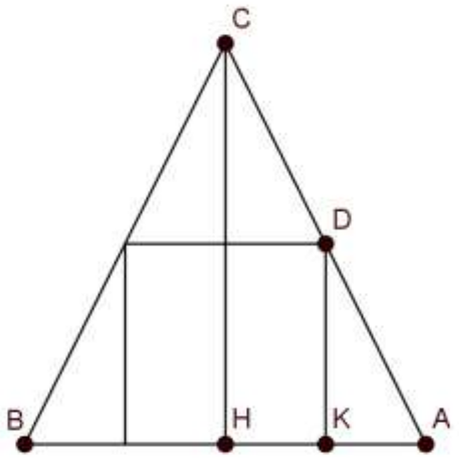
QUESTIONARIO

Quesito 1

Consideriamo la figura seguente.



Supponiamo che l'altezza del cono sia pari ad H ed il raggio di base R e che l'altezza del cilindro sia h ed il raggio di base r.

I triangoli CHA e DKA sono simili pertanto si ha:

$$H:R = h:(R-r) \rightarrow h = \frac{H}{R}(R-r) = H\left(1-\frac{r}{R}\right)$$

Il volume del cono è:

$$V_{CONO} = \frac{1}{3}\pi H R^2$$

mentre il volume del cilindro è

$$V_{CILINDRO} = \pi h r^2 = \pi r^2 H\left(1-\frac{r}{R}\right)$$

Il rapporto tra il volume del cilindro e quello del cono è:

$$\frac{V_{CILINDRO}}{V_{CONO}} = \frac{\pi r^2 H\left(1-\frac{r}{R}\right)}{\frac{1}{3}\pi H R^2} = \frac{3}{R^3}(Rr^2 - r^3)$$

Il massimo di tale rapporto è raggiunto in corrispondenza dei valori del raggio r che annullano la derivata prima ovvero se

$$(2Rr - 3r^2) = 0 \rightarrow r = 0, r = \frac{2R}{3}$$

Il valore massimo del rapporto lo si raggiunge per $r = \frac{2R}{3}$ ed è quindi pari a

$$\frac{V_{CILINDRO}}{V_{CONO}} = \frac{3}{R^3}\left[R\left(\frac{2R}{3}\right)^2 - \left(\frac{2R}{3}\right)^3\right] = \frac{4}{9}$$

Essendo tale rapporto tinferiore ad $\frac{1}{2}$ si deduce che il cilindro inscritto ha un volume che è sempre minore della metà del volume del cono circoscritto.

Quesito 2

Sia x la probabilità che esca 1, si ha:

$$p(1) = x, p(2) = \frac{x}{2}, p(3) = \frac{x}{4}, p(4) = \frac{x}{8}$$

sommando tali probabilità e facendo in modo che la somma sia 1, si ricava:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = 1 \rightarrow x = \frac{8}{15}$$

per cui

$$p(1) = \frac{8}{15}, p(2) = \frac{4}{15}, p(3) = \frac{2}{15}, p(4) = \frac{1}{15}$$

La probabilità che, lanciando i due dadi, escono 2 numeri uguali è:

$$p = p^2(1) + p^2(2) + p^2(3) + p^2(4) = \frac{64}{225} + \frac{16}{225} + \frac{4}{225} + \frac{1}{225} = \frac{17}{45}$$

Quesito 3

La retta e la curva sono tangenti nel punto in cui il coefficiente angolare della retta coincide con il valore della derivata prima della curva nell'ascissa del punto di tangenza; detto (a, b) il punto di tangenza si deve imporre la seguente uguaglianza:

$$y'(a) = 3a^2 - 8a = -4 \rightarrow 3a^2 - 8a + 4 = 0 \rightarrow a = \frac{4 \pm 2}{3} \rightarrow a = 2, a = \frac{2}{3}$$

Per $a = 2$ il punto do tangenza è $(2, -3)$ pertanto imponendo il passaggio di tale punto per la retta si ottiene $k = 5$.

Per $a = \frac{2}{3}$ il punto do tangenza è $\left(\frac{2}{3}, \frac{95}{27}\right)$ pertanto imponendo il passaggio di tale punto per la retta si ottiene $k = \frac{167}{27}$.

Quesito 4

Ricordiamo che le funzioni seno e coseno sono limitate in [-1,1], pertanto in un intorno di $+\infty$ sia $e^{\sin x}$ che $(5 + e^{-x} - \cos x)$ sono valori limitati, di conseguenza

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x - e^{\sin x}}{(5 + e^{-x} - \cos x)} = \lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$$

In un intorno di $-\infty$ sia $e^{\sin x}$ che $(5 - \cos x)$ sono valori limitati, mentre e^{-x} diverge di conseguenza

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x - e^{\sin x}}{(5 + e^{-x} - \cos x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{e^{-x}}$$

ed applicando il teorema di de l'Hospital si ricava che

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{-e^{-x}}=0$$

Quesito 5

Sia a la base del rettangolo e b la sua altezza.

