Problema 2

Punto 1

La funzione f è continua in tutto l'intervallo R, è non derivabile nei punti angolosi ad ascissa $x = 1+T, x = 3+T$ con $T = 0,1,2\ldots.$

Poichè f è periodica di periodo 4 con valori compresi tra -1 ed 1, si deduce che $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ non esiste mentre $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

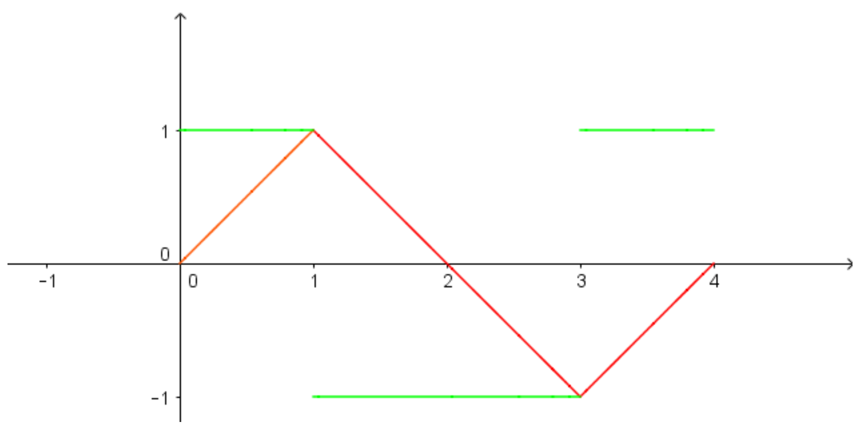
La funzione f è:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 2-x & 1 \le x < 3 \\ x-4 & 3 \le x < 4 \end{cases}$$

Di conseguenza:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ -1 & 1 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x < 4 \end{cases}$$

Di seguito nello stesso riferimento cartesiano il grafico di $f(x)$ in rosso e $f'(x)$ in verde.

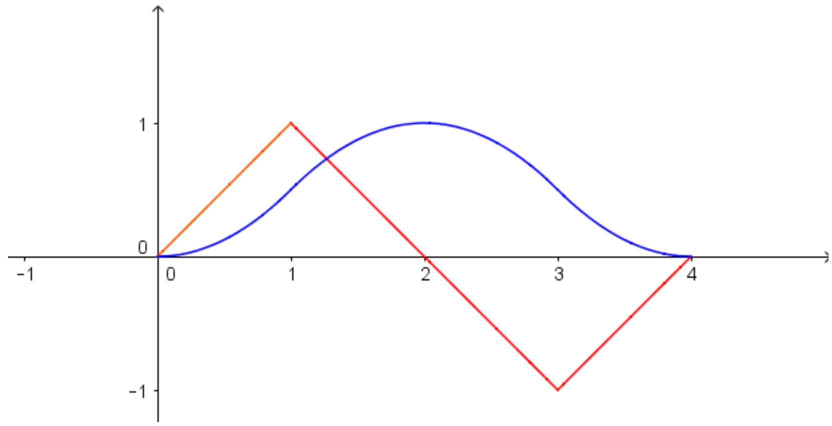


Calcoliamo ora $h(x) = \int_0^x f(t)dt$, si ha:

$$0 \le x < 1: \; h(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$$

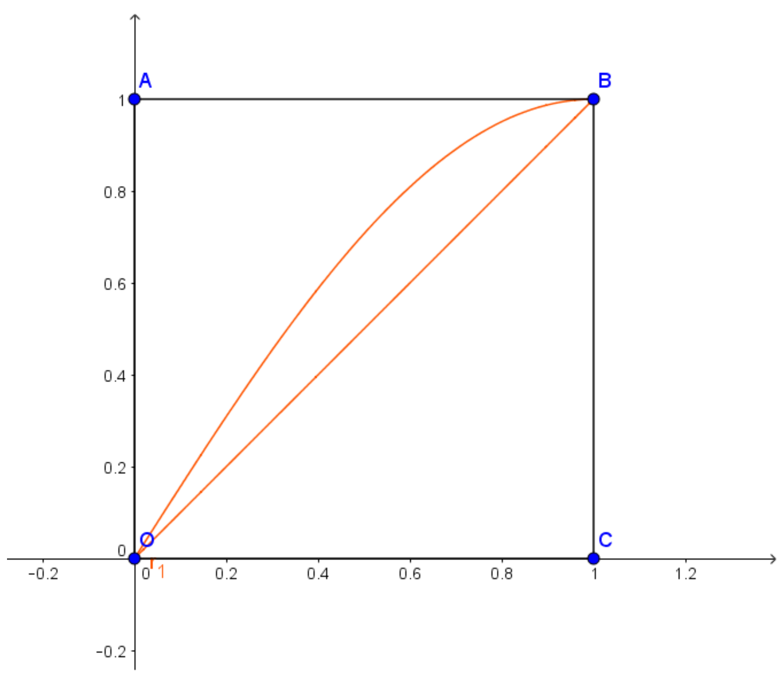
$$1 \le x < 3: \quad h(x) = \frac{1}{2} + \int_1^x (2-t)\,dt = \frac{1}{2} + \left[-\frac{(2-t)^2}{2} \right]_1^x = 1 - \frac{(2-x)^2}{2}$$

$$3 \le x < 4: \quad h(x) = \frac{1}{2} + \int_3^x (t-4)\,dt = \frac{1}{2} + \left[\frac{(t-4)^2}{2} \right]_3^x = \frac{(x-4)^2}{2}$$



Punto 2

La funzione $s(x) = \sin(bx)$ ha periodo 4 se $b = \frac{\pi}{2}$.



