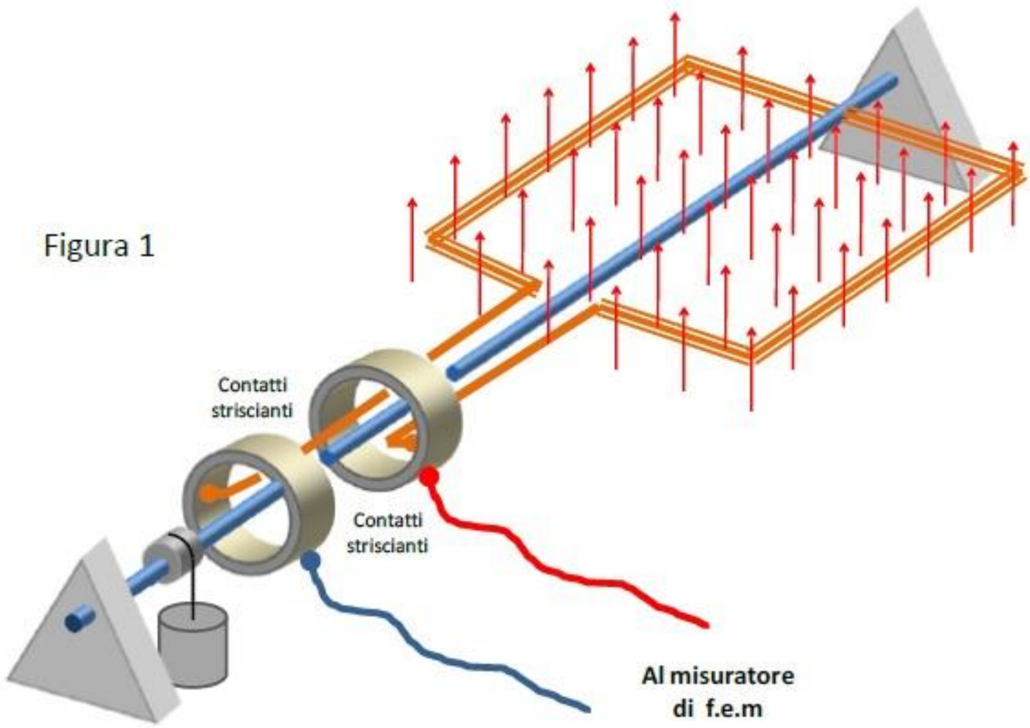
Esempio di seconda prova di Fisica per gli esami di stato liceo scientifico
a.s. 2016-2017 – 25 ottobre 2016

Problema n. 1

In laboratorio è stato preparato il dispositivo rappresentato in Figura1. La bobina è costituita da 100 spire rettangolari di rame i cui lati misurano 25 cm e 30 cm. La bobina può ruotare con attrito trascurabile intorno al suo asse e durante la rotazione le estremità del filo strisciano su due anelli conduttori, mantenendo con essi un contatto elettrico. La bobina è immersa in un campo magnetico uniforme e costante.
Sull'asse della bobina è montato un cilindro intorno al quale è avvolto un filo. All'estremità del filo è sospeso un pesetto. Quando il pesetto viene lasciato libero, esso cade verso il basso mettendo in rotazione la bobina. Alla partenza del pesetto il piano della spira è perpendicolare alla direzione del campo magnetico.
Durante la rotazione della bobina, alle sue estremità, che restano aperte in modo che non circoli corrente, si produce una f.e.m. il cui valore viene rilevato da un sistema di acquisizione automatico che acquisisce 1000 valori al secondo.
In Figura 2 sono stati riportati i dati sperimentali acquisiti dal sistema. Questo grafico rappresenta in ordinata la f.e.m. prodotta alle estremità della bobina durante la caduta del pesetto ed in ascissa il tempo.
La Figura 3 rappresenta lo stesso grafico di Figura 2. In quest'ultimo grafico i punti sperimentali sono stati uniti da segmenti per migliorarne la leggibilità.

Figura 1



1. Spiega il fenomeno fisico che produce la f.e.m. alle estremità della bobina e, sulla base di esso, spiega il particolare andamento del grafico sperimentale.

2. Utilizza la legge del fenomeno fisico per dedurre teoricamente la funzione matematica $y = f(t)$ che descrive la f.e.m. alle estremità della bobina in funzione del tempo e verifica che la funzione ottenuta, coerentemente con il grafico sperimentale, abbia ampiezza crescente e periodo decrescente. Considera l'intensità del campo magnetico **B** e l'accelerazione angolare **α** della bobina come parametri. Considera inoltre aperte le estremità della bobina.
3. Deduci dal grafico sperimentale le informazioni quantitative necessarie per determinare il valore dell'accelerazione angolare della bobina e l'intensità del campo magnetico in cui ruota la bobina.
4. Spiega qual è il significato fisico dell'area, evidenziata in Figura 3, compresa tra ogni semiperiodo e l'asse dei tempi. Verifica, utilizzando la funzione $y = f(t)$, che queste aree hanno, in modulo, tutte lo stesso valore.

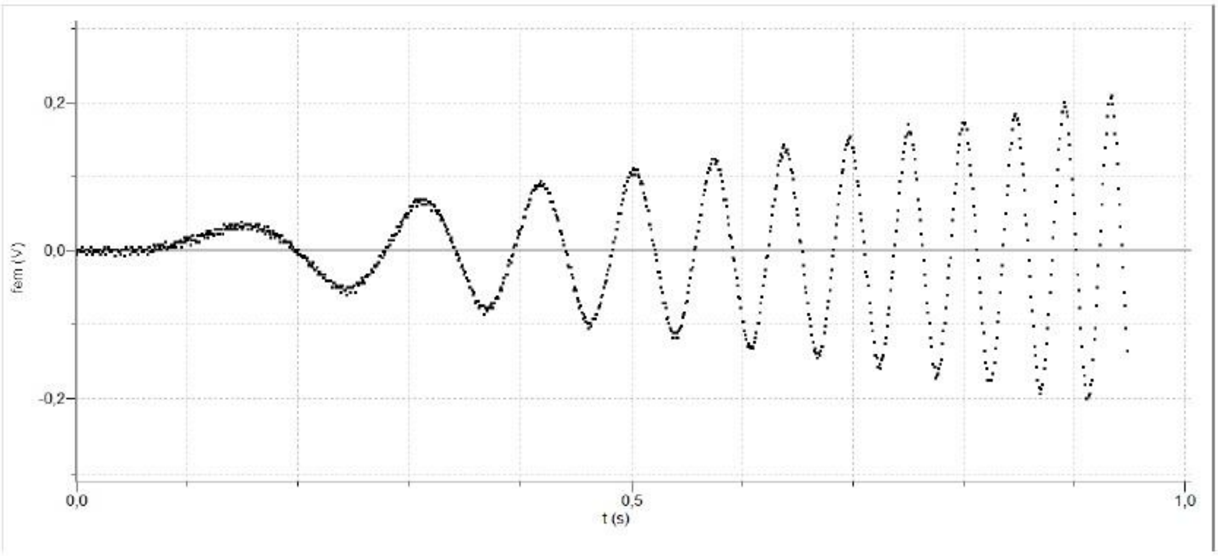


Figura 2

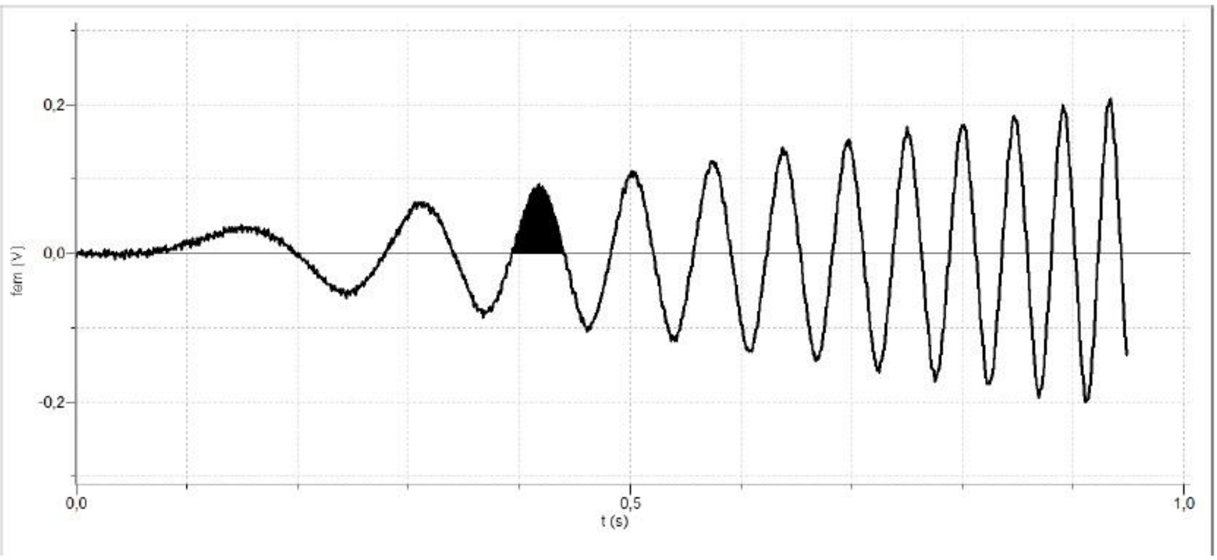


Figura 3

Problema n. 2

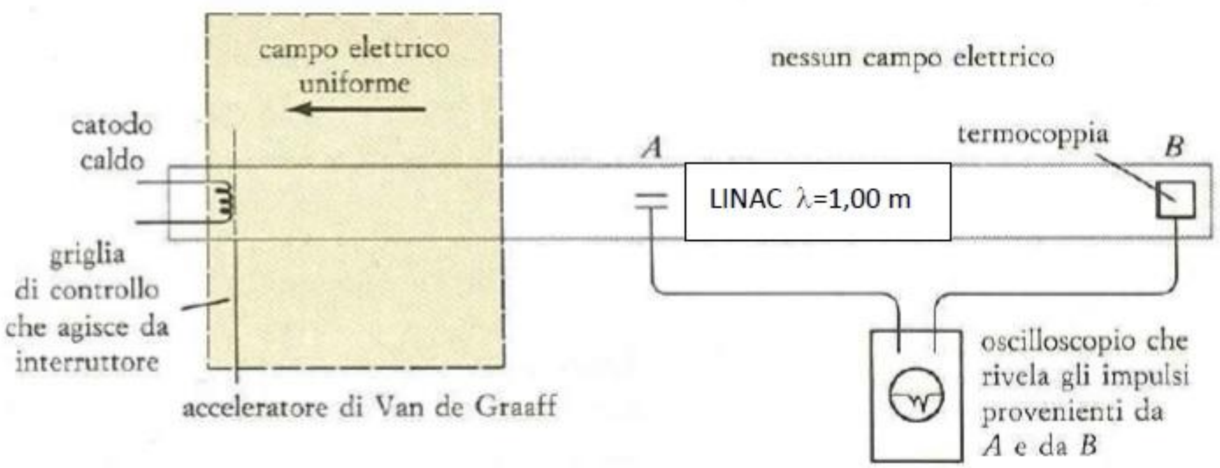
Negli anni 1963-1964 il fisico W. Bertozzi con la sua equipe realizzò un esperimento al MIT di Boston verificando l'esistenza di una velocità limite, pari a quella della luce nel vuoto.

