di periodo $T=2\pi$;

Positività: la funzione è sempre positiva in quanto sia il numeratore che il denominatore sono sempre positivi nel dominio $(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$;

Asintoti verticali: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to \pi^\pm} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to 2\pi^-} f(x)=+\infty$ pertanto le rette $x=0, x=\pi, x=2\pi$ sono asintoti verticali;

Asintoti orizzontali: non ha senso calcolarli in quanto il dominio è $(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$;

Asintoti obliqui: non ha senso calcolarli in quanto il dominio è $(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$;



Crescenza e decrescenza: la derivata prima è

$f'(x) = \dfrac{3\cos^2 x - 8\cos x + 3}{\sin^3 x}$ per cui il numeratore è positivo se

$\cos x < \dfrac{4-\sqrt{7}}{3} \vee \cos x > \dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$ e il denominatore è positivo se

$\sin x > 0$; all'interno del dominio $(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$ la disequazione

$\cos x < \dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$ è verificata per

$\arccos\left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right) < x < 2\pi - \arccos\left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$, la disequazione

$\cos x > \dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$ non è mai verificata in quanto la funzione coseno è

limitata in $[-1,1]$ e $\dfrac{4+\sqrt{7}}{3} > 1$ mentre la disequazione $\sin x > 0$ è

verificata per $0 < x < \pi$. Posto $\alpha = \arccos\left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$ il quadro dei segni

è di seguito riportato:

Dal grafico dei segni della derivata prima deduciamo che la funzione presenta due minimi relativi ed assoluti nei punti

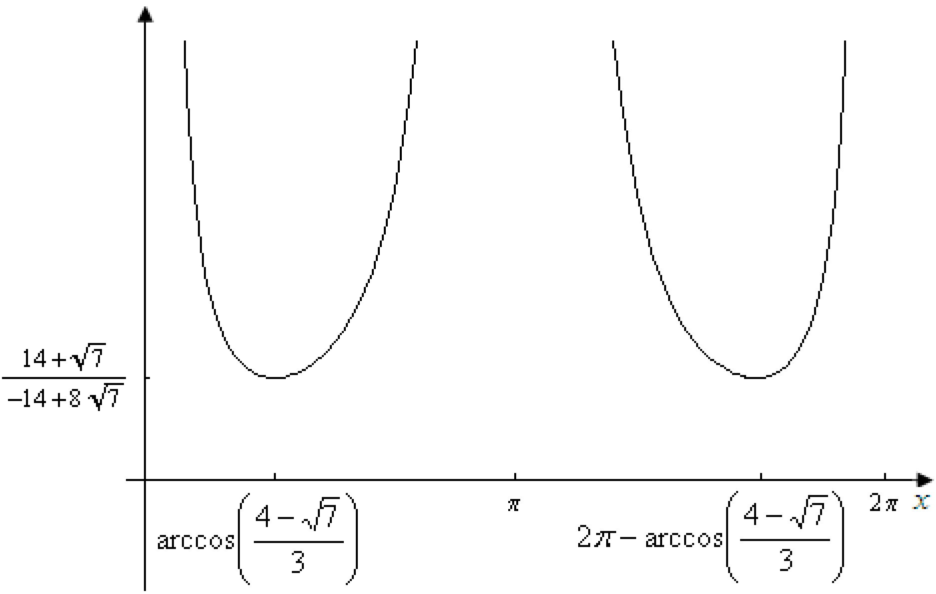
$$m_1\left(\arccos\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right),\frac{14+\sqrt{7}}{8\sqrt{7}-14}\right) \text{ ed}$$

$$m_2\left(2\pi-\arccos\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right),\frac{14+\sqrt{7}}{8\sqrt{7}-14}\right).$$