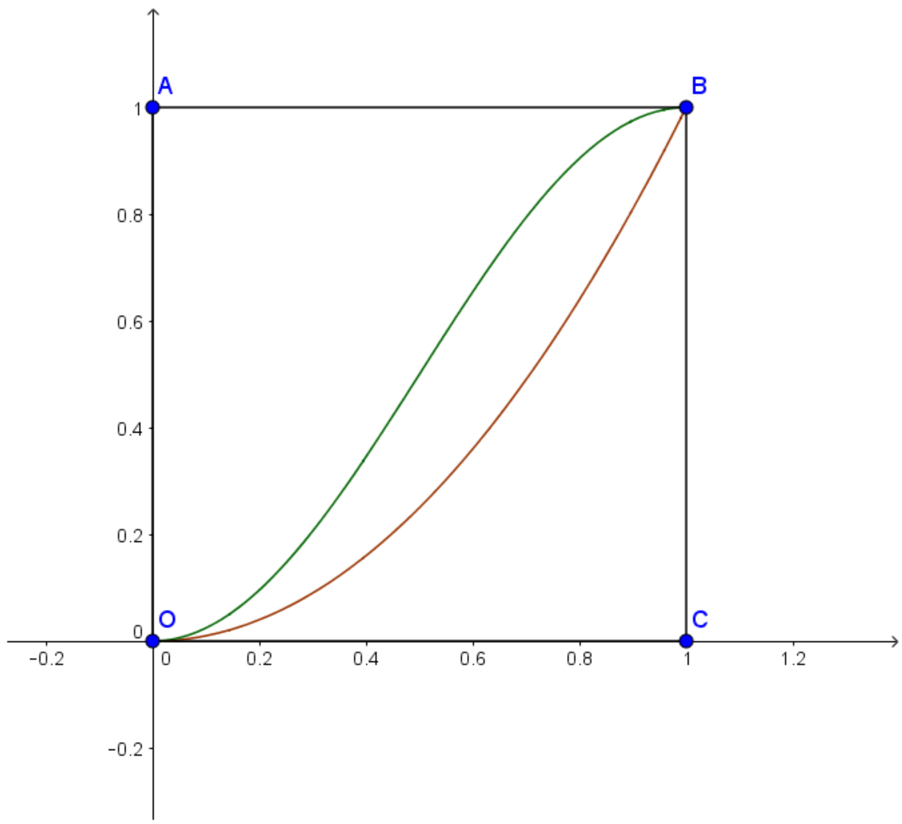
L’area del triangolo OBC è 1\2 pertanto la probabilità che un punto ricada in tale triangolo è il 50%.

L'area del triangolo mistilineo OAB è $\int_0^1 \left[1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]dx = \left[x+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = 1-\frac{2}{\pi}$ pertanto la probabilità che un punto ricada nel triangolo mistilineo OAB è $1-\frac{2}{\pi} \cong 36\%$.

La probabilità che il punto ricada nella terza parte di piano ovvero tra il grafico s(x) e la bisettrice del primo e terzo quadrante per differenza è $\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2} \cong 14\%$.

Punto 3

Consideriamo i grafici di $s^2(x)$ in verde scuro ed $f^2(x)$ in marrone nello stesso riferimento cartesiano



L'area del segmento parabolico OBC è $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ pertanto la probabilità che un punto ricada in tale segmento parabolico è circa 33,3% tale valore è in diminuzione rispetto al valore calcolato precedentemente.

L'area compresa tra l'asse delle ordinate ed $s^2(x)$ in [0,1] è

$$\int_0^1 \left[1-\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]dx = \int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \int_0^1 \frac{1+\cos(\pi x)}{2}dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}[\sin(\pi x)]_0^1 = \frac{1}{2}$$

pertanto la probabilità che un punto ricada in tale sezione piana è 50%; tale valore è in aumento rispetto al valore calcolato precedentemente.

La probabilità che il punto ricada nella sezione piana tra $s^2(x)$ ed $f^2(x)$ per differenza è $\frac{1}{6}$ ovvero circa 16,7%; tale valore è in aumento rispetto al valore calcolato precedentemente.

Punto 4

Il volume di rotazione di h nell'intervallo [0,3] attorno all'asse delle ordinate è:

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi\int_0^1 x\cdot h_1(x)dx + 2\pi\int_1^3 x\cdot h_2(x)dx = \\
&= 2\pi\int_0^1 x\cdot\frac{x^2}{2}dx + 2\pi\int_1^3 x\cdot\left[1-\frac{(2-x)^2}{2}\right]dx = \\
&= 2\pi\cdot\frac{1}{8} + 2\pi\int_1^3\left(\frac{-x^3+4x^2-2x}{2}\right)dx = \\
&= \frac{\pi}{4} + 2\pi\left[-\frac{x^4}{8}+\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \\
&= \frac{\pi}{4} + 2\pi\left[\left(-\frac{81}{8}+18-\frac{9}{2}\right)-\left(-\frac{1}{8}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\right] = \\
&= \frac{\pi}{4} + 2\pi\cdot\frac{10}{3} = \frac{83}{12}\pi
\end{aligned}
$$