PROBLEMA 1

Punto 1

La funzione $f(x)=\sqrt{2}-\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$:

- È definita in R;
- Interseca l'asse delle ascisse in due punti alle seguenti ascisse:

$$\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\sqrt{2}\to e^{2x}-2\sqrt{2}e^{x}+1=0\to e^{x}=\sqrt{2}\pm 1\to x=\ln\left(\sqrt{2}\pm 1\right)$$

  Si noti che $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)<\ln(e)=1$ coerentemente con quanto evidenziato dal grafico;
- Interseca l'asse delle ordinate in $\left(0,\sqrt{2}-1\right)$; poiché $\sqrt{2}-1<0,5$ anche questa caratteristica è coerente con il grafico;
- Non presenta asintoti di alcun tipo;
- La derivata prima è $f'(x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}$ ed è positiva per $x<0$ e negativa per $x>0$ pertanto $x=0$ è ascissa di massimo relativo ed assoluto ed il massimo è $\left(0,\sqrt{2}-1\right)$, coerentemente con il grafico;
- Non presenta flessi in quanto la derivata seconda è $f''(x)=\frac{-e^{-x}-e^{x}}{2}$ ovvero sempre negativa, pertanto la funzione volge sempre concavità verso il basso, coerentemente con il grafico.

Quindi i valori di intersezione con l'asse delle ascisse sono:

$$\begin{aligned} a&=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\\ -a&=-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)=\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\end{aligned}$$

Punto 2

I punti di non derivabilità sono i punti angolosi ovvero i punti di contatto tra le varie repliche delle gobbe.

Consideriamo quindi i punti ad ascissa $\pm\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ appartenenti ad $f(x)=\sqrt{2}-\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$.

La derivata prima di $f(x)=\sqrt{2}-\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ in $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ è:

$$f'\left(\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)=\frac{e^{-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}-e^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}}{2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\sqrt{2}+1}{2}=\frac{1-\left(\sqrt{2}+1\right)^{2}}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}=-1$$

La derivata prima di $f(x)=\sqrt{2}-\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ in $-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ è:

$$f'\left(-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)=\frac{e^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}-e^{-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}}{2}=\frac{\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}+1}}{2}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2-1}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}=1$$

Essendo pari a -1 il prodotto tra i coefficienti angolari delle rette tangenti in $x=\pm\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ deduciamo che i tratti del grafico a destra e sinistra dei punti di non derivabilità sono ortogonali.

La lunghezza di $f(x)=\sqrt{2}-\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ in $\left[-\ln\left(\sqrt{2}+1\right),\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$ è pari a:

$$\int_{-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}\sqrt{1+\left(\frac{e^{-x}-e^x}{2}\right)^2}dx=\int_{-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}dx=\int_{-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_{-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{e^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}-e^{-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}}{2}-\frac{e^{-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}-e^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}}{2}=e^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}-e^{-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}=$$

$$=\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)}=2$$

Quindi la lunghezza della gobba $f(x)=\sqrt{2}-\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ in $\left[-\ln\left(\sqrt{2}+1\right),\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$ è pari alla misura del lato del quadrato.

Punto 3

Applicando la proporzione tra lati omologhi si ha:

CL:AM=AC:AL pertanto, essendo CL=1, si ha $AC=\frac{AL}{AM}$.

Quindi si ha $AC=d-f(x)\rightarrow d=AC+f(x)=\frac{AL}{AM}+f(x)$.

Ma, considerando il triangolo ALM, si ha $\frac{AL}{AM}=\frac{1}{\cos\left(A\hat{L}M\right)}=\sqrt{1+\tan^2\left(A\hat{L}M\right)}$.

Sapendo che $\tan\left(A\hat{L}M\right)=f'(x)$ si ottiene $\frac{AL}{AM}=\sqrt{1+[f'(x)]^2}=\sqrt{1+\left(\frac{e^{-x}-e^x}{2}\right)^2}=\left(\frac{e^x+e^x}{2}\right)$.

In conclusione $d=\frac{AL}{AM}+f(x)=\left(\frac{e^x+e^x}{2}\right)+\sqrt{2}-\left(\frac{e^x+e^x}{2}\right)=\sqrt{2}$ ovvero una costante.

Punto 4

Calcoliamo come fatto nel punto 2 le derivate di $f(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ in $x=\pm\frac{\ln 3}{2}$, si ha:

$$f'\left(\frac{\ln 3}{2}\right)=\frac{e^{-\frac{\ln 3}{2}}-e^{\frac{\ln 3}{2}}}{2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}}{2}=\frac{1-3}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f'\left(-\frac{\ln 3}{2}\right)=\frac{e^{\frac{\ln 3}{2}}-e^{-\frac{\ln 3}{2}}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}=\frac{3-1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Quindi la tangente con coefficiente angolare $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ forma con l'asse delle ascisse un angolo di 150° mente la tangente con coefficiente angolare $\frac{1}{\sqrt{3}}$ forma con l'asse delle ascisse un angolo di 30°.

Di conseguenza il poligono regolare che ruota sulla pedana ha angoli interni di 150°-30°=120° ovvero è un esagono regolare.