

PROBLEMA 1

Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio 1, in modo che la base maggiore contenga il diametro.

1. Si calcoli, in funzione dell'ampiezza x del suo angolo acuto, l'area della superficie del trapezio, controllando che risulta:

$$S(x) = \frac{2 - \cos x}{\sin x}$$

2. Si studi la funzione $S(x)$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 < x < 2\pi$, mettendo in evidenza la parte di grafico compatibile con i dati del problema.

3. Si scelga a caso un punto all'interno del trapezio e si determini la probabilità $p(x)$ che tale punto risulti interno al semicerchio inscritto.

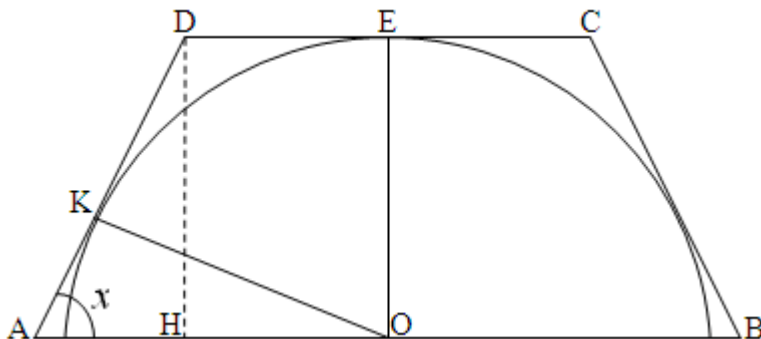
Si studi la funzione $p(x)$ e si tracci il suo grafico ω nell'intervallo $0 < x < \pi/2$

4. Si calcoli il valore medio della funzione $p(x)$ nell'intervallo $0 < x < \pi/2$.

RISOLUZIONE

Punto 1

Consideriamo la figura sottostante.



Sia $\hat{HAD} = x$ con $0 < x < \pi/2$.

Il triangolo AKO è rettangolo in K, pertanto a norma del teorema sui

triangoli rettangoli $\overline{KO} = \overline{AO} \sin x \Rightarrow \overline{AO} = \frac{\overline{KO}}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}$ e la base

maggiore del trapezio misura $\overline{AB} = 2\overline{AO} = \frac{2}{\sin x}$; anche il triangolo

AHD è rettangolo in H pertanto applicando il teorema sui triangoli

rettangoli $\overline{DH} = \overline{AH} \tan x \Rightarrow \overline{AH} = \frac{\overline{DH}}{\tan x} = \frac{1}{\tan x}$. Di conseguenza la

base minore misura

$\overline{DC} = 2\overline{OH} = 2\overline{AO} - 2\overline{AH} = 2\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right) = 2\left(\frac{1 - \cos x}{\sin x}\right)$ e la

superficie del trapezio vale

$$S(x) = \frac{(\overline{DC} + \overline{AB}) \cdot \overline{DH}}{2} = \frac{\left(\frac{2 - 2\cos x}{\sin x} + \frac{2}{\sin x}\right) \cdot 1}{2} = \frac{2 - \cos x}{\sin x}.$$

Punto 2

Studiamo la funzione $S(x) = \frac{2 - \cos x}{\sin x}$ in $(0, 2\pi)$

Dominio: $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \wedge x \neq \pi \wedge x \neq 2\pi$ pertanto il dominio è $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$;

Intersezione ascisse: la funzione $S(x) = \frac{2 - \cos x}{\sin x}$ non si annulla mai in

quanto l'equazione $2 - \cos x = 0$ non presenta soluzioni reali dal momento che il coseno è una funzione limitata tale per cui $|\cos x| \leq 1$;

Intersezioni ordinate: non ci sono intersezioni con l'asse delle ordinate in quanto $x = 0$ non appartiene al dominio;

Simmetrie: la funzione è dispari in quanto

$$S(-x) = \frac{2 - \cos(-x)}{\sin(-x)} = -\frac{2 - \cos x}{\sin x} = -S(x) \text{ ed è periodica di periodo}$$

$$T = 2\pi;$$

Positività: poichè il numeratore della funzione è sempre positivo in quanto il coseno è una funzione limitata tale per cui, la funzione sarà positiva se il denominatore sarà positivo e quindi quando

$$\sin x > 0 \Rightarrow (0, \pi);$$

Asintoti verticali:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} f(x) = -\infty$$

pertanto le rette $x = 0, x = \pi, x = 2\pi$ sono asintoti verticali;

Asintoti orizzontali: non ha senso calcolarli in quanto il dominio è $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$;

Asintoti obliqui: non ha senso calcolarli in quanto il dominio è $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$;