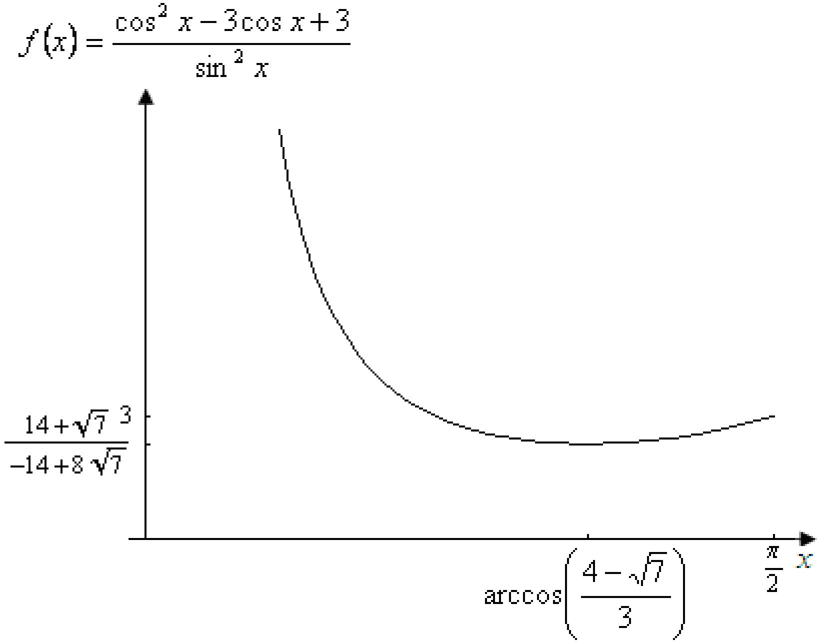
Concavità e convessità: il calcolo della derivata seconda è oneroso e lasciamo al lettore verificare che non esistono flessi e che la funzione rivolge sempre concavità verso l'alto in tutto il dominio.

Il grafico γ è di seguito presentato.

$$f(x)=\frac{\cos^2 x-3\cos x+3}{\sin^2 x}$$



Compatibilmente con i dati del problema, la parte di grafico è quella per cui $0<x<\frac{\pi}{2}$ ed è di seguito presentata.



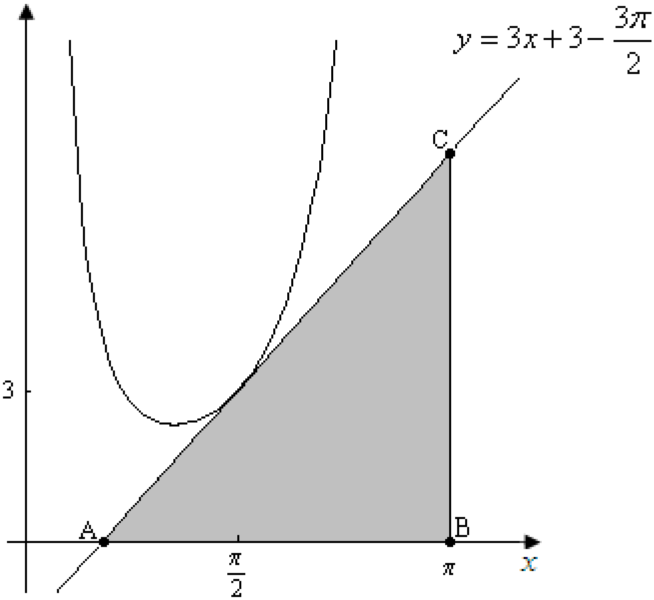
Punto 3

La tangente a γ nel punto $\left(\frac{\pi}{2},3\right)$ ha equazione $y = m\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+3$ con

$m = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ e cioè

$y = 3x + 3 - \frac{3\pi}{2}$.

L'area del triangolo da calcolare è di seguito raffigurata in grigio.