Secondo la fisica classica è possibile accelerare un corpo dalla quiete fino a una velocità qualunque, per quanto grande essa sia, mentre per la relatività questo non è possibile.

L'esperimento consiste nell'accelerare elettroni attraverso opportuni campi elettrici prodotti da una un acceleratore di Van de Graaff e da un acceleratore lineare a radiofrequenza (LINAC). Il fascio di elettroni è prodotto da un catodo caldo, sottoforma di impulsi della durata di 3 ns ($3 \cdot 10^{-9}\ sec$) e viene accelerato dall'acceleratore di Van de Graaff attraverso differenze di potenziale variabili fino a un massimo di 1,5 milioni di volt.

Gli elettroni, usciti dall'acceleratore di Van de Graaff, attraversano un tubicino metallico posto in A nel quale inducono un impulso di corrente che viene inviato all'oscilloscopio (vedi Figure 1 e 2). Il tragitto da A e B è lungo 8,40 m ed è privo di aria e di campi elettrici che possano modificare la velocità degli elettroni (l'acceleratore LINAC è spento in una prima fase dell'esperimento e in particolare non è utilizzato nelle prime tre misure di sotto riportate). Arrivati in B gli elettroni urtano un disco di alluminio nel quale provocano un impulso di corrente che viene inviato anch'esso all'oscilloscopio. Sull'oscilloscopio la distanza tra i due impulsi dà la misura del tempo impiegato dagli elettroni per andare da A a B e quindi, nota la distanza AB, è possibile calcolare la loro velocità.

Ogni quadretto del reticolo dell'oscilloscopio (divisione) corrisponde ad un tempo di circa ($0,98 \cdot 10^{-8}\ sec$).



Fonte: http://giulioannovi.altervista.org/fisica/quinta/Energiacineticarelativistica.pdf

Figura 1

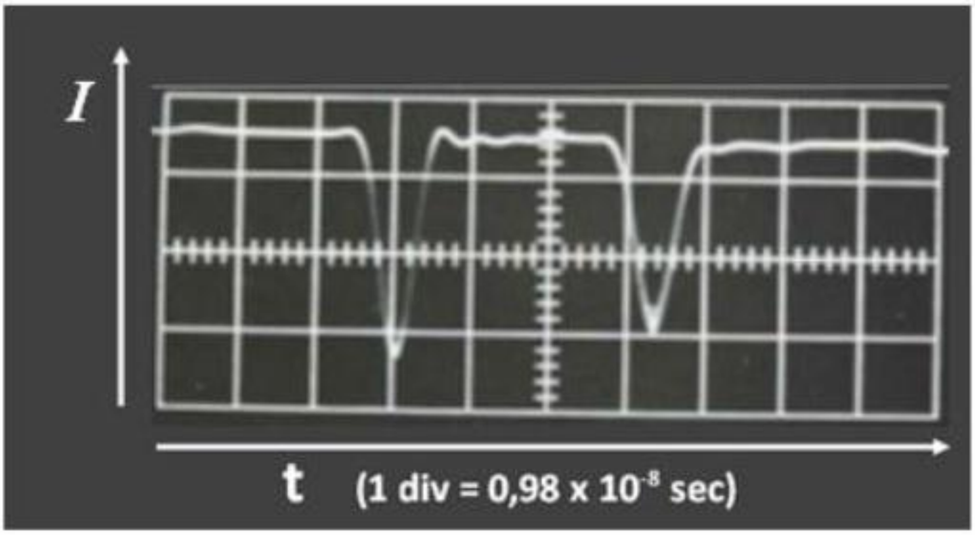


Figura 2 Impulsi provenienti da A e da B

Leggendo sull'oscilloscopio la distanza tra i due impulsi, al variare della differenza di potenziale applicata dall'acceleratore agli elettroni, si ottengono i seguenti valori (Tabella 1).

Differenza Potenziale (10^6 V)	0,5	1,0	1,5
N° divisioni tra i due impulsi	3,30	3,10	2,95

Tabella 1

In una seconda fase dell'esperimento, per aumentare ulteriormente l'energia degli elettroni viene utilizzato anche l'acceleratore lineare (LINAC) presente nel primo metro successivo al punto A, nel quale gli elettroni vengono accelerati da ulteriori 3,0 milioni di volt.
Nell'esperimento viene anche misurato il calore prodotto dagli elettroni sul disco B adoperando una termocoppia, e la carica incidente sullo stesso disco B, per mezzo di un misuratore di cariche. I risultati ottenuti per due diversi valori di differenza di potenziale complessiva sono (Tabella 2):

Differenza Potenziale (10^6 V)	1,5	4,5
Energia del fascio in B (J)	10,0	29,2
Carica del fascio in B (μC)	6,1	6,1

Tabella 2

Dopo questa breve esposizione, ti viene richiesto di:

1. Analizzare l'esperimento descritto e rappresentare in un piano cartesiano l'andamento di $\frac{v^2}{c^2}$, dove v è la velocità degli elettroni nel punto B e c è la velocità della luce nel vuoto, in funzione del lavoro W compiuto dal campo elettrico nell'acceleratore, sia per i valori di velocità previsti dal modello classico che per i valori effettivamente misurati nell'esperimento.

2. Individuare il modello fisico più adatto a descrivere la situazione sperimentale, relativamente all'andamento di $\frac{v^2}{c^2}$, in funzione del lavoro W compiuto dal campo elettrico nell'acceleratore.

3. Calcolare i valori di $\frac{v^2}{c^2}$ attesi in base al modello fisico individuato, confrontandoli con quelli sperimentali e discutere l'andamento atteso.

4. Verificare, utilizzando i dati di Tabella 2 nei casi di differenza di potenziale 1,5 e 4,5 milioni di volt, che l'energia cinetica posseduta dagli elettroni quando arrivano in B è circa uguale a quella fornita dall'acceleratore, giustificando così la seguente affermazione: "Il fatto che il valore della velocità misurata sia inferiore a quello previsto dalla fisica classica non è dovuto a perdite di energia nell'apparato".

QUESITI

Quesito 1
Una lampadina a incandescenza di potenza P=100W emette luce in maniera isotropa. Se viene posta al centro di una stanza cubica di lato L=7m, quanta energia arriverà in 10 minuti sul soffitto della stanza?

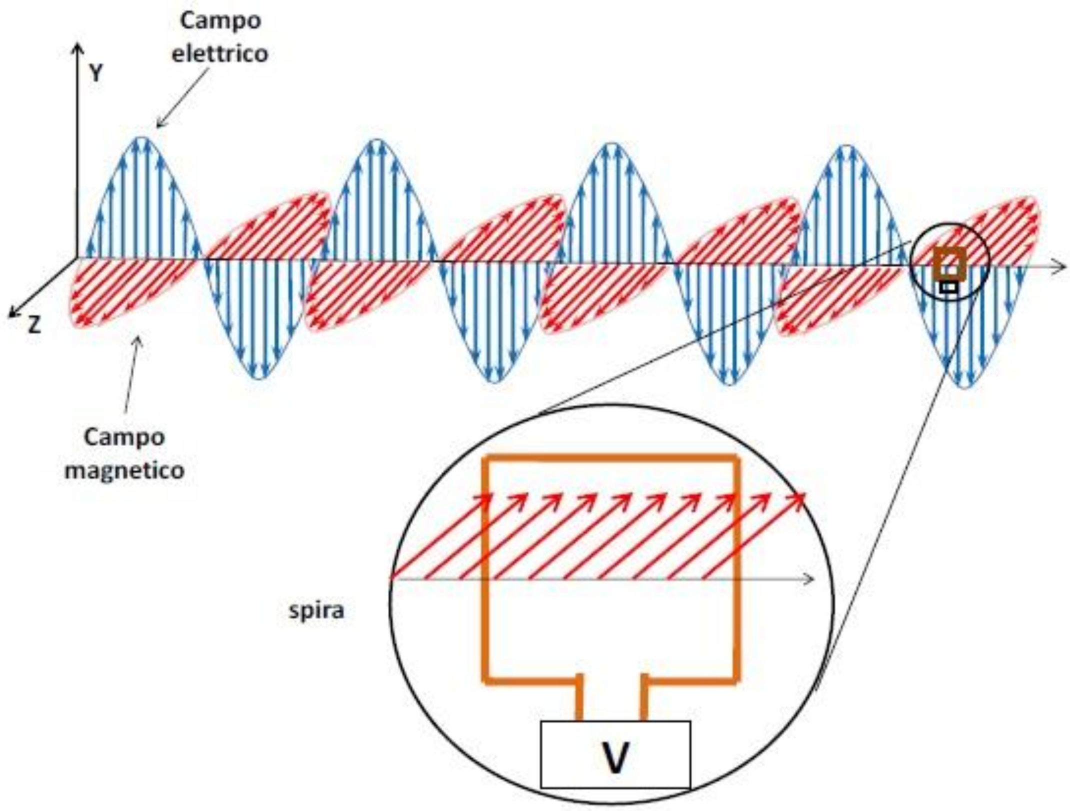
Quesito 2
Un elettrone e un positrone (antiparticella dell'elettrone con la stessa massa dell'elettrone, ma con carica opposta) si muovono uno contro l'altro con la stessa velocità. L'energia posseduta da entrambe le particelle è di 1,51 MeV.
Sapendo che la loro massa a riposo è di 0,511 $\frac{MeV}{c^2}$, qual è la velocità del positrone nel sistema di riferimento dell'elettrone?