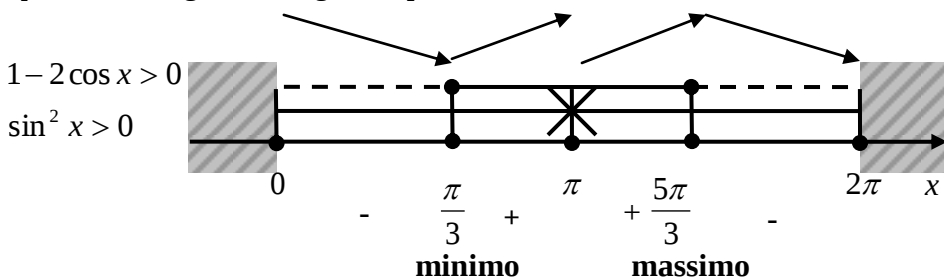
Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $S'(x) = \frac{1 - 2 \cos x}{\sin^2 x}$ per

cui il numeratore è positivo se $\cos x < \frac{1}{2}$ e il denominatore è sempre

positivo nel dominio $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$; all'interno del dominio

$(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ la disequazione $\cos x < \frac{1}{2}$ è verificata per $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$.

Il quadro dei segni è di seguito riportato:



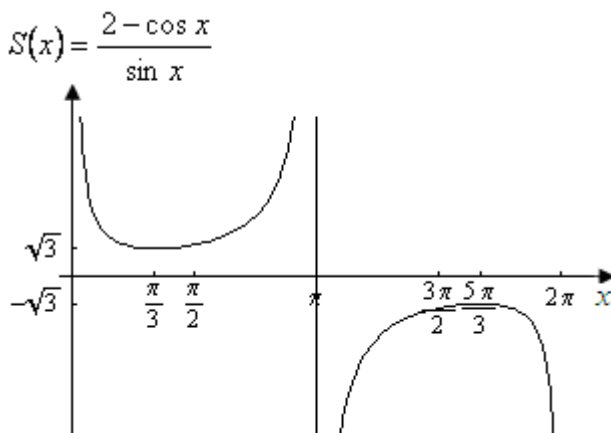
Dal grafico dei segni della derivata prima deduciamo che la funzione presenta un minimo relativo in $m\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$ ed un massimo relativo in $M\left(\frac{5\pi}{3}, -\sqrt{3}\right)$.

Concavità e convessità: la derivata seconda è pari a

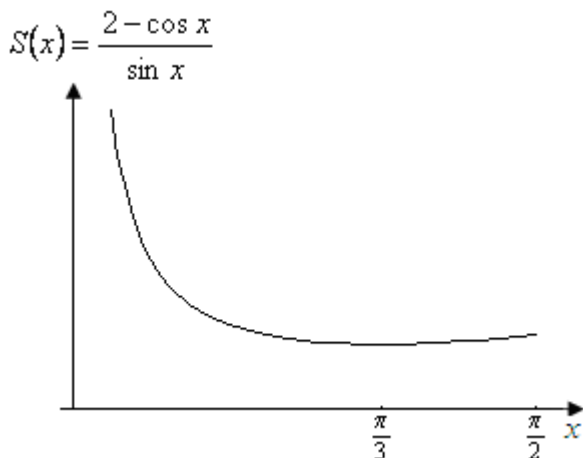
$$S''(x) = \frac{2(\cos^2 x - \cos x + 1)}{\sin^3 x}$$
 da cui deduciamo che la funzione rivolge

concavità verso l'alto negli intervalli in cui $\sin x > 0$ e verso il basso negli intervalli in cui $\sin x < 0$, pertanto verso l'alto in $(0, \pi)$ e verso il basso in $(\pi, 2\pi)$ e non vi sono flessi.

Il grafico γ è di seguito presentato.



Compatibilmente con i dati del problema, la parte di grafico è quella per cui $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ed è di seguito presentata.



Punto 3

L'area del semicerchio di raggio unitario è $\frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$ pertanto la probabilità $p(x)$ è data dal rapporto dell'area del semicerchio e

dell'area del trapezio:
$$p(x) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{2 - \cos x}{\sin x}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin x}{2 - \cos x}.$$

Studiamo la funzione $p(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin x}{2 - \cos x}$ in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Dominio: poichè $2 - \cos x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \supset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ deduciamo che il

dominio è $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

Intersezione ascisse:

$$p(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin x}{2 - \cos x} = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ quindi nessuno}$$

Nicola De Rosa, Liceo scientifico sperimentale sessione suppletiva 2012, matematicamente.it
zero cade nel dominio pertanto non vi sono intersezioni con l'asse delle ascisse;

