Problema 2

Punto 1

Il punto ad ascissa 0 è (0,9) mentre il punto ad ascissa 1 è (1,k+8).

La retta r_k ha equazione $y = f_k'(0)x + 9$ dove $f_k'(0) = [-3x^2 + k]_{x=0} = k$ pertanto la retta r_k ha equazione $y = kx + 9$.

La retta s_k ha equazione $y = f_k'(1)(x-1) + k + 8$ dove $f_k'(1) = [-3x^2 + k]_{x=1} = k - 3$ pertanto la retta s_k ha equazione $y = (k-3)(x-1) + k + 8$.

Tali rette si intersecano se soddisfano la seguente equazione:

$$kx + 9 = (k-3)(x-1) + k + 8 \to kx + 9 = kx - k - 3x + 3 + k + 8 \to x = \frac{2}{3}$$

Il punto M ha coordinate $M = \left(\frac{2}{3}, \frac{2k}{3} + 9\right)$

Punto 2

L'ordinata del punto M è:

$$f_k\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}k + \frac{235}{27}$$

Si ha:

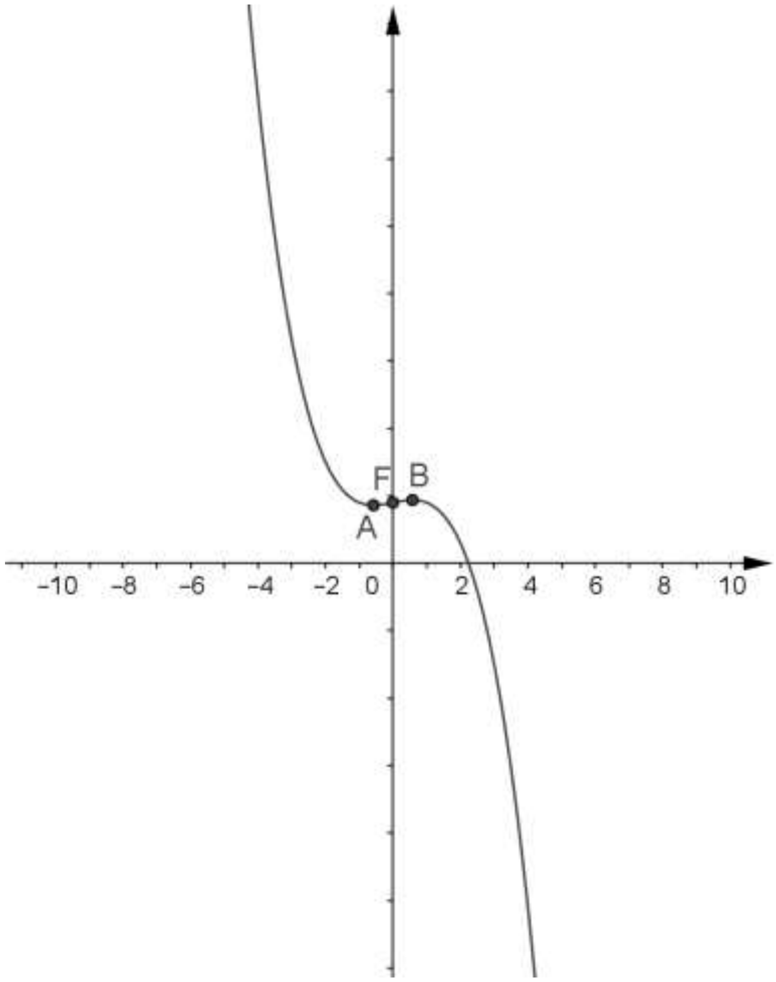
$$f_k\left(\frac{2}{3}\right) < 10 \to \frac{2}{3}k + \frac{235}{27} < 10 \to \frac{2}{3}k < \frac{35}{27} \to k < \frac{35}{18} \cong 1.94$$

di conseguenza k=1 è il massimo intero positivo affinchè l'ordinata del punto M sia minore di 10.

Studiamo la funzione $f_1(x) = -x^3 + x + 9$.