Quesito 3
Un atomo di idrogeno si trova in uno stato eccitato dopo aver assorbito un fotone ultravioletto di lunghezza d'onda λ = 97,2 nm.
Questo atomo può riportarsi allo stato fondamentale seguendo diverse transizioni a ognuna delle quali corrisponde la emissione di luce di una particolare lunghezza d'onda.
Quante sono le transizioni possibili che provocano emissione di fotoni con lunghezza d'onda diversa da quella del fotone assorbito?
Quali tra queste transizioni provocano emissione nel visibile?
(*costante di Rydberg*: R = 1,0974 · $10^7 m^{-1}$)

Quesito 4
Un'antenna ricevente semplificata è costituita da una spira di rame di forma quadrata. Il lato della spira misura 20 cm e le sue estremità sono collegate ad un voltmetro. Quest'ultimo è impostato in modo da fornire il valore efficace della f.e.m. ai capi della spira, ovvero

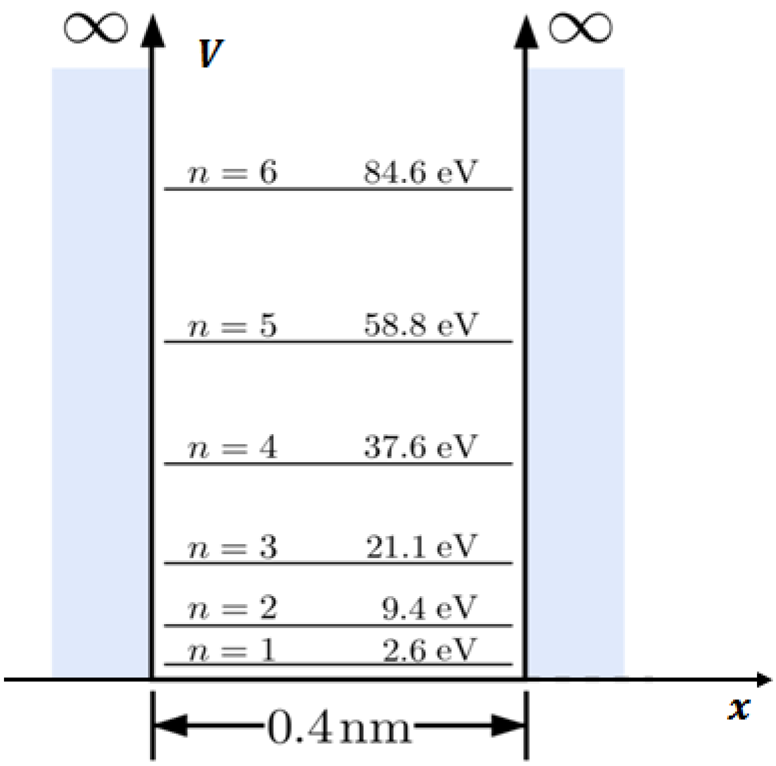
$$(f.e.m.)_{eff} = \frac{(f.e.m.)_{max}}{\sqrt{2}}$$

dove $(f.e.m.)_{max}$ è il valore massimo di una f.e.m. alternata.
L'antenna ricevente è posta a 100 m dall'antenna di una radio ricetrasmittente. Quest'ultima è del tipo utilizzato dai radioamatori.
Queste radio trasmettono ad una frequenza di 27 MHz e la legge impone loro di trasmettere con una potenza non superiore a 4W per non disturbare la ricezione delle trasmissioni radiofoniche e televisive. Talvolta i radioamatori non rispettano questo limite e trasmettono con potenze che possono arrivare a 200W.
Si vuole stabilire se la ricetrasmittente in esame rispetta il limite di potenza imposto dalla legge.
Il nostro voltmetro misura il massimo della f.e.m. quando il piano della spira è parallelo alla direzione di propagazione dell'onda e perpendicolare al campo magnetico, come mostrato in figura.
Il valore efficace di questa f.e.m. è di 12,5 mV.
Qual è la potenza emessa dall'antenna della ricetrasmittente?



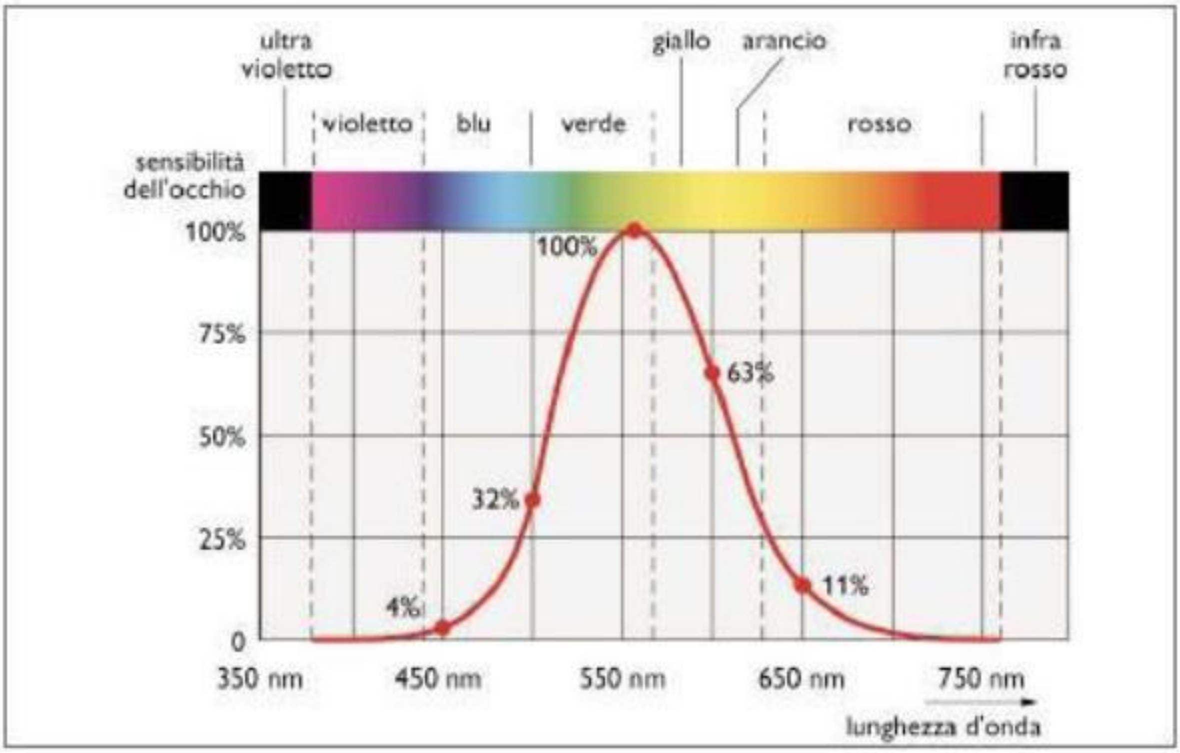
Quesito 5

Nel grafico sono rappresentati i livelli energetici di una particella di massa m confinata in una buca di potenziale infinita unidimensionale (detta anche pozzo). Utilizzando il principio di de Broglie e assumendo chela funzione d'onda stazionaria si annulli sui bordi della buca, determina la massa della particella.



Quesito 6

La figura riportata di seguito mostra come varia la sensibilità relativa percentuale del nostro occhio al variare della lunghezza d'onda nello spettro visibile. Il massimo della sensibilità (posto pari a 100%) si ha per λ=555 nm.



Fonte: *http://www.progettazioneottica.it/unita-fotometriche-lumen-candele-lux/1172*

NOTA: *La sensibilità assoluta del nostro occhio per una particolare lunghezza d'onda è definita come il rapporto tra l'energia che viene inviata dalla retina al cervello (ad esempio sotto forma di corrente elettrica) e l'energia dell'onda elettromagnetica incidente sulla retina. La sensibilità relativa percentuale per una particolare lunghezza d'onda è definita come il rapporto tra la sensibilità assoluta a quella lunghezza d'onda e la sensibilità assoluta alla lunghezza d'onda λ = 555 nm, il tutto moltiplicato per 100.*

Utilizzando i dati del grafico di figura (usa solo le lunghezze d'onda per cui sono riportati i valori della sensibilità relativa percentuale in forma numerica) traccia un grafico approssimativo che indichi di quanto deve aumentare l'intensità della radiazione incidente sulla retina dell'occhio, in modo che l'energia inviata dalla retina al cervello alle varie lunghezze d'onda sia la stessa (si ponga uguale a 1 l'intensità pari alla massima sensibilità relativa).

Determina, inoltre, quanti fotoni a $\lambda = 650 nm$ devono giungere sulla retina affinché essa invii al cervello la stessa energia che invia quando su di essa giungono 1000 fotoni di lunghezza d'onda $\lambda = 555\ nm$.

Soluzione del problema 1

1. **Spiega il fenomeno fisico che produce la f.e.m. alle estremità della bobina e, sulla base di esso, spiega il particolare andamento del grafico sperimentale.**

Il fenomeno fisico che produce la f.e.m. è l'induzione elettromagnetica. Essa consiste nella formazione di una f.e.m. indotta in una spira o in una bobina ogni volta che varia il flusso del campo magnetico concatenato alla spira o bobina stessa. Dato che per una bobina il flusso è:

$$\Phi_{\boldsymbol{B}} = NBS\cos\vartheta$$

si deduce che il flusso può variare o in seguito a una variazione di **B**, o di S, o dell'angolo ϑ tra la normale al piano della bobina e il campo.

Nel nostro caso, l'induzione avviene a seguito della continua variazione di ϑ dovuta alla rotazione della bobina.

La legge quantitativa che descrive il fenomeno è la legge di Faraday-Neumann. Essa è espressa dalla relazione:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi_{\boldsymbol{B}}}{\Delta t}$$

oppure in forma differenziale:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_{\boldsymbol{B}}}{dt}$$

Il segno – è legato alla legge di Lenz, in base alla quale il verso della f.e.m. indotta è tale da opporsi alla causa che l'ha prodotta.

La f.e.m. indotta dipende dalla rapidità con cui varia il flusso. Nel nostro caso, il flusso varia periodicamente essendo legato al moto rotatorio uniformemente accelerato della bobina. La causa di questo moto è la caduta di un pesetto che, srotolando un filo, mette in rotazione la bobina. Essendo il momento torcente esercitato sulla bobina di valore costante, si ha che l'accelerazione angolare α della bobina è anch'essa costante, ciò anche perché essendo i terminali della bobina aperti non avremo circolazione di corrente, e quindi nemmeno l'insorgere di momenti che potrebbero influire sulla rotazione della bobina.