Intersezioni ordinate: non ci sono intersezioni con l'asse delle ordinate in quanto $x = 0$ non appartiene al dominio $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

Simmetrie: la funzione è dispari in quanto

$$p(-x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin(-x)}{2 - \cos(-x)} = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin x}{2 - \cos x} = -p(x) \text{ ed è periodica di}$$

periodo $T = 2\pi$;

Positività: poichè il denominatore della funzione è sempre positivo in quanto il coseno è una funzione limitata tale per cui $|\cos x| \leq 1$, la funzione sarà positiva se il numeratore sarà positivo e quindi quando

$\sin x > 0$; poichè nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ il seno è non negativo,

deduciamo che la funzione è non negativa in tutto il dominio;

Asintoti verticali: $\lim_{x \rightarrow 0^+} p(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} p(x) = \frac{\pi}{4}$ pertanto non vi sono

asintoti verticali;

Asintoti orizzontali: non ha senso calcolarli in quanto il dominio è $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

Asintoti obliqui: non ha senso calcolarli in quanto il dominio è $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $p'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2 \cos x - 1}{(2 - \cos x)^2}$

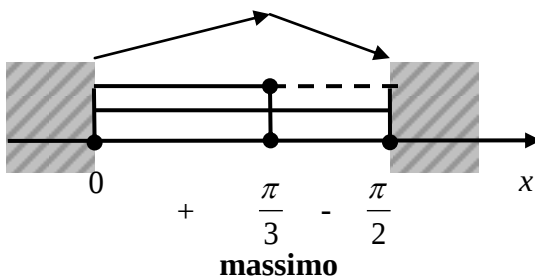
per cui il numeratore è positivo se $\cos x > \frac{1}{2}$ e il denominatore è sempre

positivo nel dominio $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; all'interno del dominio $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ la

disequazione $\cos x > \frac{1}{2}$ è verificata per $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$. Il quadro dei segni è di seguito riportato:

$$2 \cos x - 1 > 0$$

$$(2 - \cos x)^2$$



Dal grafico dei segni della derivata prima deduciamo che la funzione presenta un massimo relativo in $M\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right)$.

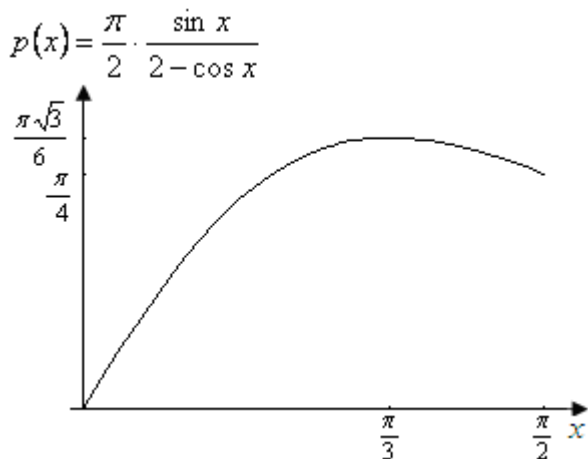
Concavità e convessità: la derivata seconda è pari a

$$p''(x) = -\pi \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}; \text{ poiché sia il seno che il coseno sono positivi in }$$

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ deduciamo che la funzione volge concavità verso il basso in

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e non vi sono flessi.

Il grafico ω è di seguito presentato.



Punto 4

Il valore medio è pari a

$$V_M = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin x}{2 - \cos x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{2 - \cos x} \right) dx =$$

$$= \left[\ln(2 - \cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2$$

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy .
2. Si verifichi che i tre punti di flesso di γ sono allineati e si scriva l'equazione della retta alla quale essi appartengono.
3. Si scrivano le equazioni delle tangenti inflessionali, si dimostri che due di esse sono parallele e si calcoli la loro distanza.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ , dall'asse x e dalle rette di equazione $x=1$ e $x=\sqrt{3}$.

RISOLUZIONE

Punto 1

Studiamo la funzione $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2}$

Dominio: $\mathbb{R}$;

Intersezione ascisse: $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow \arctan x = \frac{x}{1+x^2}$ e tale equazione la si può studiare o per via grafica trovando i punti di intersezione della funzione $y = \arctan x$ con la funzione $y = \frac{x}{1+x^2}$

oppure si può notare che la funzione $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2}$ è strettamente crescente nel dominio in quanto ha derivata prima

$f'(x) = \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}$ e inoltre $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ pertanto a

norma del teorema degli zeri $\exists \alpha(-\infty, +\infty): f(\alpha) = 0$ $f(x) = 0$ e data la

stretta crescenza questa radice è unica. Poichè da un controllo diretto si nota subito che $f(0) = 0$, deduciamo che l'unica intersezione con l'asse delle ascisse è $x = 0$;