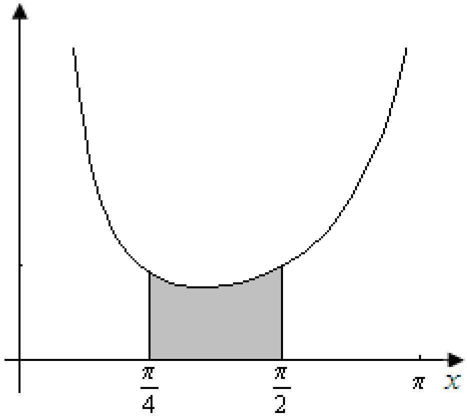


Il punto C di intersezione della tangente con la retta $x=\pi$ è $C\left(\pi,\frac{3\pi}{2}+3\right)$ mentre il punto A di intersezione della tangente con l'asse delle ascisse è $A\left(\frac{\pi}{2}-1,0\right)$. Il cateto AB del triangolo misura $\overline{AB}=x_B-x_A=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{\pi}{2}+1$ mentre il cateto BC misura $\overline{BC}=y_C-y_B=\left(\frac{3\pi}{2}+3\right)-0=3\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$ di conseguenza l'area è

$$S(ABC)=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{2}=\frac{\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\cdot 3\left(\frac{\pi}{2}+1\right)}{2}=\frac{3(\pi+2)^2}{8}.$$

Punto 4

L'area da calcolare è raffigurata di seguito in grigio.



Essa è

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos^2 x-3\cos x+3}{\sin^2 x}\right]dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1-\sin^2 x-3\cos x+3}{\sin^2 x}\right]dx=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{-\sin^2 x-3\cos x+4}{\sin^2 x}\right]dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-1-3\cos x\cdot(\sin x)^{-2}+\frac{4}{\sin^2 x}\right]dx=$$

$$=\left[-x+\frac{3}{\sin x}-4\cot x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(-\frac{\pi}{2}+3\right)-\left(-\frac{\pi}{4}+3\sqrt{2}-4\right)=7-3\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}$$

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = x\sqrt{2-x}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*.
2. Si risolva la disequazione:

$$x\sqrt{2-x} < 1$$

3. Si scriva l'equazione della tangente alla curva γ nel punto di intersezione con l'asse *y* e si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo φ che essa forma con la direzione positiva dell'asse *x*.
4. La regione finita di piano delimitata dalla curva γ e dall'asse *x* nel I quadrante è la base di un solido S, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse *x*, sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.

RISOLUZIONE

Punto 1

Studiamo la funzione $f(x) = x\sqrt{2-x}$

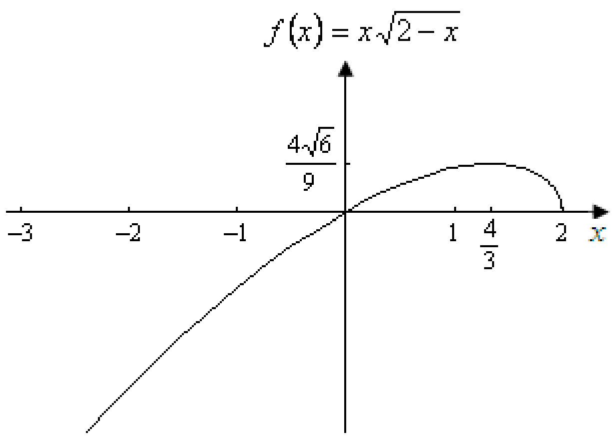
Dominio: $2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$;
Intersezione ascisse: $f(x) = x\sqrt{2-x} = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$
Intersezioni ordinate: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$;
Simmetrie: non ve ne sono;
Positività: poiché all'interno del dominio il fattore $\sqrt{2-x}$ è non negativo, la funzione è positiva se $\begin{cases} x \leq 2 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x \leq 2$;
Asintoti verticali: non ve ne sono in quanto $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$;
Asintoti orizzontali: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ per cui non ve ne sono;