Seguendo una legge sinusoidale, il flusso cambierà segno ogni mezzo periodo. L'accelerazione angolare della bobina, però, renderà questo periodo sempre più breve, e ciò spiega i picchi sempre più ravvicinati del grafico. Nello stesso tempo, la sempre più rapida variazione del flusso darà valori massimi della f.e.m. sempre più grandi, in accordo col grafico che vede picchi di valore crescente all'aumentare del tempo.

2. **Utilizza la legge del fenomeno fisico per dedurre teoricamente la funzione matematica y = f(t) che descrive la f.e.m. alle estremità della bobina in funzione del tempo e verifica che la funzione ottenuta, coerentemente con il grafico sperimentale, abbia ampiezza crescente e periodo decrescente. Considera l'intensità del campo magnetico B e l'accelerazione angolare α della bobina come parametri. Considera inoltre aperte le estremità della bobina.**

Il flusso magnetico concatenato alla bobina è:

$$\Phi_{\boldsymbol{B}} = NBS\cos\vartheta$$

ϑ rappresenta la posizione angolare. Dato che la bobina parte da ferma ed è inizialmente posta col proprio piano perpendicolare al campo ($\vartheta_0 = 0$), possiamo esprimere ϑ con la relazione:

$$\vartheta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

e quindi per il flusso avremo:

$$\Phi_{\boldsymbol{B}} = NBS\cos\frac{\alpha t^2}{2}$$

Applichiamo la legge di Faraday-Neumann in forma differenziale:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_{\boldsymbol{B}}}{dt} = -\left(-NBS\frac{2\alpha t}{2}\sin\frac{\alpha t^2}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = NBS\alpha t\ \sin\frac{\alpha t^2}{2}$$

Esaminando la legge ottenuta, si nota subito che la quantità $NBS\alpha t$ rappresenta il massimo valore della f.e.m. e, quindi, l'ampiezza:

$$A = NBS\alpha t = cost \times t$$

l'ampiezza è direttamente proporzionale al tempo e quindi è crescente con esso.
Per ciò che riguarda il periodo, possiamo fare ricorso alla legge della velocità di un moto rotatorio uniformemente accelerato:

$$\omega = \alpha t$$

ricordando che il periodo è legato alla velocità angolare dalla relazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

otteniamo che

$$T = \frac{2\pi}{\alpha t} = \frac{cost}{t}$$

il periodo è inversamente proporzionale al tempo e decresce con esso.

3. **Deduci dal grafico sperimentale le informazioni quantitative necessarie per determinare il valore dell'accelerazione angolare della bobina e l'intensità del campo magnetico in cui ruota la bobina.**

Consideriamo la relazione precedentemente ottenuta per l'ampiezza:

$$A = NBS\alpha t$$

essa appare come una funzione continua del tempo, ma è facile osservare che ha senso parlare di ampiezza solo per quei valori del tempo per i quali la funzione:

$$\varepsilon = NBS\alpha t \ \sin\frac{\alpha t^2}{2}$$

assume un massimo o un minimo, cioè per:

$$\frac{\alpha {t_k}^2}{2} = \frac{2k-1}{2}\,\pi \qquad con\ k = 1, 2, \dots$$

da questa condizione è possibile ottenere un'espressione per l'accelerazione angolare:

$$\alpha = \frac{2k-1}{{t_k}^2}\,\pi$$

Scegliendo un opportuno valore di k, possiamo ricavare, utilizzando la scala del grafico, il valore del tempo che permette di calcolare α. Osservando attentamente il grafico, notiamo che si ottiene una facile valutazione del tempo per k = 17, a cui corrisponde t = 0,80 s. Applicando la formula precedente si ottiene:

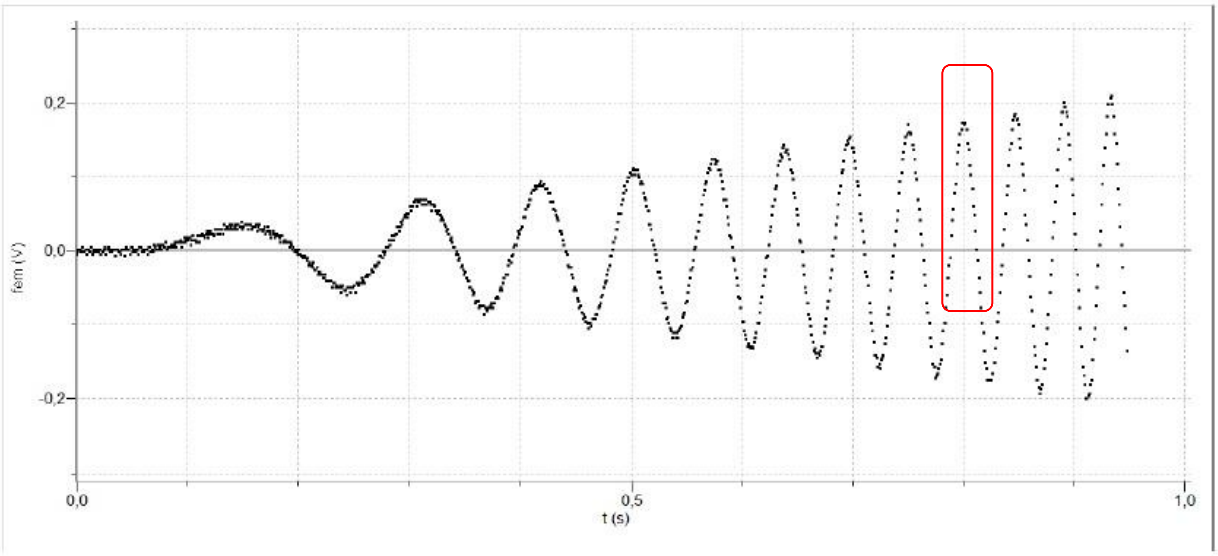
$$\alpha = \frac{2 \cdot 17 - 1}{(0{,}80\ s)^2}\,\pi \cong 1{,}6 \cdot 10^2\ \frac{rad}{s^2}$$

Per calcolare B è necessario dedurre dal grafico il valore dell'ampiezza. Con l'aiuto di un righello, misuriamo in mm il valore del picco corrispondente a k = 17, si ottiene A = 18 mm. Osservando che 0,20 V corrispondono a 21 mm, possiamo ricavare l'ampiezza in V con una semplice proporzione:

$$A: 18\,mm = 0{,}2\,V: 21\,mm \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{0{,}20\,V \cdot 18\,mm}{21\,mm} \cong 0{,}17\,V$$

Otteniamo pertanto:

$$B = \frac{A}{NS\alpha t} = \frac{A}{Nab\alpha t} = \frac{0{,}17\,V}{(100) \cdot (0{,}25\,m) \cdot (0{,}30\,m) \cdot \left(1{,}6 \cdot 10^2\,\frac{rad}{s^2}\right) \cdot (0{,}80\,s)} \cong 1{,}8 \cdot 10^{-4}\,T$$



Nel riquadro abbiamo evidenziato il picco corrispondente a k = 17.

4. **Spiega qual è il significato fisico dell'area, evidenziata in Figura 3, compresa tra ogni semiperiodo e l'asse dei tempi. Verifica, utilizzando la funzione y = f(t), che queste aree hanno, in modulo, tutte lo stesso valore.**

L'area in questione è:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_{(t)}\ dt = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{d\Phi}{dt}\ dt = -\int_{t_1}^{t_2} d\Phi = -\left(\Phi_{(\mathrm{t}_2)} - \Phi_{\mathrm{t}_1}\right)$$

L'area rappresenta l'opposto della variazione di flusso nell'intervallo $[t_1; t_2]$. Dividendo ambo i membri per $t_2 - t_1$ si ottiene la f.e.m. media:

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_{(t)}\ dt = -\frac{\Phi_{(\mathrm{t}_2)} - \Phi_{\mathrm{t}_1}}{t_2 - t_1}$$

Con riferimento all'area evidenziata in nero della figura 3 del testo del problema, è possibile calcolarne facilmente il valore considerando che:

- all'inizio del semiperiodo la normale al piano della spira è parallela al campo, per cui:

$$\Phi_{(\mathrm{t}_1)} = NBS$$

- alla fine del semiperiodo, la bobina ha compiuto una rotazione di 180° e il flusso è:

$$\Phi_{(\mathrm{t}_2)} = -NBS$$

pertanto l'area sarà:

$$Area = -\left(\Phi_{(\mathrm{t}_2)} - \Phi_{\mathrm{t}_1}\right) = 2\mathrm{NBS}$$

Si osserva altrettanto facilmente che, in valore assoluto, la variazione del flusso è uguale in tutti i semiperiodi e, di conseguenza, anche le aree saranno tutte uguali tra loro in valore assoluto.
Tuttavia, il testo chiede esplicitamente di verificare l'uguaglianza delle aree utilizzando la funzione

$$\varepsilon = NBS\alpha t \ \sin\frac{\alpha t^2}{2}$$

per semplificare la notazione, poniamo

$$k = NBS\alpha \qquad h = \frac{\alpha}{2}$$

e scriviamo

$$\varepsilon = kt\sin ht^2$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_{(t)} \ dt = k\int_{t_1}^{t_2} t \ \sin ht^2 \ dt = \frac{k}{2h}\int_{t_1}^{t_2} 2ht \ \sin ht^2 \ dt = -\frac{k}{2h} \cos ht^2\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{k}{2h}(\cos ht_1^2 - \cos ht_2^2)$$

essendo

$$\frac{k}{2h} = \frac{NSB\alpha}{2\frac{\alpha}{2}} = NBS$$

abbiamo che l'area è

$$Area = NSB\left(\cos\frac{\alpha}{2}t_1^2 - \cos\frac{\alpha}{2}t_2^2\right)$$

Notiamo che t_1 e t_2 sono gli istanti di tempo che annullano la funzione

$$\varepsilon = NBS\alpha t \ \sin\frac{\alpha t^2}{2}$$

essi si ottengono ponendo

$$\frac{\alpha t^2}{2} = k\pi \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

da cui si ottiene

$$t^2 = \frac{2k\pi}{\alpha}$$

avremo che

$$\cos\frac{\alpha}{2}t_1^2 - \cos\frac{\alpha}{2}t_2^2 = \cos\frac{\alpha}{2}\frac{2k\pi}{\alpha} - \cos\frac{\alpha}{2}\frac{2(k+1)\pi}{\alpha} = \cos k\pi - \cos(k+1)\,\pi$$

per ogni valore di k, questa differenza, in valore assoluto, vale sempre 2, per cui le varie aree, sempre in valore assoluto, hanno valore costante e precisamente:

$$|Area| = 2NSB$$

Soluzione del problema 2

1. **Analizzare l'esperimento descritto e rappresentare in un piano cartesiano l'andamento di $\frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{c}^2}$, dove $\mathbf{v}$ è la velocità degli elettroni nel punto B e $\mathbf{c}$ è la velocità della luce nel vuoto, in funzione del lavoro W compiuto dal campo elettrico nell'acceleratore, sia per i valori di velocità previsti dal modello classico che per i valori effettivamente misurati nell'esperimento.**

Gli elettroni vengono estratti per effetto termoionico dal catodo caldo con energia cinetica trascurabile. Il catodo è immerso in un campo elettrico uniforme che accelera gli elettroni fino alla velocità $\boldsymbol{v}$. Successivamente gli elettroni vengono concentrati in un sottile fascio dal tubicino metallico posto in A e percorrono, nella prima fase dell'esperimento, il tratto AB con velocità costante.