Intersezioni ordinate: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$;

Simmetrie: è una funzione dispari in quanto

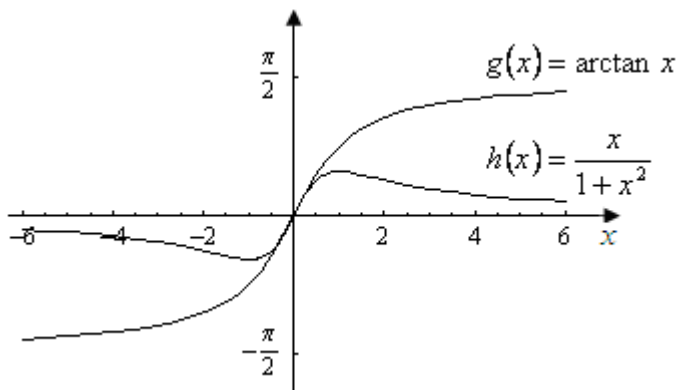
$$f(-x) = \arctan(-x) - \frac{(-x)}{1+(-x)^2} = -\arctan x + \frac{x}{1+x^2} = -f(x);$$

Positività: $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2} > 0 \Rightarrow \arctan x > \frac{x}{1+x^2}$; se

grafichiamo entrambe le funzioni $y = \arctan x$ e $y = \frac{x}{1+x^2}$ in un

unico sistema di riferimento cartesiano, possiamo notare che

$f(x) > 0 \Rightarrow x > 0$ come di seguito mostrato.



Asintoti verticali: non ve ne sono in quanto il dominio è $\mathbb{R}$;

Asintoti orizzontali: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ per cui le rette

$y = \pm \frac{\pi}{2}$ sono asintoti orizzontali;

Asintoti obliqui: non ve ne sono in quanto $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$;

Crescenza e decrescenza: la derivata prima come già detto

precedentemente è $f'(x) = \frac{2x^2}{(x^2 + 1)^2}$ per cui la funzione è strettamente

crescente in tutto $\mathbb{R}$;

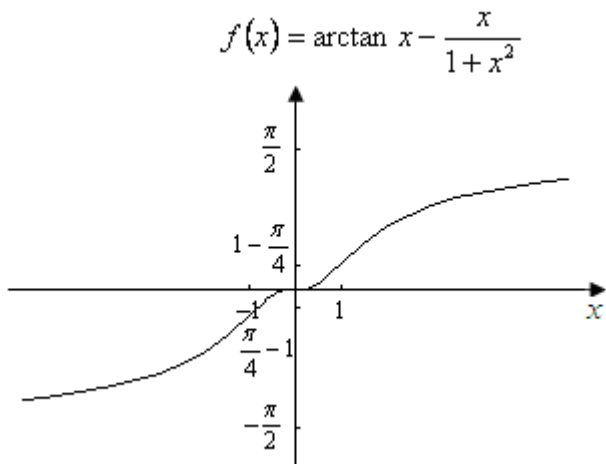
Concavità e convessità: la derivata seconda è $f''(x) = \frac{4x(1-x^2)}{(x^2 + 1)^3}$ e

risulta essere positiva in $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ e negativa in $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$,
pertanto la funzione volge concavità verso l'alto in $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ e
verso il basso in $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ e presenta tre flessi di cui

$F_1\left(-1, \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$, $F_2\left(1, \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$ a tangente obliqua e $F_3(0, 0)$ a tangente

orizzontale; infatti in $x = 0$ si annulla anche la derivata prima e non si
annulla la derivata terza il cui calcolo si lascia al lettore.

Il grafico γ è di seguito presentato:



Punto 2

I tre punti di flesso sono allineati lungo la retta di equazione

$$y = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)x.$$

Punto 3

La tangente inflessionale in $F_3(0,0)$ ha equazione $y = 0$.

La tangente inflessionale in $F_1\left(-1, \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ ha equazione

$$y = m(x+1) + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \quad \text{dove} \quad m = f'(-1) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \text{cioè}$$

$$y = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{x}{2} + 1 - \frac{\pi}{4}.$$

La tangente inflessionale in $F_2\left(1, \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$ ha equazione

$$y = m(x-1) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \quad \text{dove} \quad m = f'(1) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \text{cioè}$$

$$y = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} - 1.$$

Quindi le tangenti inflessionali in $F_1\left(-1, \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ e $F_2\left(1, \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$,

avendo lo stesso coefficiente angolare, sono parallele e per calcolarne la distanza basta calcolare ad esempio la distanza di $F_1\left(-1, \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ da

