QUESITI

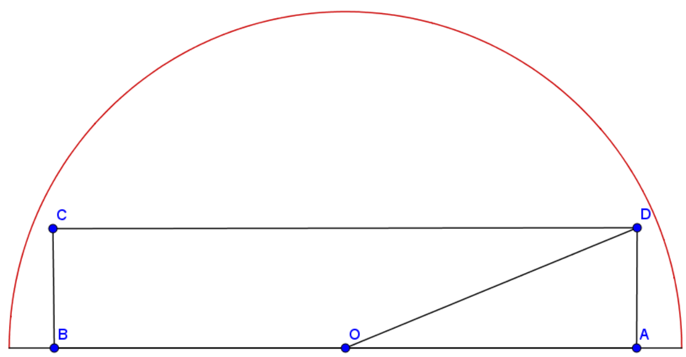
Quesito 1

Integrando per parti si ha $\int_0^1 x^2 e^x dx = \left[x^2 e^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 x e^x dx = e - 2E$.

Analogamente $\int_0^1 x^3 e^x dx = \left[x^3 e^x\right]_0^1 - 3\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 3(e - 2E) = 6E - 2e$

Quesito 2

Consideriamo la seguente figura.



Poniamo $\overline{AD} = x, \overline{OD} = r$ con $0 < x < r < R$; di conseguenza $\overline{OA} = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Il volume del cilindro è $V(x) = \pi x\left(r^2 - x^2\right)$ ed è certamente inferiore a $V_1(x) = \pi x\left(R^2 - x^2\right)$ visto che $0 < r < R$.

La derivata prima di $V_1(x) = \pi x\left(R^2 - x^2\right)$ è $V_1'(x) = \pi\left(R^2 - 3x^2\right)$ da cui deduciamo che la funzione $V_1(x)$ è strettamente crescente per $0 < x < \frac{R}{\sqrt{3}}$ e strettamente decrescente in $\frac{R}{\sqrt{3}} < x < R$ pertanto la funzione $V_1(x)$ assume valore massimo per $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$ e tale valore massimo è $V_1\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = \pi\frac{R}{\sqrt{3}}\left(R^2 - \frac{R^2}{3}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}R^3$.

Il volume della semisfera è $V_{Semisfera} = \frac{2\pi}{3}R^3$ ed i 3\5 di tale volume è $\frac{3}{5}\cdot V_{Semisfera} = \frac{2\pi}{5}R^3$.

Poichè $3\sqrt{3} > 5$ deduciamo che il valore massimo $V_1\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$, e di conseguenza il volume massimo del cilindro, non supera i 3\5 del volume della semisfera.

Quesito 3

Si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{ax+2b}-6\right)\left(\sqrt{ax+2b}+6\right)}{x\left(\sqrt{ax+2b}+6\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax+2b-36}{x\left(\sqrt{ax+2b}+6\right)}.$$

Affinchè il limite sia finito si deve imporre $2b-36=0\to b=18$, in questo modo il limite diventa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{\left(\sqrt{ax+36}+6\right)}=\frac{a}{12}.$$

Imponendo che tale valore sia 1 si ha $a=12$.

Quesito 4

Il valore medio è:

$$V_M=\int_0^2 xf(x)dx=\int_0^2\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{3}{4}x^4\right)dx=\left[\frac{3}{8}x^4-\frac{3}{20}x^5\right]_0^2=6-\frac{24}{5}=\frac{6}{5}.$$

Per variabili aleatorie continue non ha senso parlare di probabilità che sia estratto un valore preciso, pertanto la probabilità di estrarre 4/3 è nulla.

La probabilità che il secondo numero sia minore di 1 è:

$$p=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{16}x^4\right]_0^1=\frac{5}{16}$$

Quesito 5

La retta passante per A e B ha equazione $\frac{x+2}{5}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-1}{-2}$ quindi i parametri direttori sono

(5, -3, -2).

Imponendo la condizione di perpendicolarità il piano ha equazione $5x-3y-2z+d=0$ ed imponendo il passaggio per C si ricava $d=-10$ ovvero il piano ha equazione $5x-3y-2z-10=0$

Quesito 6

Intorno allo 0 possiamo dire che $\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x)$ pertanto si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x)-x}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x)}{x^\alpha}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\left(x^{3-\alpha}\right)$$

Quindi l'unico modo per avere un limite reale non nullo pari a $-\frac{1}{6}$ è $\alpha = 3$.