Applicando la fisica classica, possiamo ricavare questa velocità considerando che il lavoro $W\ (= e\Delta V)$ compiuto dal campo elettrico sugli elettroni viene completamente trasformato in energia cinetica:

$$W = K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2W}{m} \quad \Longrightarrow \quad \frac{v^2}{c^2} = \frac{2}{mc^2}W$$

Dalla relazione ottenuta emerge che la grandezza $\frac{v^2}{c^2}$ è direttamente proporzionale al lavoro W, per cui il grafico teorico richiesto è una semiretta uscente dall'origine. Per disegnarla con precisione, ricaviamo il lavoro del campo elettrico per i tre valori della d.d.p. riportati nella tabella 1 mediante la formula:

$$W = e\Delta V$$

e calcoliamo i corrispondenti valori di $\frac{v^2}{c^2}$ previsti dalla fisica classica. Per eseguire i calcoli useremo i seguenti valori per la massa e la carica dell'elettrone e per la velocità della luce nel vuoto:

m = 9,11 · 10^{-31} kg

e = 1,60 · 10^{-19} C

c = 3,00 · 10^{8} m/s

Raccogliamo i risultati in una tabella:

$\boldsymbol{\Delta V}\ (\mathbf{10^6}\ \boldsymbol{V})$	$\boldsymbol{W}\ (\mathbf{10^{-13}}\ \boldsymbol{J})$	$\frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{c}^2}$
0,5	0,80	1,95
1,0	1,6	3,90
1,5	2,4	5,85

Adesso, sempre utilizzando la tabella 1, ricaviamo i valori sperimentali dei rapporti $\frac{v^2}{c^2}$. Utilizzeremo l'informazione secondo la quale 1 div. = 0,98 · 10^{-8} s, necessaria per ricavare il tempo impiegato dall'elettrone per percorrere il tratto AB alle varie d.d.p. ($\Delta t = N\ div. \times 0{,}98 \cdot 10^{-8} s$), e useremo la legge del moto uniforme per ricavare i rapporti $\frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{c}^2}$:

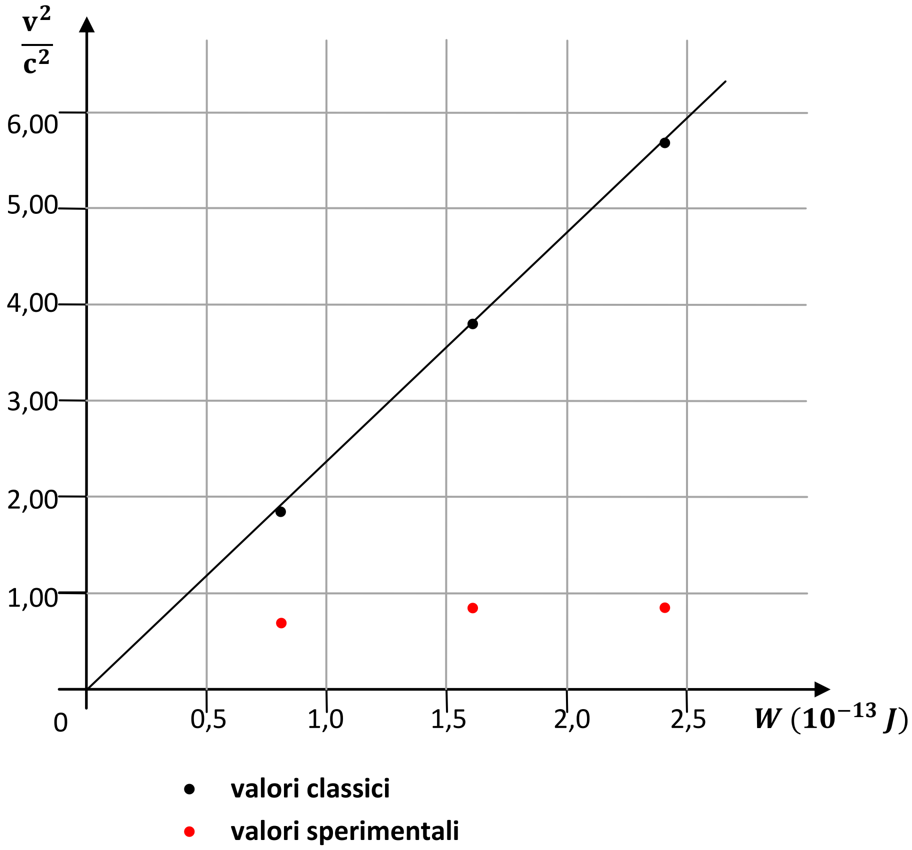
$$v = \frac{l_{AB}}{\Delta t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{v^2}{c^2} = \frac{l_{AB}^2}{c^2 \Delta t^2} \qquad con\ l_{AB} = 8{,}40\ m$$

raccogliamo i dati in un'apposita tabella:

$\Delta V\ (10^6\ V)$	$W\ (10^{-13}\ J)$	$N\ div.$	$\Delta t\ (10^{-8}\ s)$	$\frac{v^2}{c^2}$
0,5	0,8	3,30	3,23	0,75
1,0	1,6	3,10	3,04	0,85
1,5	2,4	2,95	2,89	0,94

Riportiamo, per maggiore chiarezza, i dati da rappresentare nel grafico ed eseguiamone la rappresentazione nel piano cartesiano:

$W\ (10^{-13}\ J)$	$\frac{v^2}{c^2}$ classico	$\frac{v^2}{c^2}$ sperimentale
0,5	1,95	0,75
1,0	3,90	0,85
1,5	5,85	0,94



Analizzando i dati in tabella e il grafico, si nota immediatamente che il modello classico è in totale disaccordo con i dati sperimentali. Appare inoltre evidente che le velocità previste classicamente violano i principi della Relatività ristretta, essendo tutte maggiori della velocità della luce. E' necessario, pertanto, interpretare il fenomeno con un nuovo modello.

2. **Individuare il modello fisico più adatto a descrivere la situazione sperimentale, relativamente all'andamento di $\frac{v^2}{c^2}$, in funzione del lavoro W compiuto dal campo elettrico nell'acceleratore.**

Per descrivere la situazione sperimentale è necessario considerare, visti anche i valori sperimentali di $\frac{v^2}{c^2}$, gli elettroni come particelle relativistiche e usare la formula dell'energia cinetica relativistica:

$$K = (\gamma - 1)m_0c^2 \quad con\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad fattore\ lorentziano \quad e\ m_0\ massa\ a\ riposo\ dell'elettrone$$

Elaborando convenientemente la relazione $W = K$ si ottiene:

$$W = (\gamma - 1)m_0c^2 \qquad \Rightarrow$$

$$W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = W + m_0c^2 \qquad \Rightarrow$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{m_0c^2}{W + m_0c^2}\right)^2 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m_0c^2}{W + m_0c^2}\right)^2$$

3. **Calcolare i valori di $\frac{v^2}{c^2}$ attesi in base al modello fisico individuato, confrontandoli con quelli sperimentali e discutere l'andamento atteso.**

Il modello relativistico dà i seguenti valori per $\frac{v^2}{c^2}$:

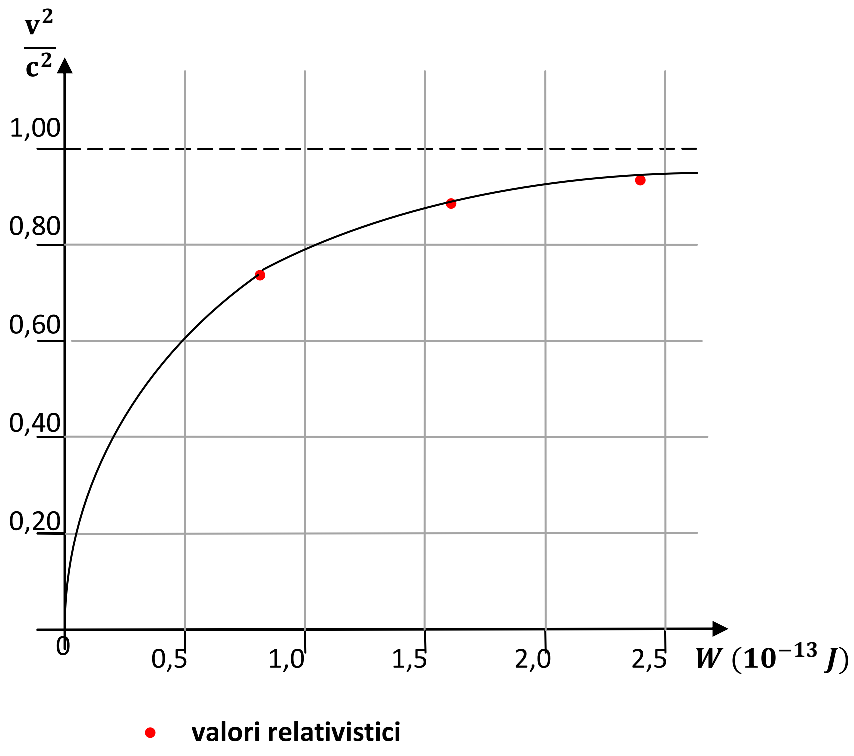
$\Delta V\ (10^6\ V)$	$W\ (10^{-13}\ J)$	$\frac{v^2}{c^2}$
0,5	0,80	0,75
1,0	1,6	0,89
1,5	2,4	0,94

Mettiamo a confronto questi valori con quelli ricavati sperimentalmente:

$W\ (10^{-13}\ J)$	$\frac{v^2}{c^2}$ relativistico	$\frac{v^2}{c^2}$ sperimentale
0,5	0,75	0,75
1,0	0,89	0,85
1,5	0,94	0,94

I valori ottenuti sono molto simili a quelli sperimentali e confermano la validità dell'approccio relativistico.

