Problema 1

Punto 1

La curva Λ ha equazione:

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & se\ -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ -1+|x| & se\ -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-x & se\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 1+x & se -1 \le x \le, 0 \le y \le 1 \\ -1-x & se -1 \le x \le 0, -1 \le y \le 0 \\ -1+x & se\ 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 0 \end{cases}$$

Punto 2

Consideriamo la funzione polinomiale di secondo grado: $f(x) = ax^2 + bx + c, 0 \le x \le 1$

- La condizione $f(0) = 1 \to c = 1$
- La condizione $f(1) = 0 \to a + b + c = 0$
- La condizione $f'(0) = 0 \to b = 0$

Di conseguenza i valori dei 3 parametri sono: $a = -1, b = 0, c = 1$ pertanto la funzione polinomiale diventa $f(x) = 1 - x^2, 0 \le x \le 1$ e non può rappresentare la mattonella richiesta in quanto la parte colorata ha area sottesa pari a

$$\int_0^1 (1-x^2)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \cong 66.7\% \ne 55\%$$

Consideriamo la funzione polinomiale di terzo grado: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, 0 \le x \le 1$

- La condizione $f(0) = 1 \to d = 1$
- La condizione $f(1) = 0 \to a + b + c + d = 0$
- La condizione $f'(0) = 0 \to c = 0$

Con queste condizioni la funzione polinomiale diventa: $f(x) = ax^3 - (1+a)x^2 + 1, 0 \le x \le 1$

L'area dell'intera mattonella in [0,1] è pari a 1, pertanto l'area della mattonella in grigio in [0,1], essendo pari al 55% dell'area dell'intera mattonella, è pari a 0.55.

Imponendo che l'area della mattonella in grigio sia pari a 0.55 si ricava:

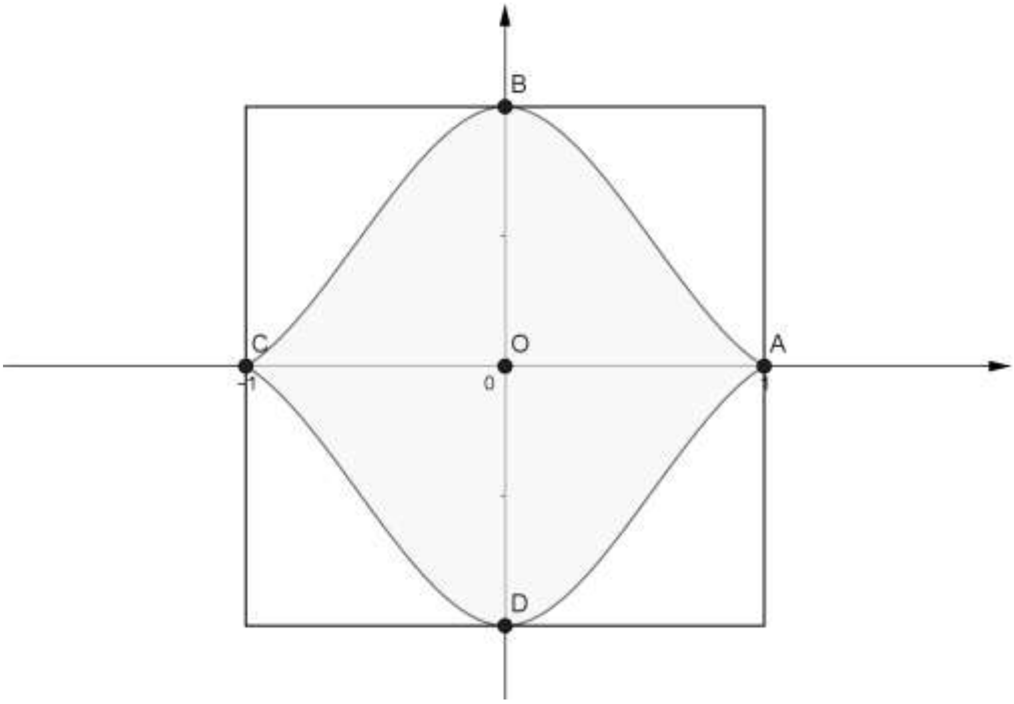
$$\int_0^1 [ax^3 - (1+a)x^2 + 1]dx = 0.55 \to \left[a\frac{x^4}{4} - (1+a)\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = 0.55 \to \left[\frac{a}{4} - \frac{(1+a)}{3} + 1\right]$$
$$= 0.55 \to -\frac{a}{12} + \frac{2}{3} = \frac{11}{20} \to \frac{a}{12} = \frac{2}{3} - \frac{11}{20} \to \frac{a}{12} = \frac{7}{60} \to a = \frac{7}{5}$$

Con queste condizioni la funzione polinomiale diventa: $f(x) = \frac{7}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 1, 0 \le x \le 1$

La derivata prima di tale funzione è $f'(x) = \frac{21}{5}x^2 - \frac{24}{5}x, 0 \le x \le 1$ e si annulla in $x = 0, x = \frac{8}{7}$ pertanto nell'intervallo [0,1] la funzione è strettamente decrescente, di conseguenza è soddisfatta anche la condizione c).

