1. EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

Equazioni esponenziali

Dato $a \in R^+$, un'equazione esponenziale elementare si scrive come $a^x = b$

1° caso: se $b \le 0$ l'equazione non ha soluzione

2° caso: se $b > 0$ e $a \ne 1$ l'equazione ha una ed una sola soluzione, che vale $x = \log_a(b)$

3° caso: se $b > 0$, $b \ne 1$ e $a = 1$ l'equazione non ha soluzione

4° caso: se $b = 1$ e $a = 1$ l'equazione è soddisfatta per ogni $x \in R$

Nel caso particolare in cui l'equazione sia della forma $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $\left(a \in R^+ - \{1\}\right)$, dato che le basi sono uguali basta risolvere l'equazione $f(x) = g(x)$.

Equazioni logaritmiche

Dati $a \in R^+ - \{1\}$, $b \in R$ e $x > 0$, un'equazione logaritmica elementare è della forma $\log_a(x) = b$ ed ha una ed una sola soluzione che, per definizione di logaritmo, vale $x = a^b$. Se un'equazione logaritmica si presenta nella forma $\log_a[f(x)] = \log_a[g(x)]$ dove i logaritmi hanno la stessa base, per determinare la soluzione è sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Proprietà dei logaritmi

Notazioni: un logaritmo naturale, cioè in base e (numero di Nepero) lo si indica con $\ln(\cdot)$ mentre un logaritmo in base 10 con $\mathrm{Log}(\cdot)$.

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1 \qquad a^{\log_a(b)} = b$$

- Somma, prodotto e quoziente di logaritmi

$$\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a(|b_1|) + \log_a(|b_2|) \qquad \log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a(|b_1|) - \log_a(|b_2|)$$

$$\log_a(b^n) = n \cdot \log_a(|b|) \qquad \log_a(\sqrt[n]{b}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a(|b|)$$

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = -\log_a \frac{b_2}{b_1} \qquad \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$$

- Cambiamento di base

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \qquad \log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$$

- Segno del logaritmo

$$\log_a x > 0 \Rightarrow x > 1 \text{ se } a > 1 \qquad \log_a x > 0 \Rightarrow 0 < x < 1 \text{ se } 0 < a < 1$$

$$\log_a x < 0 \Rightarrow 0 < x < 1 \text{ se } a > 1 \qquad \log_a x < 0 \Rightarrow x > 1 \text{ se } 0 < a < 1$$

Equazioni irrazionali

Dato $n \in N - \{0\}$, un'equazione irrazionale si scrive come $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$

1° caso: se n è dispari, allora l'insieme di definizione D coincide con l'insieme in cui sono ben definite $f(x)$ e $g(x)$

2° caso: se n è pari, allora l'insieme di definizione D coincide con l'insieme delle $x \in R$ tali per cui $f(x)$ e $g(x)$ risultano ben definite e inoltre $f(x) \ge 0, g(x) \ge 0$

Determinato D, si elevano ambo i membri alla pontenza n-esima, ottenendo $f(x) = g^n(x)$

L'insieme soluzione dell'equazione è l'insieme delle x appartenenti a D tali che $f(x) = g^n(x)$.

Disequazioni esponenziali

Dati $a \in R^{+} - \{1\}$ e $b \in R$, una disequazione esponenziale in forma elementare si può esprimere come

$$a^{x} \geq b \qquad \text{o} \qquad a^{x} \leq b$$

- Caso $a^{x} \geq b$

Se $b \leq 0$ la disequazione è sempre soddisfatta

Se $b > 0 \wedge a > 1$ la disequazione è soddisfatta per $x \geq \log_{a} b$

Se $b > 0 \wedge 0 < a < 1$ la disequazione è soddisfatta per $x \leq \log_{a} b$

- **Caso** $a^{x} \leq b$

Se $b \leq 0$ la disequazione è sempre soddisfatta

Se $b > 0 \wedge a > 1$ la disequazione è soddisfatta per $x \leq \log_{a} b$

Se $b > 0 \wedge 0 < a < 1$ la disequazione è soddisfatta per $x \geq \log_{a} b$