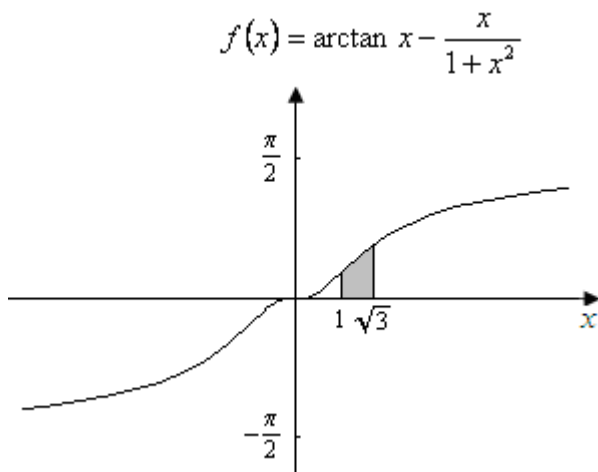
$$y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} - 1; \text{ l'equazione della retta } y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} - 1 \text{ in forma implicita}$$

è $2x - 4y + \pi - 4 = 0$ pertanto la distanza di $F_1\left(-1, \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ da essa è

$$d = \frac{\left| 2 \cdot (-1) - 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \pi - 4 \right|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{|-2 - 2 + \pi + \pi - 4|}{2\sqrt{5}} = \frac{4 - \pi}{\sqrt{5}}.$$

Punto 4

L'area richiesta è di seguito raffigurata in grigio.



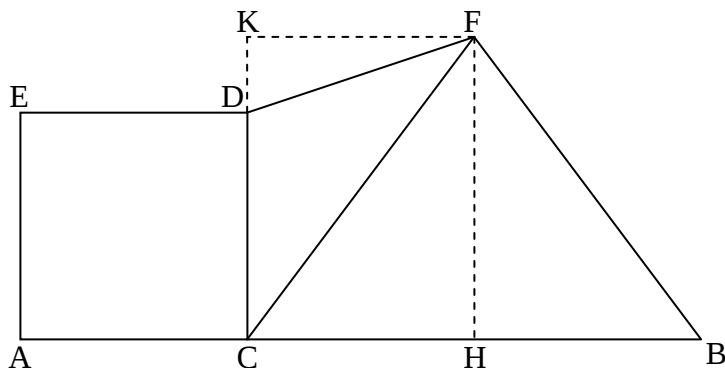
Essa vale

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^{\sqrt{3}} \left(\arctan x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx; \text{ applicando l'integrazione per parti si ha:} \\
 S &= \int_1^{\sqrt{3}} \left(\arctan x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = [x \arctan x]_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{x}{1+x^2} \right) dx - \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{x}{1+x^2} \right) dx = \\
 &= [x \arctan x]_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) dx = [x \arctan x - \ln(1+x^2)]_1^{\sqrt{3}} = \\
 &= \left(\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - \ln 4 \right) - \left(\frac{\pi}{4} - \ln 2 \right) = \left(\frac{4\sqrt{3}-3}{12} \right) \pi - \ln 2
 \end{aligned}$$

QUESTIONARIO**Quesito 1**

Si divida il segmento in due parti AC e CB , in modo che, costruito su AC il quadrato $ACDE$ e su CB il triangolo equilatero CBF , sia minima l'area del pentagono $ABFDE$.

Consideriamo la figura sottostante.



Poniamo $\overline{BC} = x$, $\overline{AC} = a - x$ con $0 < x < a$. L'area del pentagono $ABFDE$ è la somma dell'area del quadrato $ACDE$, del triangolo equilatero CBF e del triangolo scaleno DCF . L'area del quadrato $ACDE$ è $S(ACDE) = (a - x)^2$, l'area del triangolo equilatero CBF è

$S(CBF) = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$ mentre il triangolo scaleno DCF ha la base DC che

misura $a - x$ e l'altezza KF che misura $\frac{\overline{CB}}{2} = \frac{(a - x)}{2}$ e pertanto ha area

$S(DCF) = \frac{x(a - x)}{4}$. Quindi

$$S_{ABFDE}(x) = (a - x)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + \frac{x(a - x)}{4} = \left(\frac{\sqrt{3} + 3}{4} \right) x^2 - \frac{7a}{4} x + a^2 \text{ con}$$

$0 < x < a$; tale area non è altro che una parabola con concavità rivolta verso l'alto, pertanto il minimo è raggiunto nell'ascissa del vertice

$$x_{\min} = -\frac{\left(-\frac{7a}{4}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}+3}{4}\right)} = \frac{7(3-\sqrt{3})}{12}a \text{ e l'area minima vale}$$

$$S(x_{\min}) = \left(\frac{51+47\sqrt{3}}{288}\right)a^2.$$

Quesito 2

Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \cdot \log(\sin 2x), & \text{per } 0 < x < \pi/2, \\ 0 & \text{per } x = 0, \end{cases}$$

si provi che è continua, ma non derivabile, nel punto $x = 0$.