La derivata seconda è $f''(x) = \frac{42}{5}x - \frac{24}{5}, 0 \le x \le 1$ e si annulla in $x = \frac{4}{7}$ che è ascissa di flesso a tangente obliqua.

Di seguito il grafico della mattonella.



Punto 3

Consideriamo ora $a_n(x) = 1 - x^n$, essa soddisfa le condizioni a), b) e c) in quanto:

- $a_n(0) = 1$
- $a_n(1) = 0$
- per $0 \le x \le 1$ ed n intero positivo si ha $0 \le x^n \le 1$ pertanto $0 \le a_n(x) \le 1$

Consideriamo ora $b_n(x) = (1 - x)^n$, essa soddisfa le condizioni a), b) e c) in quanto:

- $b_n(0) = 1$
- $b_n(1) = 0$
- per $0 \le x \le 1$ si ha $0 \le (1 - x) \le 1$ pertanto per n intero positivo $0 \le b_n(x) \le 1$

Consideriamo ora l'area della parte colorata delle mattonelle con forma $a_n(x) = 1 - x^n$, si ha:

$$A(n) = 4\int_0^1 (1 - x^n)dx = 4\left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 4\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 4\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Consideriamo ora l'area della parte colorata delle mattonelle con forma $b_n(x) = (1 - x)^n$, si ha:

$$B(n) = 4\int_0^1 (1-x)^n dx = 4\left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{4}{n+1}$$

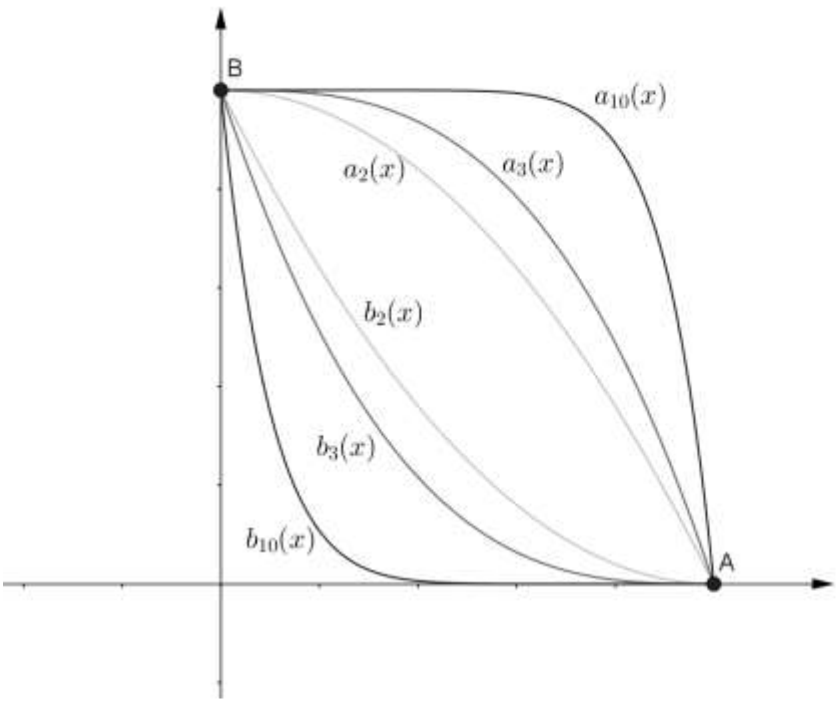
Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} A(n) = \lim_{n\to\infty} 4\left(\frac{n}{n+1}\right) = 4$$

$$\lim_{n\to\infty} B(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n+1} = 0$$