Disequazioni logaritmiche

Dati $a \in R^{+} - \{1\}$, $b \in R$ e $x > 0$, una disequazione esponenziale in forma elementare si può esprimere come

$$\log_{a}(x) \geq b \qquad \text{o} \qquad \log_{a}(x) \leq b$$

- **Caso** $\log_{a}(x) \geq b$

Se $a > 1$ la disequazione è soddisfatta per $x \geq a^{b}$

Se $0 < a < 1$ la disequazione è soddisfatta per $0 < x \leq a^{b}$

- **Caso** $\log_{a}(x) \leq b$

Se $a > 1$ la disequazione è soddisfatta per $0 < x \leq a^{b}$

Se $0 < a < 1$ la disequazione è soddisfatta per $x \geq a^{b}$

Disequazioni irrazionali

Dato $n \in N - \{0\}$, una disequazione irrazionale si può scrivere in una di queste quattro forme

$$\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x) \qquad \sqrt[n]{f(x)} > g(x) \qquad \sqrt[n]{f(x)} \leq g(x) \qquad \sqrt[n]{f(x)} < g(x)$$

- Caso n dispari

Le disequazioni saranno soddistatte da

$$\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g^{n}(x) \qquad \sqrt[n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{n}(x)$$

$$\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g^{n}(x) \qquad \sqrt[n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < g^{n}(x)$$

con le restrizioni dovute agli insiemi di definizione delle funzioni $f(x), g(x)$.

- Caso n pari

Le disequazioni saranno soddistatte da

$$\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^{n}(x) \end{cases} \qquad \sqrt[n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g^{n}(x) \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^{n}(x) \end{cases} \qquad \sqrt[n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^{n}(x) \end{cases}$$

Anche in questo caso vanno considerate le restrizioni dovute agli insiemi di definizione delle funzioni $f(x), g(x)$.

2. GEOMETRIA ANALITICA NEL PIANO

Retta

Equazione in forma implicita $ax+by+c=0$

Equazione in forma esplicita $y=mx+q$

Relazione tra i coefficienti $m=-\dfrac{a}{b}$, $q=-\dfrac{c}{b}$ e $b\neq 0$.

m si dice coefficiente angolare o pendenza, q si dice intercetta o quota.

Retta parallela all'asse x $y=k$ Retta parallela all'asse y $x=h$

- Retta passante per due punti $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$ $\dfrac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}=\dfrac{(y-y_1)}{(y_2-y_1)}$
- Coefficiente angolare di una retta passante per due punti $m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ se $x_1\neq x_2$
- Condizione di parallelismo:
  tra le rette $ax+by+c=0$ e $a'x+b'y+c'=0$ $a\cdot b'-b\cdot a'=0$.
  tra le rette $y=mx+q$ e $y=m'x+q'$ $m=m'$
- Condizione di perpendicolarità:
  forma implicita $a\cdot a'+b\cdot b'=0$ forma esplicita $m\cdot m'=-1$.
- Fascio improprio di rette:
  Se la retta data è $ax+by+c=0$ il fascio è $ax+by+k=0$
  Se la retta data è $y=mx+q$ il fascio è $y=mx+k$
- Fascio proprio di rette

Se $ax+by+c=0$ e $a'x+b'y+c'=0$ si intersecano in $P(x_0,y_0)$
l'equazione del fascio proprio è $h(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$

posto $\lambda=\dfrac{h}{k}$ si ha $\lambda(ax+by+c)+a'x+b'y+c'=0$

al variare di $\lambda\in R$ si hanno tutte le rette del piano passanti per P, ad eccezione di $ax+by+c=0$.