Possiamo concludere che la grandezza di $\frac{v^2}{c^2}$ non è direttamente proporzionale a W , come prevede il modello classico, bensì è rappresentata da una funzione crescente che, per $W \to \infty$, tende asintoticamente a 1.



4. **Verificare, utilizzando i dati di Tabella 2 nei casi di differenza di potenziale 1,5 e 4,5 milioni di volt, che l'energia cinetica posseduta dagli elettroni quando arrivano in B è circa uguale a quella fornita dall'acceleratore, giustificando così la seguente affermazione: "Il fatto che il valore della velocità misurata sia inferiore a quello previsto dalla fisica classica non è dovuto a perdite di energia nell'apparato".**

L'acceleratore lineare LINAC ha lo scopo di accelerare ulteriormente gli elettroni. L'accelerazione avviene all'uscita del tubicino posto in A e avviene nello spazio di 1,00 m, sicché agli elettroni resterà uno spazio di 7,40 m di moto uniforme per giungere in B. La d.d.p. del LINAC è $3,0 \cdot 10^6$ V, il che significa che sugli elettroni viene compiuto un ulteriore lavoro:

$$W' = eV' = (1,60 \cdot 10^{-19}\, C) \cdot (3,0 \cdot 10^6 V) = 4,8 \cdot 10^{-13} J$$

quindi il lavoro totale per una d.d.p. di 4,5 V è:

$$W_{TOT} = (2,4 + 4,8) \cdot 10^{-13} J = 7,2 \cdot 10^{-13} J$$

Per il teorema dell'energia cinetica, tutto il lavoro del campo elettrico viene convertito in energia cinetica degli elettroni; quando il fascio urta il disco B, l'energia cinetica viene trasformata in calore e rilevata per mezzo della termocoppia.

Per utilizzare la tabella 2 è necessario trovare l'energia totale conferita al fascio. Essa si può calcolare moltiplicando il lavoro compiuto dal campo elettrico su un singolo elettrone a 1,5 MV e a 4,5 MV per il numero di elettroni che giungono in B. Esso può essere dedotto dalla tabella 2, dividendo la carica del fascio per la carica dell'elettrone:

$$N = \frac{Q_{TOT}}{e} = \frac{6,1 \cdot 10^6 C}{1,60 \cdot 10^{-19} C} \cong 3,8 \cdot 10^{13}\ elettroni$$

Avremo quindi:

$$E = NW$$

a 1,5 MV

$$E_1 = (3,8 \cdot 10^{13}) \cdot (2,4 \cdot 10^{-13} J) \cong 9,2\, J$$

a 4,5 MV

$$E_2 = (3,8 \cdot 10^{13}) \cdot (7,2 \cdot 10^{-13} J) \cong 27\, J$$

A questi risultati potevamo pervenire più rapidamente moltiplicando la carica totale del fascio in B per la differenza di potenziale.

Confrontiamo questi valori con quelli sperimentali della tabella 2:

$\boldsymbol{\Delta V\ (10^6\ V)}$	**Energia del fascio in B (J)**	**Energia del fascio teorica (J)**
1,5	10,0	9,2
4,5	29,2	27

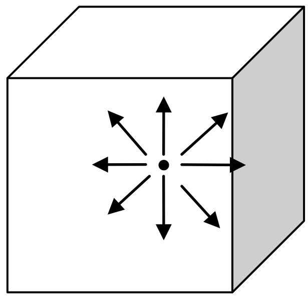
I valori teorici dell'energia risultano inferiori a quelli rilevati in B, e ciò può essere dovuto a errori sperimentali di misura. La cosa che si può affermare con certezza è che la velocità degli elettroni è inferiore a quella prevista dalla fisica classica per effetto relativistico e non per perdite di energia nell'apparato sperimentale.

Soluzione dei quesiti

Quesito 1

Una lampadina a incandescenza di potenza P=100W emette luce in maniera isotropa. Se viene posta al centro di una stanza cubica di lato L=7m, quanta energia arriverà in 10 minuti sul soffitto della stanza?

Soluzione



La lampadina è posta alla stessa distanza dalle pareti della stanza ed emette luce con la stessa intensità e in tutte le direzioni. Pertanto possiamo ritenere che al soffitto arrivi 1/6 della potenza emessa. Da ciò è possibile poi calcolare l'energia che giunge al soffitto in 10 minuti.

$$E_{soffitto} = P_{soffitto} \cdot \Delta t = \frac{P_{sorgente}}{\Delta t} = \frac{100\ W}{6} \cdot 600\ s = 1{,}0 \cdot 10^4 J$$

Quesito 2

Un elettrone e un positrone (antiparticella dell'elettrone con la stessa massa dell'elettrone, ma con carica opposta) si muovono uno contro l'altro con la stessa velocità. L'energia posseduta da entrambe le particelle è di 1,51 MeV.
Sapendo che la loro massa a riposo è di 0,511 $\frac{MeV}{c^2}$, qual è la velocità del positrone nel sistema di riferimento dell'elettrone?

Soluzione

Dall'equazione relativistica

$$E = mc^2$$

ricordando la definizione di massa relativistica:

$$m = \gamma m_0$$

con γ fattore lorentziano e m_0 massa a riposo, possiamo ricavare γ:

$$E = \gamma m_0 c^2 \qquad \gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{1{,}51\ MeV}{0{,}511\,\frac{MeV}{c^2} \cdot c^2} = \frac{1{,}51\ MeV}{0{,}511\ Mev} \cong 2{,}955$$

essendo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

con facili calcoli si ottiene, in modulo, la velocità delle particelle rispetto al sistema di laboratorio:

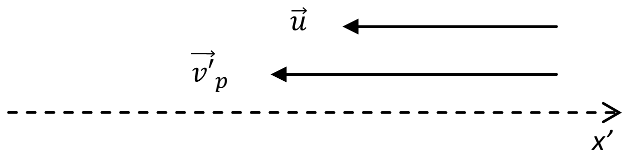
$$v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = c \cdot \sqrt{1 - 2{,}955^{-2}} \cong 0{,}941c \cong 2{,}82 \cdot 10^8 \, \frac{m}{s}$$

Il disegno rappresenta la situazione nel riferimento del laboratorio. Le due velocità hanno verso opposto, pertanto poniamo

$$v_e = 0{,}941c \qquad\qquad v_p = -\, 0{,}941c$$

Poniamoci ora nel sistema di riferimento S' dell'elettrone, con asse *x'* orientato nello stesso verso di x, nel quale il laboratorio si muove alla velocità

$$u = -0{,}941c$$



Applicando la legge di composizione relativistica delle velocità, possiamo ricavare la velocità v'_p del positrone rispetto all'elettrone:

$$v'_p = \frac{v_p + u}{1 + \frac{v_p u}{c^2}} = \frac{-\,0{,}941c - 0{,}941c}{1 + \frac{(-\,0{,}941c) \cdot (-\,0{,}941c)}{c^2}} = -\frac{1{,}882c}{1{,}885} \cong -\,0{,}998c \cong -\,2{,}99 \cdot 10^8 \, \frac{m}{s}$$

Il segno - indica correttamente che il positrone si muove verso l'elettrone. Nei calcoli è stato usato per la velocità della luce il valore arrotondato 3,00 · 10^8 m/s.

Quesito 3

Un atomo di idrogeno si trova in uno stato eccitato dopo aver assorbito un fotone ultravioletto di lunghezza d'onda λ = 97,2 nm.
Questo atomo può riportarsi allo stato fondamentale seguendo diverse transizioni a ognuna delle quali corrisponde la emissione di luce di una particolare lunghezza d'onda.
Quante sono le transizioni possibili che provocano emissione di fotoni con lunghezza d'onda diversa da quella del fotone assorbito?
Quali tra queste transizioni provocano emissione nel visibile?
(*costante di Rydberg*: R = 1,0974 · $10^7 m^{-1}$)

Soluzione

Dalla formula di Balmer:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad con\ k, n\ interi\ positivi\ e\ n > k$$

R = 1,0974 · $10^7 m^{-1}$ costante di Rydberg

n = numero quantico del livello eccitato

k = numero quantico dei livelli inferiori

possiamo ricavare, posto k = 1 (stato fondamentale), il numero quantico del livello eccitato:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad \Rightarrow \quad n = \sqrt{\frac{\lambda R}{\lambda R - 1}} = \sqrt{\frac{(97{,}2 \cdot 10^{-9} m) \cdot (1{,}0974 \cdot 10^7 m^{-1})}{(97{,}2 \cdot 10^{-9} m) \cdot (1{,}0974 \cdot 10^7 m^{-1}) - 1}} \cong 4$$

Ricordiamo che la radiazione visibile ha lunghezze d'onda approssimativamente comprese tra i 400 e i 700 nm. Per lunghezze d'onda superiori la radiazione è infrarossa, per lunghezze d'onda inferiori ultravioletta.

Studiamo le possibili transizioni:

- $n = 4 \ \rightarrow \ k = 1$ viene riemesso il fotone assorbito con $\lambda = 97{,}2\ nm$.

- $n = 4 \ \rightarrow \ k_1 = 2 \ \longrightarrow \ k_2 = 1$

  - nella transizione dal livello 4 al livello 2 viene emesso un fotone con

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = \frac{3}{16}R \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{16}{3R} \cong 486\ nm$$

  questa radiazione cade nel visibile e fa parte della serie di Balmer

  - nella transizione dal livello 2 al livello 1 si ha:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}R \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{4}{3R} \cong 121\ nm$$

  questa radiazione cade nell'ultravioletto e fa parte della serie di Lyman.

- $n = 4 \ \rightarrow \ k_1 = 3 \ \rightarrow \ k_2 = 1$

  - nella transizione dal livello 4 al livello 3 abbiamo:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) = \frac{7}{144}R \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{144}{7R} \cong 1875\,nm$$

  la radiazione cade nell'infrarosso e fa parte della serie di Paschen.

  - nella transizione dal livello 3 al livello 1 abbiamo

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{9}R \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{9}{8R} \cong 103\,nm$$

  la radiazione cade nell'ultravioletto e fa parte della serie di Lyman.