Asintoti obliqui: non ve ne sono in quanto $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $f'(x)=\frac{4-3x}{2\sqrt{2-x}}$ per cui la funzione è strettamente crescente in $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$ e strettamente decrescente in $\left(\frac{4}{3},2\right)$ pertanto $M\left(\frac{4}{3},\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$ è un punto di massimo relativo ed assoluto;

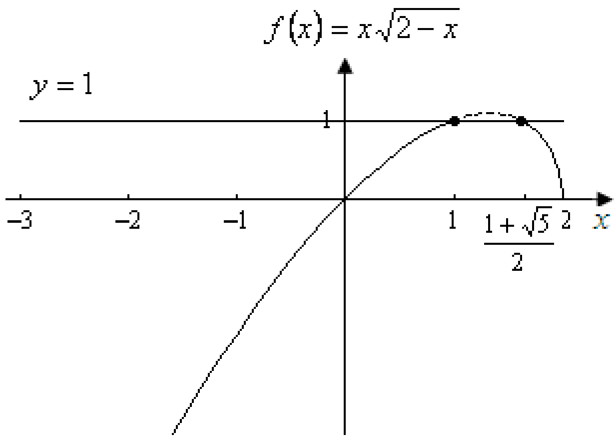
Concavità e convessità: la derivata seconda è $f''(x)=\frac{3x-8}{4\cdot(2-x)^{3/2}}$ e risulta essere negativa per ogni $x<2$, pertanto la funzione volge sempre concavità verso il basso.

Il grafico γ è di seguito presentato:



Punto2

La disequazione $x\sqrt{2-x}<1$ può essere risolta per via grafica.
Troviamo innanzitutto i valori per cui $x\sqrt{2-x}=1$; affinché l'equazione abbia senso si deve imporre $0<x<2$ in quanto per ogni $x\leq 0$ l'equazione non ha soluzioni in quanto il primo membro è negativo o nullo e il secondo è positivo. Posto quindi $0<x<2$, si elevano al quadrato ambo i membri ottenendo l'equazione risolvente $x^3-2x^2+1=0$ che può essere scomposta mediante la regola di Ruffini come $(x-1)(x^2-x-1)=0$ le cui soluzioni sono $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\vee x=1\vee x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ di cui solo $x=1$ e $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sono accettabili mentre $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ è negativa e di conseguenza non accettabile.
Guardando graficamente le intersezioni di $f(x)=x\sqrt{2-x}$ con la retta $y=1$ deduciamo che la disequazione $x\sqrt{2-x}<1$ è soddisfatta se $x<1\vee\frac{1+\sqrt{5}}{2}<x\leq 2$.



Alternativamente alla via grafica, possiamo procedere nel seguente modo.
La disequazione $x\sqrt{2-x}<1$ è verificata $\forall x \le 0$, mentre per $0<x\le 2$ equivale al sistema $\begin{cases} 2x^2-x^3<1 \\ 0<x\le 2 \end{cases}$. La disequazione $2x^2-x^3<1$ equivale a

$$x^3-2x^2-1=(x-1)(x^2-x-1)=(x-1)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)>0$$ e,

poichè per $0<x\le 2$ il fattore $\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ è positivo, essa sarà soddisfatta se $(x-1)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)>0$ cioè se $x<1 \vee x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

pertanto il sistema diventa $\begin{cases} x<1 \vee x<\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0<x\le 2 \end{cases}$ la cui soluzione è

$0<x<1 \vee \frac{1+\sqrt{5}}{2}<x\le 2$; considerando che la disequazione è verificata automaticamente $\forall x \le 0$, deduciamo che $x\sqrt{2-x}<1$ è soddisfatta per $x<1 \vee \frac{1+\sqrt{5}}{2}<x\le 2$ come già trovato per via grafica.

Punto 3

La tangente a γ in $(0,0)$ ha equazione $y=mx$ con $m=f'(0)=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, cioè $y=\sqrt{2}x$ e l'angolo φ che essa forma con la direzione positiva dell'asse x è tale per cui $\tan\varphi=\sqrt{2}$ da cui $\varphi=\arctan\left(\sqrt{2}\right)\cong 54°44'$.