Calcoliamo il limite destro $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \log(\sin 2x)$; esso può essere

scritto come $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\sin 2x)}{\frac{1}{\sin x}}$ e si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

pertanto applicando il teorema di De l'Hopital si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\sin 2x)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2 \cos 2x}{\sin 2x}}{\frac{-\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\cos 2x \cdot \sin x}{\cos^2 x} \right) = 0 \text{ di}$$

conseguenza la funzione è continua in $x = 0$.

Per la derivabilità calcoliamo la derivata prima della funzione

$$f(x) = \sin x \cdot \log(\sin 2x):$$

$$f'(x) = \cos x \cdot \log(\sin 2x) + \sin x \cdot 2 \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cos x \cdot \log(\sin 2x) + \frac{\cos 2x}{\cos x}$$

e valutiamola per $x \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\cos x \cdot \log(\sin 2x) + \frac{\cos 2x}{\cos x} \right] = 1 \cdot \log 0 + 1 = -\infty$$

pertanto $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty$ e di conseguenza la funzione non è derivabile in $x = 0$.

Quesito 3

Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione

$$f(x) = (x+2)^{\log(e+2x)}$$

nel punto $P(0,2)$?

Il logaritmo presente nella funzione è da intendersi in base e , pertanto in seguito lo indicheremo con $\ln$. La tangente ha equazione $y = mx + 2$ con $m = f'(0)$. Per calcolarne la derivata scriviamo la funzione

$f(x) = (x+2)^{\ln(e+2x)}$ come $f(x) = e^{\ln[(x+2)^{\ln(e+2x)}]} = e^{\ln(x+2) \cdot \ln(e+2x)}$ la cui derivata prima è

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\ln(x+2) \cdot \ln(e+2x)} \cdot \left[\frac{1}{x+2} \cdot \ln(e+2x) + \ln(x+2) \cdot \frac{2}{e+2x} \right] = \\ &= (x+2)^{\ln(e+2x)} \cdot \left[\frac{1}{x+2} \cdot \ln(e+2x) + \ln(x+2) \cdot \frac{2}{e+2x} \right] \end{aligned}$$

$$\text{pertanto } m = f'(0) = 2^{\ln e} \cdot \left(\frac{\ln e}{2} + \frac{2 \ln 2}{e} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2 \ln 2}{e} \right) = 1 + \frac{4 \ln 2}{e} \text{ e}$$

di conseguenza la tangente ha equazione $y = \left(1 + \frac{4 \ln 2}{e} \right) x + 2$.

Quesito 4

La superficie piana S , delimitata dalla curva γ di equazione

$y = 1 + \tan x$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi/4$, è la base di un solido Σ , le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x , sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di Σ .

Ogni sezione è un triangolo equilatero di area $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + \tan x)^2$

pertanto il volume del solido Σ si ottiene integrando la superficie

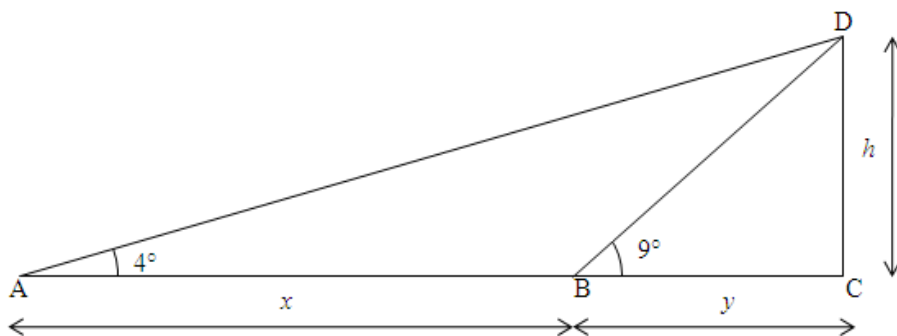
$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + \tan x)^2 \text{ in } \left[0, \frac{\pi}{4}\right]:$$

$$\begin{aligned} V(\Sigma) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} S(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan x)^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x + 2 \tan x) dx = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2 \tan x\right) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} + 2 \tan x\right) dx = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2 \frac{\sin x}{\cos x}\right) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\tan x - 2 \ln |\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\left(1 - 2 \ln \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}}{4} (1 + \ln 2) \end{aligned}$$

Quesito 5

Mentre corre con una velocità costante attraverso il deserto, montando il suo fido cammello, un capo tuareg vede la cima di una grande palma e dirige direttamente verso di essa. Al primo avvistamento la cima della palma si presentava con un angolo di elevazione di 4° ; venti minuti più tardi l'angolo di elevazione misura 9° . Quanti minuti sono ancora necessari al tuareg per raggiungere l'albero?