Quesito 7

Se il piano è tangente ad una sfera, il raggio che congiunge piano e sfera è ortogonale al piano ed i centri si troveranno sulla retta contenente il raggio.

La retta passante per (1,0,2) ed ortogonale al piano con direttori (1, 2, -1) punti ha equazione $\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-2}{-1}$ ovvero $\begin{cases} x = x \\ y = 2x-2 \\ z = 3-x \end{cases}$.

Il raggio è pari a $R = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{6}$ pertanto, sostituendo le variabili *y* e *z* scritte sopra in funzione di *x*, si ottiene:

$$(x-1)^2 + 4(x-1)^2 + (x-1)^2 = 6 \rightarrow 6(x-1)^2 = 6 \rightarrow (x-1)^2 = 1 \rightarrow (x-1) = \pm 1 \rightarrow x = 0, x = 2.$$

Quindi i due centri sono $(0,-2,3),(2,2,1)$

Quesito 8

Detta *p* la probabilità che il dado si presenti sulle 11 facce non numerate con 3, si ha $11p + 2p = 1 \rightarrow p = \frac{1}{13} \cong 7{,}7\%$ ovvero $2p = \frac{2}{13} \cong 15{,}4\%$

La probabilità che in 5 lanci la faccia 3 non esca mai è: $p_0 = \binom{5}{0}(2p)^0(1-2p)^5 = \left(\frac{11}{13}\right)^5$

La probabilità che in 5 lanci la faccia 3 esca 1 volta è: $p_1 = \binom{5}{1}(2p)^1(1-2p)^4 = \left(\frac{10}{13}\right)\left(\frac{11}{13}\right)^4$

La probabilità richiesta è $1 - \left(\frac{11}{13}\right)^5 - \left(\frac{10}{13}\right)\left(\frac{11}{13}\right)^4 \cong 17{,}2\%$

Quesito 9

Calcoliamo i valori della funzione agli estremi dell'intervallo [-1,0]. Si ha:

$$\lim_{x \to -1} \left(\arctan(x) + x^3 + e^x\right) = -\frac{\pi}{4} - 1 + e^{-1} < 0$$
$$\lim_{x \to 0} \left(\arctan(x) + x^3 + e^x\right) = 1 > 0$$

Inoltre la derivata prima della funzione è $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+3x^2+e^x$ ed è sempre positiva, pertanto visti i comportamenti discordi agli estremi di [-1,0] e la stretta crescenza, la funzione può annullarsi in uno ed un solo punto appartenente all'intervallo (-1,0).

Quesito 10

Il teorema di Rolle ha come ipotesi che la funzione sia continua in [-3,3] e derivabile in (-3,3). L'ipotesi di continuità è soddisfatta mentre non è soddisfatta l'ipotesi di derivabilità in quanto i punti ad ascissa $x=\pm 2$ sono punti angolosi. L'ascissa in cui si annulla la derivata prima della funzione è $x=0$, ma ciò non contraddice il teorema di Rolle in quanto se prendiamo l'intervallo [-2, 2] tale teorema è comunque soddisfatto.

Mostriamo che $x=\pm 2$ sono ascisse di punti angolosi.

Si ha:

$$f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & -2\le x\le 2 \\ x^2-4 & x<-2 \vee x>2 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} -2x & -2\le x\le 2 \\ 2x & x<-2 \vee x>2 \end{cases}$$

Vediamo i limiti destro e sinistro della derivata prima in $x=\pm 2$:

$$\lim_{x\to -2^-} f'(x)=\lim_{x\to -2^-}(2x)=-4$$
$$\lim_{x\to -2^+} f'(x)=\lim_{x\to -2^+}(-2x)=4$$
$$\lim_{x\to 2^-} f'(x)=\lim_{x\to 2^-}(-2x)=-4$$
$$\lim_{x\to 2^+} f'(x)=\lim_{x\to 2^+}(2x)=4$$

Essendo diversi ma finiti i limiti destro e sinistro in $x=\pm 2$ deduciamo che $x=\pm 2$ sono ascisse di punti angolosi.