- $n = 4 \ \rightarrow \ k_1 = 3 \ \rightarrow \ k_2 = 2 \ \rightarrow \ k_3 = 1$

  - le transizioni dal livello 4 al livello 3 e dal livello 2 al livello 1 le abbiamo già studiate.
  - la transizione dal livello 3 al livello 2 ci dà:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = \frac{5}{36}R \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{36}{5R} \cong 656\,nm$$

  questa radiazione cade nel visibile e fa parte della serie di Balmer.

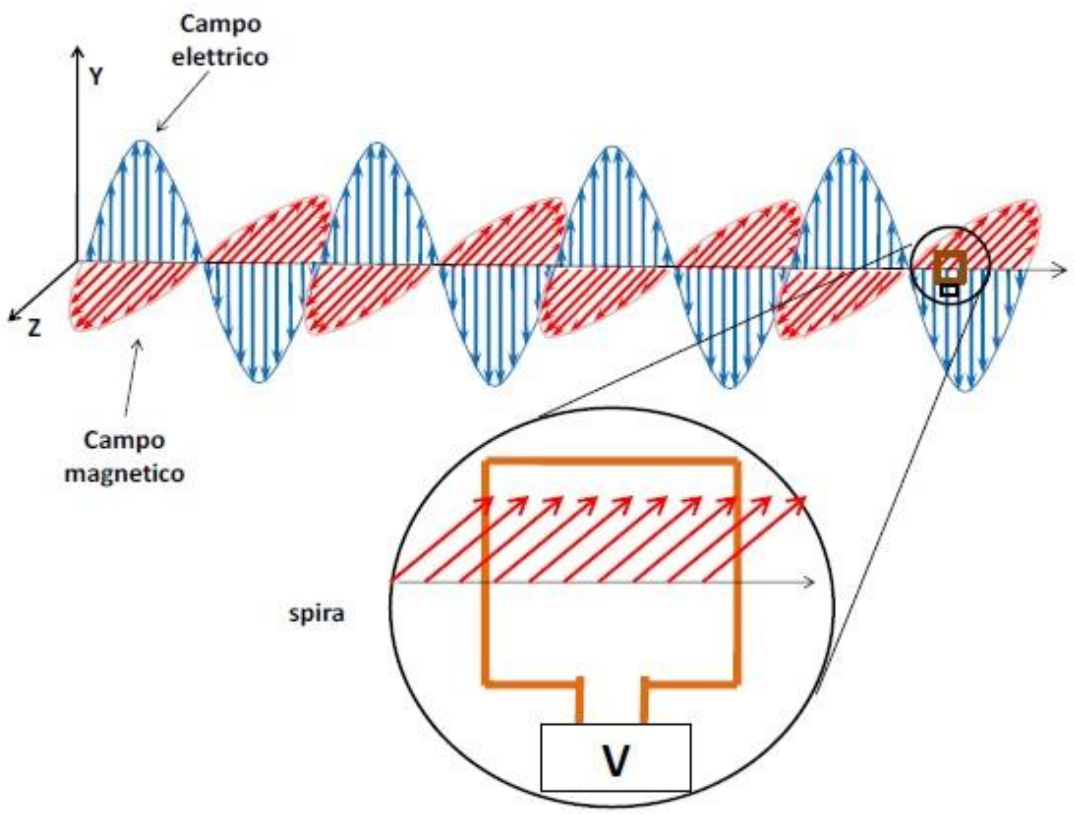
Ricapitolando, le transizioni che provocano emissioni di fotoni con lunghezza d'onda diversa da quella del fotone assorbito sono 5, e di queste quelle che provocano emissione nel visibile sono 2: dal livello 4 al livello 2 e dal livello 3 al livello 2.

Quesito 4

Un'antenna ricevente semplificata è costituita da una spira di rame di forma quadrata. Il lato della spira misura 20 cm e le sue estremità sono collegate ad un voltmetro. Quest'ultimo è impostato in modo da fornire il valore efficace della f.e.m. ai capi della spira, ovvero

$$(f.e.m.)_{eff} = \frac{(f.e.m.)_{max}}{\sqrt{2}}$$

dove $(f.e.m.)_{max}$ è il valore massimo di una f.e.m. alternata.
L'antenna ricevente è posta a 100 m dall'antenna di una radio ricetrasmittente. Quest'ultima è del tipo utilizzato dai radioamatori.
Queste radio trasmettono ad una frequenza di 27 MHz e la legge impone loro di trasmettere con una potenza non superiore a 4W per non disturbare la ricezione delle trasmissioni radiofoniche e televisive. Talvolta i radioamatori non rispettano questo limite e trasmettono con potenze che possono arrivare a 200W.
Si vuole stabilire se la ricetrasmittente in esame rispetta il limite di potenza imposto dalla legge.
Il nostro voltmetro misura il massimo della f.e.m. quando il piano della spira è parallelo alla direzione di propagazione dell'onda e perpendicolare al campo magnetico, come mostrato in figura.
Il valore efficace di questa f.e.m. è di 12,5 mV.
Qual è la potenza emessa dall'antenna della ricetrasmittente?



Soluzione

Il quesito si risolve applicando la legge di Faraday - Neumann:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_{\boldsymbol{B}}}{dt}$$

il campo **B** oscilla secondo la legge:

$$B = B_{max} \sin 2\pi f t$$

esprimiamo il flusso del campo magnetico tenendo conto che la spira è perpendicolare al campo, e quindi il coseno dell'angolo tra il campo e la normale al piano della spira è 1, e considerando che la spira è di forma quadrata e pertanto la sua area è $A = l^2$:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}(B_{max} l^2 \sin 2\pi f t) = -2\pi B_{max} l^2 f \cos 2\pi f t$$

si riconosce immediatamente che

$$\varepsilon_{max} = 2\pi B_{max} l^2 f$$

e quindi

$$B_{max} = \frac{\varepsilon_{max}}{2\pi l^2 f}$$

ovvero

$$B_{eff} = \frac{\varepsilon_{eff}}{2\pi l^2 f}$$

A questo punto ricaviamo l'intensità media dell'onda elettromagnetica:

$$\bar{I} = c\bar{u} = \frac{c}{\mu_0} B_{eff}^2 = \frac{c\varepsilon_{eff}^2}{4\pi^2 \mu_0 l^4 f^2}$$

l'intensità media è legata alla potenza dalla relazione:

$$\bar{I} = \frac{\bar{P}}{4\pi d^2}$$

dove *d* è la distanza della spira dall'antenna trasmittente.

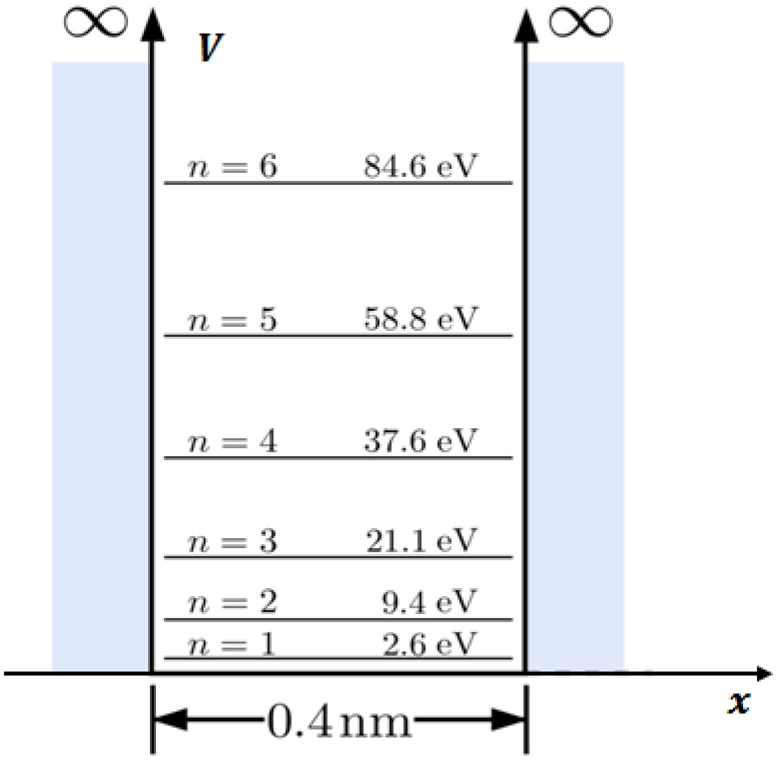
Avremo pertanto:

$$\bar{P} = 4\pi d^2 \bar{I} = \frac{4\pi d^2 c\varepsilon_{eff}^2}{4\pi^2 \mu_0 l^4 f^2} = \frac{d^2 c\varepsilon_{eff}^2}{\pi \mu_0 l^4 f^2} = \frac{(100\,m)^2 \cdot \left(3{,}00 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\right) \cdot (12{,}5 \cdot 10^{-3} V)^2}{\pi \left(4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Tm}{A}\right) \cdot (0{,}20\,m)^4 \cdot (27 \cdot 10^6 s^{-1})} \cong 102\,W$$

Il valore della potenza è superiore al limite di legge di 4 W.

Quesito 5

Nel grafico sono rappresentati i livelli energetici di una particella di massa m confinata in una buca di potenziale infinita unidimensionale (detta anche pozzo). Utilizzando il principio di de Broglie e assumendo che la funzione d'onda stazionaria si annulli sui bordi della buca, determina la massa della particella.