Punto 4

L'area dell'esagono regolare è il sestuplo dell'area di un triangolo equilatero di lato $f(x)=x\sqrt{2-x}$, pertanto

$$S(x)=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}f^2(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2(2-x);$$

integrando l'area in $[0,2]$ si ottiene il volume richiesto:

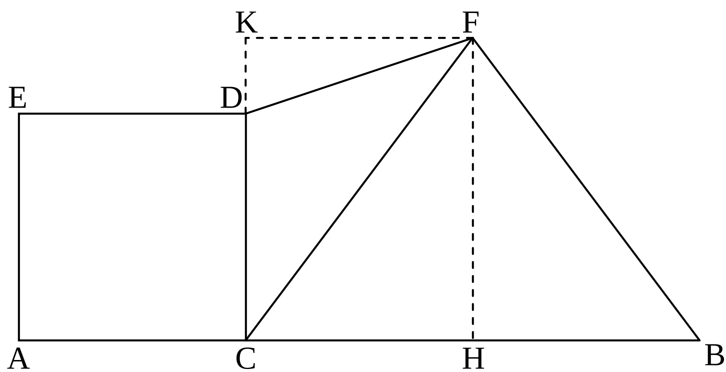
$$V=\int_0^2 S(x)dx=\frac{3\sqrt{3}}{2}\int_0^2 x^2(2-x)dx=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{16}{3}-4\right)=2\sqrt{3}$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Si divida il segmento in due parti *AC e CB*, in modo che, costruito su *AC* il quadrato *ACDE* e su *CB* il triangolo equilatero *CBF*, sia minima l'area del pentagono *ABFDE.*

Consideriamo la figura sottostante.



Poniamo $\overline{BC} = x, \overline{AC} = a - x$ con $0 < x < a$. L'area del pentagono ABFDE è la somma dell'area del quadrato ACDE, del triangolo equilatero CBF e del triangolo scaleno DCF. L'area del quadrato ACDE è $S(ACDE) = (a-x)^2$, l'area del triangolo equilatero CBF è $S(CBF) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ mentre il triangolo scaleno DCF ha la base DC che misura $a - x$ e l'altezza KF che misura $\frac{\overline{CB}}{2} = \frac{(a-x)}{2}$ e pertanto ha area $S(DCF) = \frac{x(a-x)}{4}$. Quindi

$S_{ABFDE}(x)=(a-x)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{x(a-x)}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}+3}{4}\right)x^2-\frac{7a}{4}x+a^2$ con $0<x<a$; tale area non è altro che una parabola con concavità rivolta verso l'alto, pertanto il minimo è raggiunto nell'ascissa del vertice $x_{\min}=-\frac{\left(-\frac{7a}{4}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}+3}{4}\right)}=\frac{7\left(3-\sqrt{3}\right)}{12}a$ e l'area minima vale

$$S(x_{\min})=\left(\frac{51+47\sqrt{3}}{288}\right)a^2.$$

Quesito 2

Data la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x\cdot\log(\sin 2x), & \text{per } 0<x<\pi/2,\\ 0 & \text{per } x=0,\end{cases}$$

si provi che è continua, ma non derivabile, nel punto $x = 0$.

Calcoliamo il limite destro $\lim_{x\to0^+}\sin x\cdot\log(\sin 2x)$; esso può essere scritto come $\lim_{x\to0^+}\frac{\log(\sin 2x)}{\frac{1}{\sin x}}$ e si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ pertanto applicando il teorema di De l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log(\sin 2x)}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2\cos 2x}{2\sin 2x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{\cos 2x\cdot\sin x}{\cos^2 x}\right)=0$$

di conseguenza la funzione è continua in $x=0$.