Consideriamo la figura seguente.



Con riferimento alla figura soprastante, sia x la distanza percorsa in 20 minuti, y la distanza da percorrere e h l'altezza della palma. Dall'ipotesi di velocità costante si deduce che se la distanza x è stata percorsa in 20 minuti la distanza y sarà percorsa in $t = 20 \frac{y}{x}$ minuti. D'altra parte il triangolo ACD è rettangolo pertanto $h = y \tan(9^\circ) = (x + y) \tan(4^\circ)$ da cui $\frac{(x + y)}{y} = \frac{\tan(9^\circ)}{\tan(4^\circ)} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\tan(9^\circ) - \tan(4^\circ)}{\tan(4^\circ)} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\tan(4^\circ)}{\tan(9^\circ) - \tan(4^\circ)}$ e in conclusione il tempo da percorrere ancora è $t = 20 \frac{y}{x} = \frac{20 \cdot \tan(4^\circ)}{\tan(9^\circ) - \tan(4^\circ)} \cong 15,8$ minuti.

Quesito 6

Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = \frac{ax^2 + 4}{bx + 2}$ perché la curva rappresentativa ammetta asintoto di equazione $y = x + 2$.

L'asintoto obliquo ha equazione $y = mx + q$ con

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(\frac{ax^2 + 4}{bx + 2} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{ax^2 + 4}{bx^2 + 2x} \right) = \frac{a}{b} \quad \text{e}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{ax^2 + 4}{bx + 2} - \frac{a}{b}x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{abx^2 + 4b - abx^2 - 2ax}{b^2x + 2b} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{4b - 2ax}{b^2x + 2b} \right) = -$$

Imponendo il sistema
$$\begin{cases} \frac{a}{b} = 1 \\ -\frac{2a}{b^2} = 2 \end{cases}$$
 si ottiene

$$\begin{cases} a = b \\ -\frac{2a}{b^2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ -\frac{2}{a} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \quad \text{pertanto la curva con asintoto}$$

obliquo $y = x + 2$ ha equazione $y = \frac{-x^2 + 4}{-x + 2}$ e corrisponde alla retta di equazione $y = x + 2$ (l'asintoto stesso) privata del suo punto di ascissa 2.

Quesito 7

Tenuto conto che:

$$\log 2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$$

si calcoli un'approssimazione di $\log 2$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Innanzitutto proviamo che $\log 2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$. Si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx = \left[\ln |1 + \sin x| \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2.$$

Come metodo di integrazione numerica, utilizziamo il metodo dei trapezi. Si suddivide l'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ in 4 intervalli di ampiezza

$h = \frac{\pi}{8}$ mediante i 5 punti $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{\pi}{4}, x_3 = \frac{3\pi}{8}, x_4 = \frac{\pi}{2}$ cui corrispondono i valori della funzione $y_0 = f(0) = 1$

$$y_1 = f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

$$y_2 = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1,$$

$$y_3 = f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{1 + \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3\pi}{4}\right)}{1 + \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{2}}}{1 + \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{2}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

$$y_4 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

L'area approssimata è

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx &\cong \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{4} \left(\frac{y_0 + y_4}{2} + y_1 + y_2 + y_3 \right) = \\ &= \frac{\pi}{8} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}} + \sqrt{2} - 1 + \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \right) \cong 0,6995 \end{aligned}$$

con un errore

$$\varepsilon_n \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{[a,b]} |f''(x)| = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)^3}{12 \cdot 4^2} \cdot \max_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |f''(x)| = \frac{\pi^3}{1536} \cdot \max_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |f''(x)|$$

in cui la derivata seconda è $f''(x) = \frac{2 \cos x}{(1 + \sin x)^2}$; il massimo di $|f''(x)|$