Soluzione

La particella confinata nella buca di potenziale possiede energia cinetica data dalla relazione:

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

per la teoria di de Broglie la quantità di moto della particella è:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

per cui

$$E = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

Tenendo conto che la funzione d'onda si annulla sui bordi della buca, possiamo applicare all'onda di materia la condizione di stazionarietà :

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad con\ n = 1, 2, \dots\ \ e\ L\ larghezza\ della\ buca$$

otteniamo così i livelli energetici:

$$E_n = \frac{h^2}{2m\frac{4L^2}{n^2}} = n^2 \frac{h^2}{8mL^2}$$

L'energia dello stato fondamentale si ottiene ponendo $n = 1$ nella relazione precedente:

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}$$

essendo i valori dell'energia proporzionali a n^2 , si ha:

$$E_2 = 4E_1 \qquad E_3 = 9E_1 \qquad E_4 = 16E_1 \qquad E_5 = 25E_1$$

per far sì che queste relazioni siano rispettate, è necessario correggere il valore di 2,6 eV dell'energia dello stato fondamentale riportata dal testo in 2,35 eV. Utilizzando questo valore, opportunamente trasformato in J, ricaviamo la massa della particella:

$$E_1 = 2{,}35\ eV = 2{,}35\ eV \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \frac{J}{eV} = 3{,}76 \cdot 10^{-19} J$$

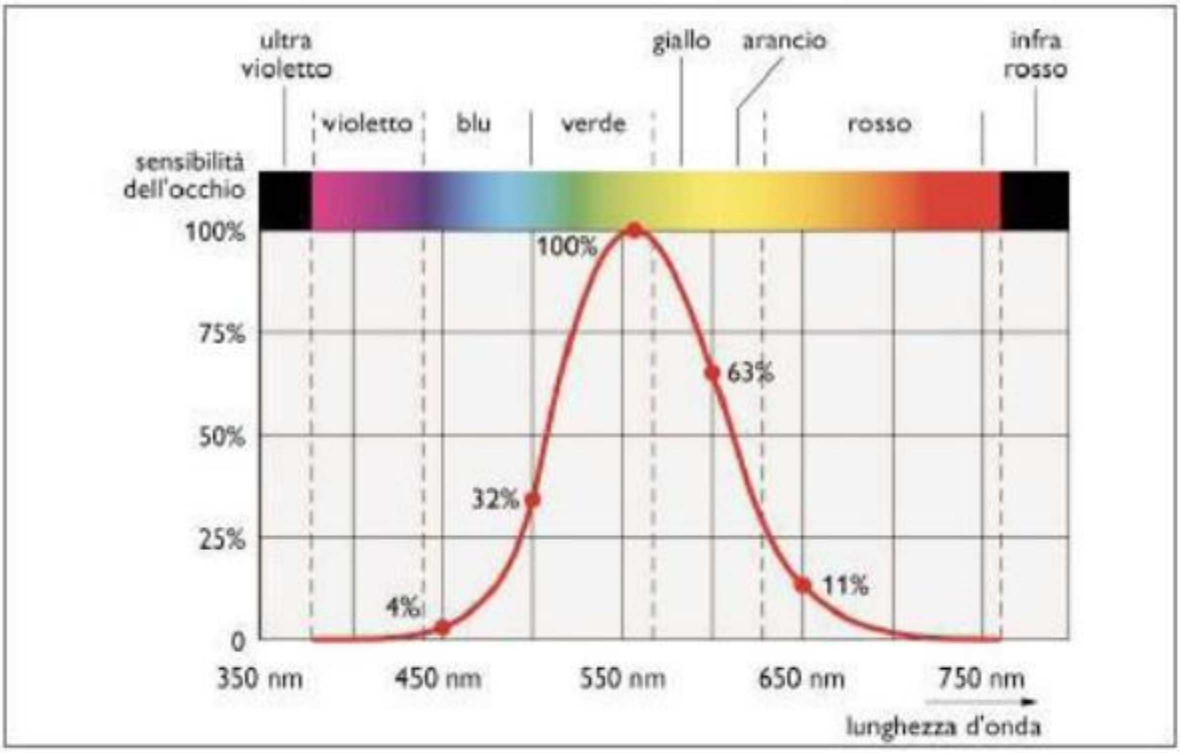
$$m = \frac{h^2}{8E_1L^2} = \frac{(6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s)^2}{8 \cdot (3{,}76 \cdot 10^{-19}\ J) \cdot (0{,}4 \cdot 10^{-9}\ m)^2} \cong 9{,}13 \cdot 10^{-31} kg \approx 9 \cdot 10^{-31} kg$$

l'ultimo arrotondamento è stato fatto tenendo conto che la larghezza della buca è espressa con una sola cifra significativa.

Dal valore della massa deduciamo che la particella confinata nella buca è un elettrone.

Quesito 6

La figura riportata di seguito mostra come varia la sensibilità relativa percentuale del nostro occhio al variare della lunghezza d'onda nello spettro visibile. Il massimo della sensibilità (posto pari a 100%) si ha per λ=555 nm.



Fonte: http://www.progettazioneottica.it/unita-fotometriche-lumen-candele-lux/1172

NOTA: ***La sensibilità assoluta del nostro occhio per una particolare lunghezza d'onda è definita come il rapporto tra l'energia che viene inviata dalla retina al cervello (ad esempio sotto forma di corrente elettrica) e l'energia dell'onda elettromagnetica incidente sulla retina. La sensibilità relativa percentuale per una particolare lunghezza d'onda è definita come il rapporto tra la sensibilità assoluta a quella lunghezza d'onda e la sensibilità assoluta alla lunghezza d'onda λ = 555 nm, il tutto moltiplicato per 100.***

Utilizzando i dati del grafico di figura (usa solo le lunghezze d'onda per cui sono riportati i valori della sensibilità relativa percentuale in forma numerica) traccia un grafico approssimativo che indichi di quanto deve aumentare l'intensità della radiazione incidente sulla retina dell'occhio, in modo che l'energia inviata dalla retina al cervello alle varie lunghezze d'onda sia la stessa (si ponga uguale a 1 l'intensità pari alla massima sensibilità relativa).
Determina, inoltre, quanti fotoni a λ = 650nm devono giungere sulla retina affinché essa invii al cervello la stessa energia che invia quando su di essa giungono 1000 fotoni di lunghezza d'onda λ = 555 nm.

Soluzione

Per definizione, la sensibilità assoluta alla lunghezza d'onda λ è:

$$s_\lambda = \frac{E_{trasmessa\ \lambda}}{E_{onda\ \lambda}}$$

la sensibilità relativa percentuale è

$$s_{\%\lambda} = \frac{s_\lambda}{s_{\lambda_0}} \cdot 100$$

dove s_{λ_0} è la sensibilità assoluta massima, che si ha per λ = 555 nm.

Tenendo conto che

$$s_{\lambda_0} = \frac{E_{trasmessa\ \lambda_0}}{E_{onda\ \lambda_0}}$$

abbiamo che

$$s_{\%\lambda} = \frac{E_{trasmessa\ \lambda}}{E_{onda\ \lambda}} \cdot \frac{E_{onda\ \lambda_0}}{E_{trasmessa\ \lambda_0}} \cdot 100$$

Se imponiamo, come richiesto dal testo, che l'energia trasmessa al cervello sia sempre la stessa a tutte le lunghezze d'onda, possiamo porre:

$$E_{trasmessa\ \lambda} = E_{trasmessa\ \lambda_0}$$

e quindi

$$s_{\%\lambda} = \frac{E_{onda\ \lambda_0}}{E_{onda\ \lambda}} \cdot 100$$

da cui

$$E_{onda\ \lambda} = \frac{E_{onda\ \lambda_0}}{s_{\%\lambda}} \cdot 100$$

Seguendo le indicazioni del testo, poniamo

$$E_{onda\ \lambda_0} = 1$$

e osserviamo che

$$\frac{s_{\%\lambda}}{100}$$

è la sensibilità relativa in forma unitaria, che indicheremo con $s_{r\lambda}$

Abbiamo, in definitiva, dimostrato che

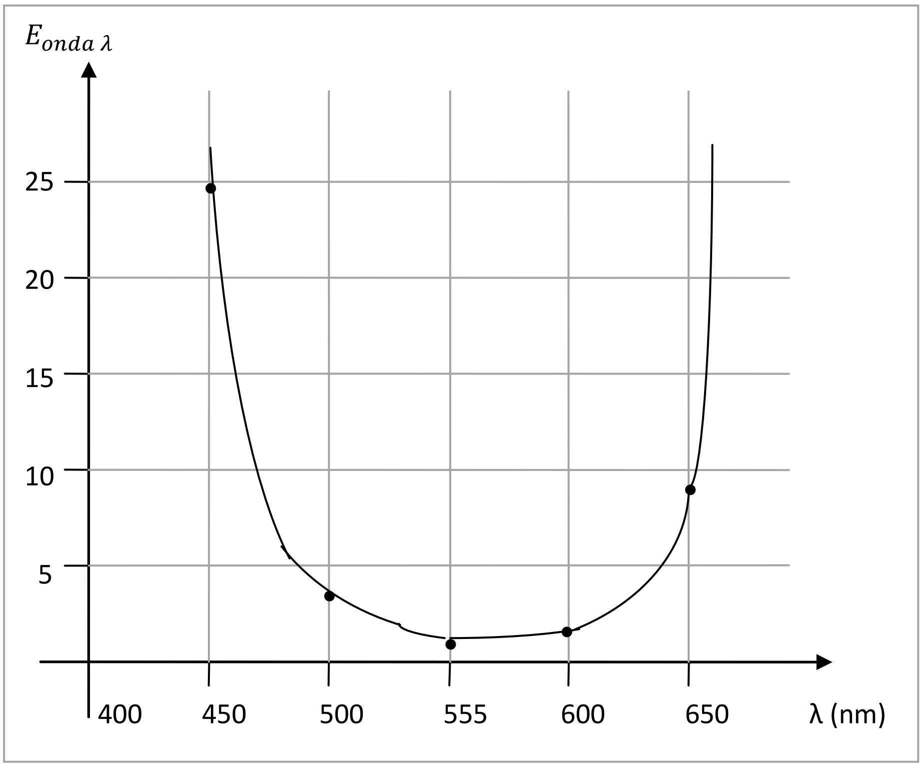
$$E_{onda\ \lambda} = \frac{1}{s_{r\lambda}}$$

quindi l'intensità della radiazione che colpisce la retina alle varie lunghezze d'onda è semplicemente il reciproco della sensibilità relativa.

Costruiamo una tabella:

λ (nm)	$s_{r\lambda}$	$E_{onda\ \lambda}$
450	0,04	25
500	0,32	3,125
555	1	1
600	0,63	1,587
650	0,11	9,09

e disegniamo il grafico dell'energia dell'onda in funzione di λ



Per rispondere all'ultima domanda, osserviamo che dai risultati dimostrati in precedenza l'energia della radiazione a 650 nm deve valere 9,09 volte quella a 555 nm:

$$E_{650} = 9{,}09 E_{555}$$

l'energia dei fotoni, però, è inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda secondo la relazione:

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

quindi

$$E_{650} = N_2 \frac{hc}{\lambda_2} \qquad E_{555} = N_1 \frac{hc}{\lambda_1}$$

sostituendo si ha

$$N_2 \frac{hc}{\lambda_2} = 9{,}09 N_1 \frac{hc}{\lambda_1} \quad \Longrightarrow \quad N_2 = 9{,}09 N_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 9{,}09 \cdot 1000 \cdot \frac{650\ nm}{555\ nm} = 10646 \cong 1{,}06 \cdot 10^4\ fotoni$$