Per la derivabilità calcoliamo la derivata prima della funzione $f(x) = \sin x \cdot \log(\sin 2x)$:

$$f'(x) = \cos x \cdot \log(\sin 2x) + \sin x \cdot 2 \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cos x \cdot \log(\sin 2x) + \frac{\cos 2x}{\cos x}$$

e valutiamola per $x \to 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\cos x \cdot \log(\sin 2x) + \frac{\cos 2x}{\cos x} \right] = 1 \cdot \log 0 + 1 = -\infty$$

pertanto $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$ e di conseguenza la funzione non è derivabile in $x = 0$.

Quesito 3

Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione

$$f(x) = (x+2)^{\log(e+2x)}$$

nel punto $P(0,2)$?

Il logaritmo presente nella funzione è da intendersi in base *e*, pertanto in seguito lo indicheremo con *ln*. La tangente ha equazione $y = mx + 2$ con $m = f'(0)$. Per calcolarne la derivata scriviamo la funzione $f(x) = (x+2)^{\ln(e+2x)}$ come $f(x) = e^{\ln\left[(x+2)^{\ln(e+2x)}\right]} = e^{\ln(x+2)\cdot\ln(e+2x)}$ la cui derivata prima è

$$f'(x) = e^{\ln(x+2)\cdot\ln(e+2x)} \cdot \left[\frac{1}{x+2} \cdot \ln(e+2x) + \ln(x+2) \cdot \frac{2}{e+2x} \right] =$$

$$= (x+2)^{\ln(e+2x)} \cdot \left[\frac{1}{x+2} \cdot \ln(e+2x) + \ln(x+2) \cdot \frac{2}{e+2x} \right]$$

pertanto $m = f'(0) = 2^{\ln e} \cdot \left(\frac{\ln e}{2} + \frac{2\ln 2}{e} \right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{2\ln 2}{e} \right) = 1 + \frac{4\ln 2}{e}$ e di conseguenza la tangente ha equazione $y = \left(1 + \frac{4\ln 2}{e} \right) x + 2$.

Quesito 4

La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y = 1 + \tan x$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \le x \le \pi/4$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di Σ.

Ogni sezione è un triangolo equilatero di area $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + \tan x)^2$ pertanto il volume del solido Σ si ottiene integrando la superficie $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + \tan x)^2$ in $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$:

$$V(\Sigma) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} S(x)dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan x)^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2 x + 2\tan x\right)dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2\tan x\right)dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} + 2\tan x\right)dx =$$

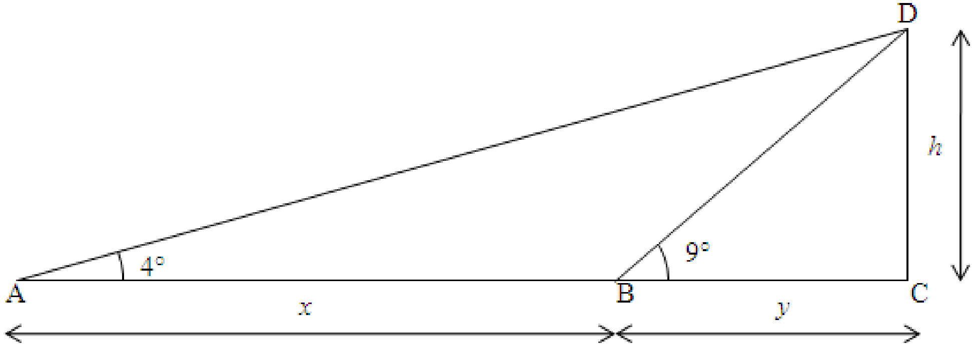
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\tan x - 2\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\left(1 - 2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + \ln 2)$$

Quesito 5

Mentre corre con una velocità costante attraverso il deserto, montando il suo fido cammello, un capo tuareg vede la cima di una grande palma e dirige direttamente verso di essa. Al primo avvistamento la cima della palma si presentava con un angolo di elevazione di 4°; venti minuti più tardi l'angolo di elevazione misura 9°. Quanti minuti sono ancora necessari al tuareg per raggiungere l'albero?