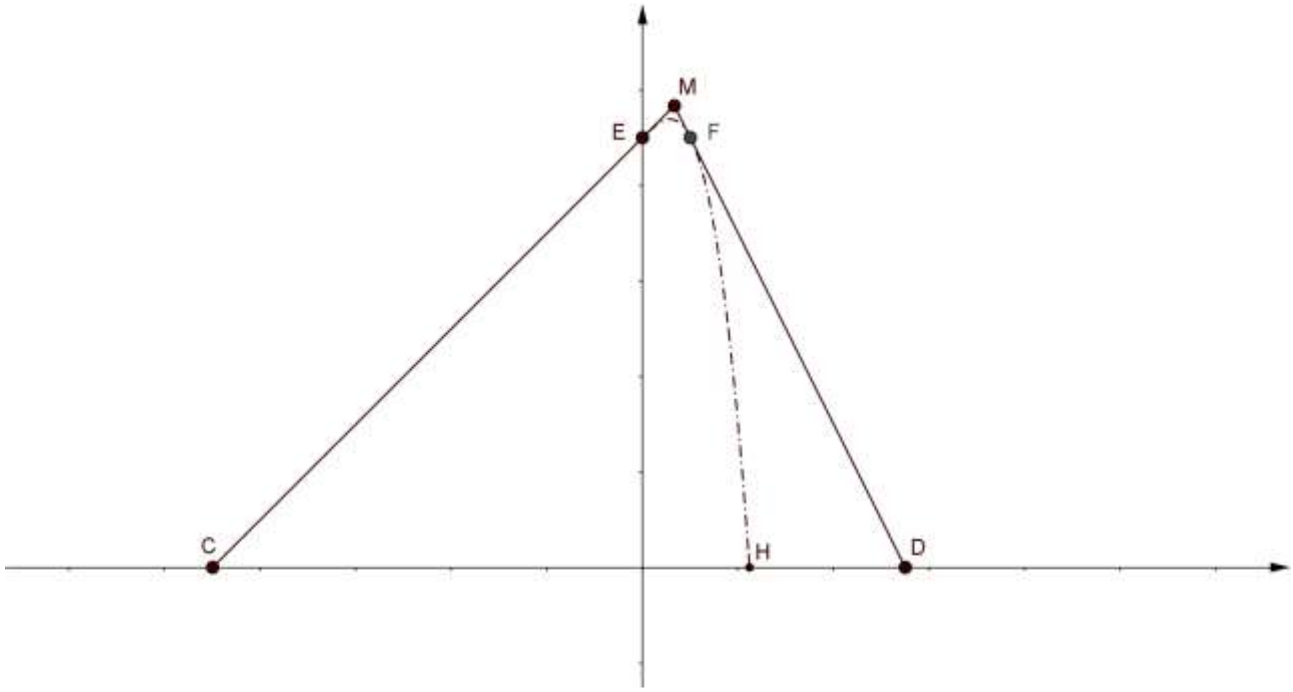
- **Dominio**: R
- **Simmetria**: non è nè pari nè dispari;
- **Asintoti verticali**: non ve ne sono;
- **Asintoti orizzontali**: non ve ne sono in quanto $\lim_{x \to \pm\infty} f_1(x) = \mp\infty$;
- **Asintoti verticali**: non ve ne sono;
- **Crescenza e decrescenza**: la derivata prima è $f_1'(x) = -3x^2 + 1$ pertanto la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e strettamente decrescente in $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$;
- **Concavità e convessità**: la derivata seconda è $f_1''(x) = -6x$ pertanto la funzione volge concavità verso l'alto nell'intervallo $(0, +\infty)$ e verso il basso in $(-\infty, 0)$ di conseguenza il punto F=(0,9) è un flesso a tangente obliqua; inoltre essendo $f_1''\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\sqrt{3}$ e $f_1''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -2\sqrt{3}$ si deduce che $A = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 9 - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ è un punto di minimo relativo e $B = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 9 + \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ è un puntio di massimo relativo

Di seguito il grafico.



Punto 3

Consideriamo la figura seguente in cui sono rappresentate nello stesso riferimento cartesiano le rette $r_1: y = x + 9$, $s_1: y = -2x + 11$ e la cubica $f_1(x) = -x^3 + x + 9$.



La condizione $y_P > f_1(x)$ è soddisfatta dai punti che appartengono alle seguenti 2 regioni di piano:

- triangolo mistilineo MEF
- triangolo mistilineo HFD

Per calcolare la somma di tali 2 aree conviene calcolare l'area del triangolo MCD e sottrarre l'area del triangolo EOC e l'area sottesa da $f_1(x)$ con l'asse delle ascisse.

L'area del triangolo MCD è pari a:

$$S(MCD) = \frac{\overline{CD} \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{29}{2}\right) \cdot \left(\frac{29}{3}\right) = \frac{841}{12}$$

L'area del triangolo EOC è pari a:

$$S(EOC) = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{EO}}{2} = \frac{1}{2} \cdot (9) \cdot (9) = \frac{81}{2}$$

Detta c l'ascissa di intersezione di $f_1(x)$ con l'asse delle ascisse, l'area sottesa da $f_1(x)$ con l'asse delle ascisse è pari a:

$$\int_0^c f_1(x)dx = \int_0^c (-x^3 + x + 9)dx = -\frac{c^4}{4} + \frac{c^2}{2} + 9c$$

Il valore di c è possibile calcolarlo con il metodo di Cardano da cui emerge che $c = 2.24$ di conseguenza

$$\int_0^c f_1(x)dx = -\frac{c^4}{4} + \frac{c^2}{2} + 9c \cong 16.38$$

La probabilità richiesta è quindi pari a:

$$p = \frac{\frac{841}{12} - \frac{81}{2} - 16.38}{\frac{841}{12}} \cong 0.186 = 18.6\%$$

Per concludere la risoluzione del punto 3 mostriamo come con il metodo di Cardano si ricava la soluzione dell'equazione $f_1(x) = -x^3 + x + 9 = 0$.

Tale metodo dice che, in presenza di una equazione di terzo grado del tipo $x^3 + px + q = 0$ la soluzione è

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Nel caso in esame $f_1(x) = -x^3 + x + 9 = 0 \to= x^3 - x - 9 = 0$ pertanto i parametri p e q sono $p = -1, q = -9$ da cui si ricava

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{1}{27}}} \cong 2.24$$

Punto 4

Sia $P_n(x)$ un polinomio di grado *n*.

La normale a tale polinomio in un punto (x_0, y_0) ha equazione:

$$y = -\frac{1}{P_n'(x_0)}(x - x_0) + P_n(x_0)$$

Tale retta passa per l'origine se

$$-\frac{1}{P_n'(x_0)}(0 - x_0) + P_n(x_0) = 0 \to P_n'(x_0) \cdot P_n(x_0) + x_0 = 0$$

Se $P_n(x)$ ha grado n, la sua derivata prima ha grado $(n-1)$ pertanto $P_n'(x_0) \cdot P_n(x_0)$ ha grado $(2n - 1)$ e di conseguenza, per il teorema fondamentale dell'Algebra, l'equazione $P_n'(x_0) \cdot P_n(x_0) + x_0 = 0$ ha al più $(2n - 1)$ radici e quindi non esistono più di $(2n - 1)$ punti in cui la normale passa per l'origine.