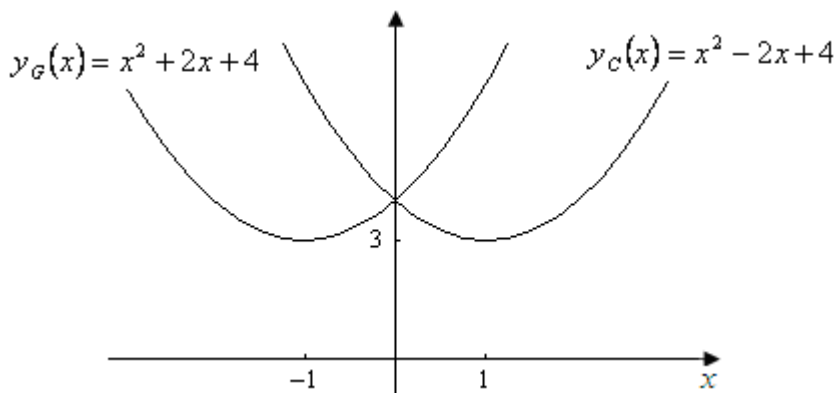
in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ è assunto per $x = 0$ e vale $\max_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |f''(x)| = 2$ pertanto l'errore

commesso è $\varepsilon_n \leq \frac{\pi^3}{1536} \cdot 2 = \frac{\pi^3}{768} \cong 0,04$. Infatti il valore reale di $\log 2$ è 0,6931 e la differenza tra il valore approssimato e quello reale è $|0,6995 - 0,6931| = 0,0064 < 0,04$.

Quesito 8

Sia C la curva d'equazione $y = x^2 - 2x + 4$, e sia G la curva simmetrica di C rispetto all'asse y . Qual è l'equazione di G ?

L'equazione della curva G simmetrica di C rispetto all'asse delle ordinate è $y_G(x) = y_C(-x) = x^2 + 2x + 4$



Quesito 9

Si determini la probabilità che nel lancio di due dadi si presenti come somma un numero dispari. Lanciando 5 volte i due dadi, qual è la probabilità di ottenere come somma un numero dispari almeno due volte?

Lanciando una coppia di dadi non truccati, le possibili combinazioni di risultati sono $6^2 = 36$ con distribuzione equa di risultati con somma pari o dispari, pertanto la probabilità che nel lancio di due dadi si presenti come somma un numero dispari è $p = \frac{1}{2}$. La probabilità di ottenere un risultato X dispari k volte in n lanci è dato dalla

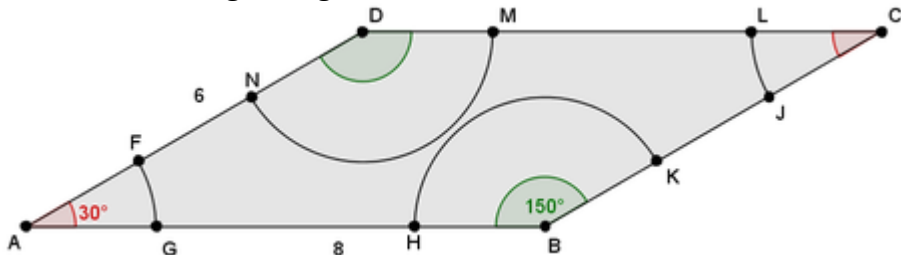
distribuzione binomiale $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, pertanto la probabilità richiesta è

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16} \end{aligned}$$

Quesito 10

Si scelga a caso un punto all'interno di un parallelogramma, avente i lati lunghi rispettivamente 8m e 6m e gli angoli acuti di 30° . Si determini la probabilità che la sua distanza da ogni vertice sia maggiore di 2m.

Consideriamo la figura seguente.



Con riferimento alla figura, possiamo ricavare la probabilità richiesta come rapporto tra l'area della figura ottenuta sottraendo al parallelogramma i settori circolari AGF, HKB, JCL, DNM e l'area del parallelogramma stesso, avendo appurato che tali settori non si sovrappongono (nel caso dei settori centrati in A e C la cosa è abbastanza evidente, mentre nel caso dei vertici B e D bisogna verificare che la loro distanza sia maggiore di 4, cosa che, se pur di poco, è vera...). I settori nei vertici di 30° hanno un'area ciascuno pari a $1/12$ del cerchio di raggio 2, cioè complessivamente un'area pari a

$2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 2^2 \right) = \frac{2\pi}{3} \text{ m}^2$, quelli nei vertici di 150° hanno un'area ciascuno pari a $5/12$ del cerchio di raggio 2, cioè complessivamente un'area pari a $2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5\pi}{6} \cdot 2^2 \right) = \frac{10\pi}{3} \text{ m}^2$. L'area del parallelogramma è pari a $6 \cdot 8 \cdot \sin(30^\circ) = 24 \text{ m}^2$, pertanto la probabilità richiesta è

$$p = \frac{24 - \frac{2\pi}{3} - \frac{10\pi}{3}}{24} = \frac{24 - 4\pi}{24} = 1 - \frac{\pi}{6} \cong 47,64\%.$$