Consideriamo la figura seguente.



Con riferimento alla figura soprastante, sia x la distanza percorsa in 20 minuti, y la distanza da percorrere e h l'altezza della palma. Dall'ipotesi di velocita costante si deduce che se la distanza x è stata percorsa in 20 minuti la distanza y sarà percorsa in $t = 20\frac{y}{x}$ minuti. D'altra parte il triangolo ACD è rettangolo pertanto $h = y\tan(9°) = (x+y)\tan(4°)$ da cui $\frac{(x+y)}{y} = \frac{\tan(9°)}{\tan(4°)} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\tan(9°)-\tan(4°)}{\tan(4°)} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\tan(4°)}{\tan(9°)-\tan(4°)}$ e in conclusione il tempo da percorrere ancora è

$$t = 20\frac{y}{x} = \frac{20\cdot\tan(4°)}{\tan(9°)-\tan(4°)} \cong 15{,}8 \text{ minuti.}$$

Quesito 6

Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}-x$$

La funzione $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}-x$ è definita per $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)\geq 0$ e cioè per $x\in(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$. Essa non presenta asintoti verticali in quanto $\lim\limits_{x\to -3^-}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)=3, \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)=-1$.

Vediamo se esiste l'asintoto orizzontale per $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x-3}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x-3}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+2x-3-x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x-3}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{\left(|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{\left(x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+x\right)}=\frac{2}{1+1}=1$$

in cui, vista la forma indeterminata $\infty-\infty$, si è moltiplicato numeratore e denominatore per $\left(\sqrt{x^2+2x-3}+x\right)$ e si è sfruttato il fatto che $|x|=x$ per $x\to+\infty$ pertanto $y=1$ è asintoto orizzontale destro; a sinistra non esiste l'asintoto orizzontale in quanto $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)=+\infty+\infty=+\infty$.

Vediamo se esiste l'asintoto obliquo per $x\to+\infty$: esso avrà equazione $y=mx+q$ con

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-x\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-x\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-1\right)=0$$

in cui si è sfruttato il fatto che $|x|=x$ per $x\to+\infty$ e se proviamo a calcolare q troviamo $q=1$ pertanto l'asintoto obliquo destro non esiste; vediamo se esiste l'asintoto obliquo sinistro:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-x\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-x\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-1\right)=-2$$

e

$$q=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{\left(|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{\left(-x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-x\right)}=\frac{2}{-1-1}=-1$$

di conseguenza $y=-2x-1$ è asintoto obliquo sinistro.

In conclusione la curva presenta due asintoti, uno orizzontale destro di equazione $y=1$ e uno obliquo sinistro di equazione $y=-2x-1$.

Quesito 7

Un ottaedro regolare di alluminio (densità $\rho = 2{,}7\ \mathrm{g/cm^3}$), avente lo spigolo $\mathrm{l} = 5\,\mathrm{cm}$, presenta all'interno una cavità di forma cubica. Sapendo che la massa dell'ottaedro è m = 155 g, si calcoli la lunghezza dello spigolo della cavità.

Il volume di un ottaedro di spigolo $\mathrm{l} = 5\,\mathrm{cm}$ è $V_{ottaedro} = \frac{\sqrt{2}}{3} l^3$; se l'ottaedro fosse pieno la sua massa sarebbe pari al prodotto della densità $\rho = 2{,}7\ \mathrm{g/cm^3}$ per il volume, cioè $M = \rho \cdot V_{ottaedro} = 2{,}7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 5^3 = 159{,}1$ grammi; la massa mancante è quindi $m' = 159{,}1 - 155 = 4{,}1$ grammi corrispondente a un volume $V' = \frac{m'}{\rho} = \frac{4{,}1}{2{,}7} = 1{,}518\ \mathrm{cm}^3$ che a sua volta corrisponde al volume di un cubo di spigolo 1,15 cm.