Sapendo che il recinto è pari a 2 metri si ha:

$$a+2b+\pi\cdot\frac{a}{2}=2\to 2b=2-\frac{a(2+\pi)}{2}\to b=1-\frac{a(2+\pi)}{4}$$

L'area del recinto è pertanto pari a:

$$S_R(a)=a\cdot b+\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2=a\cdot[1-\frac{a(2+\pi)}{4}]+\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Tale area è massima nei punti in cui si annulla la derivata prima ovvero:

$$S_R'(a)=1-\frac{a(2+\pi)}{2}+\pi\cdot\frac{a}{4}=1-a-\pi\cdot\frac{a}{2}+\pi\cdot\frac{a}{4}=1-a\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$$

L'area è quindi massima per

$$S_R'(a)=0\ \to a=\frac{4}{\pi+4}$$

Quindi le dimensioni del rettangolo sono:

$$a=\frac{4}{\pi+4},b=1-\frac{(2+\pi)}{\pi+4}=\frac{2}{\pi+4}$$

Quesito 6

L'equazione della retta *s* perpendicolare al piano π e passante per $T=(-4,0,1)$ ha equazione:

$$\begin{cases}x=-4+3k\\ y=0-k\\ z=1-2k\end{cases}\to\begin{cases}x=-4+3k\\ y=-k\\ z=1-2k\end{cases}$$

Poichè il centro C della superficie sferica appartiene alla retta *r* ed ha coordinate del tipo $C=(t,t,t)$ ed appartiene anche alla retta *s* si ha:

$$\begin{cases}t=-4+3k\\ t=-k\\ t=1-2k\end{cases}\to\begin{cases}-k=-4+3k\\ t=-k\\ t=1-2k\end{cases}\to\begin{cases}k=1\\ t=-1\end{cases}$$

La superficie sferica ha centro $C=(-1,-1,-1)$ e raggio $R=\sqrt{(-4+1)^2+(0+1)^2+(1+1)^2}=\sqrt{14}$

Di conseguenza l'equazione della superficie sferica è:

$$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=14$$

Quesito 7

Si ha:

$$\int_a^{a+1}(3x^2+3)dx=[x^3+3x]_a^{a+1}=(a+1)^3+3(a+1)-a^3-3a=3a^2+3a+4$$

Imponendo che tale valore sia pari a 10 si ha:

$$3a^2+3a+4=10\to a^2+a-2=0\to a=\frac{-1\pm 3}{2}\to a=-2, a=1$$

Quesito 8

Indichiamo con X il numero di partite vinte da un giocatore.

La distribuzione di probabilità di vincita è:

$$p(X=k)=\binom{12}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

Un giocatore vince la gara in 2 possibili casi:

- il primo vince almeno 10 partite su 12
- il secondo ne perde al massimo 2

quindi la probabilità che un giocatore vinca la gara su 12 partite è pari a:

$$p(X\geq 10)+p(X\leq 2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\cdot\left[\binom{12}{10}+\binom{12}{11}+\binom{12}{12}+\binom{12}{0}+\binom{12}{1}+\binom{12}{2}\right]$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\cdot[66+12+1+1+12+66]=\frac{79}{2^{11}}$$

Quesito 9

Il triangolo è equilatero in quanto i tre lati hanno tutti la stessa lunghezza pari a $2\sqrt{2}$.

Inoltre per sostituzione si verifica che i tre vertici del triangolo appartengono all'equazione del piano $x+y+z-4=0$.

Il vertice del tetraedro appartiene alla retta passante per il baricentro del triangolo che ha coordinate:

$$\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)\equiv\left(\frac{7}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$$

La retta cui appartiene il vertice del tetraedro ha quindi equazione:

$$\begin{cases}x=\frac{7}{3}+t\\ y=\frac{1}{3}+t\\ z=\frac{4}{3}+t\end{cases}$$

di conseguenza il quarto vertice del tetraedro ha coordinate $\left(\frac{7}{3}+t,\frac{1}{3}+t,\frac{4}{3}+t\right)$.

Imponendo $\overline{PA}=2\sqrt{2}\leftrightarrow\overline{PA}^2=8$ si ottiene:

$$\left(\frac{7}{3}+t-3\right)^2+\left(\frac{1}{3}+t-1\right)^2+\left(\frac{4}{3}+t-0\right)^2=8\rightarrow\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\left(t+\frac{4}{3}\right)^2=8$$
$$\rightarrow 2\left(t^2-\frac{4}{3}t+\frac{4}{9}\right)+\left(t^2+\frac{8}{3}t+\frac{16}{9}\right)=8\rightarrow 3t^2+\frac{24}{9}=8\rightarrow t^2=\frac{16}{9}\rightarrow t=\pm\frac{4}{3}$$

Di conseguenza il vertice del tetraedro può essere:

$$\left(\frac{11}{3},\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right),(1,-1,0)$$

Quesito 10

Le derivate prima e seconda della funzione soluzione sono:

$$y'(x)=2ke^{kx+2}$$
$$y''(x)=2k^2e^{kx+2}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ricava:

$$2k^2e^{kx+2}-2\cdot 2ke^{kx+2}-3\cdot 2e^{kx+2}=0\rightarrow k^2-2k-3=0\rightarrow k=1\pm 2\rightarrow k=3,k=-1$$