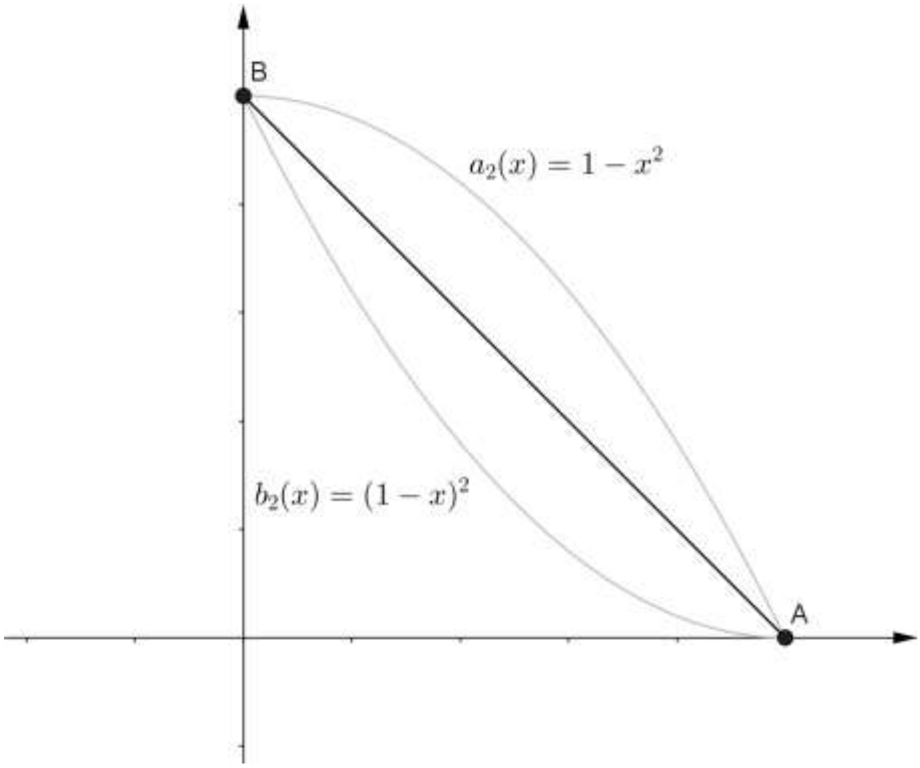
La spiegazione geometrica è deducibile dal grafico seguente dove sono state rappresentate nello stesso riferimento cartesiano $a_2(x), a_3(x), a_{10}(x), b_2(x), b_3(x), b_{10}(x)$ da cui si evince che:

- al crescere di n, il profilo della funzione $a_n(x) = 1 - x^n, 0 \leq x \leq 1$ tende all'intera mattonella ovvero la parte colorata satura l'intera mattonella;
- al crescere di n, il profilo della funzione $b_n(x) = (1-x)^n, 0 \leq x \leq 1$ tende a svuotare la parte colorata dalla mattonella.



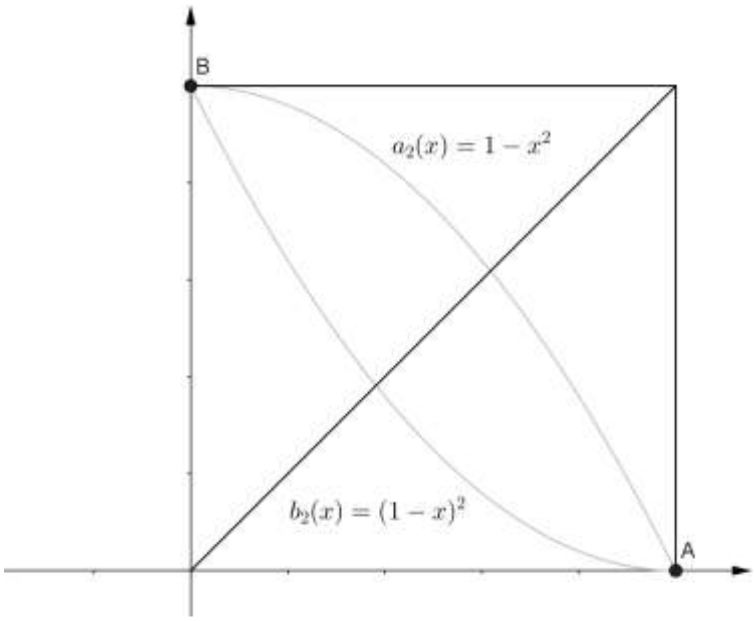
Punto 4

Consideriamo la seguente figura in cui è stata considerata la diagonale che congiunge i punti (1,0) e (0,1).



In questo caso se le gocce cadono sulla diagonale, essendo quest'ultima sempre sotto il profilo $a_2(x)$ deduciamo che le mattonelle di questo tipo non si macchieranno mai, mentre si macchieranno sempre le mattonelle di tipo $b_2(x)$ visto che tale profilo sta al di sotto della diagonale; di conseguenza si macchieranno il 20% di 5000 piastrelle ovvero 1000 piastrelle.

Coinsideriamo ora, invece, l'altra diagonale, ovvero quella che congiunge i punti (0,0) e (1,1).



In questo caso la diagonale taglia entrambi i profili e data la simmetria tra i due profili si deduce che in maniera equiprobabile, in caso di malfunzionamento, ci saranno tante piastrelle macchiate di un profilo quante piastrelle pulite dell'altro profilo. Visto che il numero di piastrelle di ambedue i profili è pari a 5000, deduciamo che in presenza di un malfunzionamento (20%) può macchiarsi la metà delle mattonelle (50%) ovvero in conclusione, delle 10000 mattonelle totali, può macchiarsene il 10% (il 50% del 20% dei possibili casi di malfunzionamento) cioè sempre 1000 come nel caso precedente.