Quesito 8

Quante diagonali ha un poligono convesso di n lati?

In qualsiasi poligono, si definisce diagonale un qualsiasi segmento di esso che abbia per estremi 2 suoi vertici non consecutivi. Il numero di diagonali uscenti da un vertice è $n-3$, ossia pari al numero *n* di lati/vertici diminuito di 3, in quanto, affinché si possa raggiungere l'altro estremo di una diagonale, a partire da un vertice, bisogna escludere il vertice stesso di partenza e i 2 vertici ad esso consecutivi. Quindi, il numero delle diagonali uscenti da un vertice è: $n-3$ e di conseguenza il numero totali di diagonali uscenti dagli *n* lati/vertici è $n \cdot (n-3)$; tuttavia in questo numero sono conteggiate due volte le stesse diagonali: ad esempio dati due vertici A e B non consecutivi nel numero $n \cdot (n-3)$ è conteggiata la stessa diagonale AB e BA, pertanto il numero totale di diagonali distinte di un poligono convesso di *n* lati è $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

Quesito 9

Si calcoli il valore medio della funzione:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}$$

nell'intervallo $a \le x \le b$ con $0 < a < b$, e si dimostri che esso è uguale alla media geometrica tra i due valori che la funzione assume nei due estremi dell'intervallo.

Ricordiamo innanzitutto il teorema della media integrale:
Se la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso $[a,b]$, esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ in cui risulta $\int_a^b f(x)dx=(b-a)\cdot f(c)$ o equivalentemente $f(c)=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$.

Nel caso in esame il valor medio è

$$V_M=\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{b-a}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b=\frac{1}{b-a}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{b-a}\cdot\left(\frac{b-a}{ab}\right)=\frac{1}{ab}$$

La funzione $f(x)=\frac{1}{x^2}$ assume agli estremi dell'intervallo $[a,b]$ i valori $f(a)=\frac{1}{a^2}$, $f(b)=\frac{1}{b^2}$ la cui media geometrica è pari alla radice quadrata del prodotto $M_G\left(\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2}\right)=\sqrt{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}}=\frac{1}{ab}$ che coincide con il valore medio su calcolato.

Quesito 10

Data la funzione:

$$f(x)=\frac{x^2-x-4}{x-1}$$

si verifichi che esiste un solo punto ξ interno all'intervallo chiuso [-1,0], tale che la tangente al diagramma in questo punto è parallela alla corda congiungente i due punti estremi del diagramma.

Chiedere di trovare il punto ξ interno all'intervallo chiuso [-1,0], tale che la tangente al diagramma in questo punto è parallela alla corda congiungente i due punti estremi del diagramma equivale a chiedere di trovare il punto $\xi\in(-1,0)$ interno all'intervallo chiuso in cui è soddisfatto il teorema di Lagrange. Nel caso in esame la funzione è continua nell'intervallo chiuso $[-1,0]$ e derivabile in $(-1,0)$ pertanto è applicabile il teorema di Lagrange, cioè

$$\exists\xi\in(-1,0):\ f'(\xi)=\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=f(0)-f(-1).$$

In questo caso $f(0)=4,\ f(-1)=1$ e $f'(\xi)=\frac{(\xi^2-2\xi+6)}{(\xi-1)^2}$, pertanto risolvendo l'equazione $\frac{(\xi^2-2\xi+5)}{(\xi-1)^2}=3$ si ricava $(\xi^2-2\xi+5)=3\xi^2-6\xi+3\Rightarrow\xi^2-2\xi-1=0\Rightarrow\xi=1\pm\sqrt{2}$ di cui solo $\xi=1-\sqrt{2}$ è accettabile in quanto interna all'intervallo $(-1,0)$.