- Distanza punto-retta: dato $P(x_0,y_0)$ e la retta $ax+by+c=0$, la distanza è $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Circonferenza

Equazione della circonferenza di centro (α,β) e raggio R $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

L'equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$, se $\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-c\geq 0$, rappresenta la circonferenza di centro $\left(-\dfrac{a}{2},-\dfrac{b}{2}\right)$

e raggio $R=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-c}=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

Circonferenze con centro nell'origine $x^2+y^2=R^2$

Circonferenze passanti per l'origine $x^2+y^2+ax+by=0$

- Fasci di circonferenze:

Circonferenze concentriche di centro (α,β) $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=k^2$

Date le circonferenze $x^2+y^2+ax+by+c=0$ e $x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$, l'equazione del fascio è
$\lambda(x^2+y^2+ax+by+c)+\mu(x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1)=0,\ (\lambda+\mu)\neq 0$

posto $\lambda\neq 0, t=\dfrac{\mu}{\lambda}$ si ha $(x^2+y^2+ax+by+c)+t(x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1)=0,\ t\neq -1$

che rappresenta una circonferenza tranne per $t=-1$, caso in cui la circonferenza degenera in una retta.
Se $a\neq a_1 \vee b\neq b_1$; se $a=a_1\wedge b=b_1$ le due circonferenze sono concentriche e l'equazione del fascio degenera in un numero (polinomio di grado zero in x e y).

- Asse radicale di una circonferenza

è la retta che si ottiene imponendo $t=-1$ nel fascio di circonferenza di equazione $\left(x^2+y^2+ax+by+c\right)+t\left(x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1\right)=0$ nel caso in cui $a\neq a_1 \vee b\neq b_1$, ed è perpendicolare alla retta che congiunge i centri delle circonferenze stesse: $(a-a_1)x+(b-b_1)y+(c-c_1)=0$

Se le due circonferenze si intersecano in A e B, punti base del fascio, l'asse radicale è la retta AB.
Se le due circonferenze sono tangenti l'asse radicale è la retta passante per T e ivi tangente ad ogni circonferenza del fascio.

- Circonferenza passante per tre punti $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$

$$\det\begin{vmatrix} x & y & x^2+y^2 & 1 \\ x_1 & y_1 & x_1^2+y_1^2 & 1 \\ x_2 & y_2 & x_2^2+y_2^2 & 1 \\ x_3 & y_3 & x_3^2+y_3^2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Parabola

La parabola è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice.

- Parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y

Equazione $y=ax^2+bx+c$ con $a,b,c\in R$ e $a\neq 0$.

Fuoco $F=\left(-\frac{b}{2a},\frac{1-b^2+4ac}{4a}\right)$ direttrice $y=\frac{-1-b^2+4ac}{4a}$

Asse di simmetria $x=-\frac{b}{2a}$ vertice $V=\left(-\frac{b}{2a},\frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$

Concavità:
se $a>0$ la parabola ha concavità verso l'alto, si dice *convessa*, ha minimo nel vertice;
se $a<0$ la parabola ha concavità verso il basso, si dice *concava*, ha massimo nel vertice.

- Parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x

Equazione $x=ay^2+by+c$ con $a,b,c\in R$ e $a\neq 0$.

Fuoco $F=\left(\frac{1-b^2+4ac}{4a},-\frac{b}{2a}\right)$ direttrice $x=\frac{-1-b^2+4ac}{4a}$

Asse di simmetria $y=-\frac{b}{2a}$ vertice $V=\left(\frac{-b^2+4ac}{4a},-\frac{b}{2a}\right)$

Concavità: se $a>0$ concavità verso destra, se $a<0$ concavità verso sinistra.

Ellisse

Un'ellisse è il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

- Equazione canonica: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dove $a,b>0$

Se $a>b$ l'asse focale è parallelo all'asse x, se $a<b$ l'asse focale è parallelo all'asse y.
Se $a=b$ si ottiene l'equazione di una circonferenza con centro nell'origine e raggio a.

Equazione dell'ellisse traslata rispetto al punto (x_0,y_0) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

Equazione parametrica $\begin{cases} x=a\cos(t)+x_0 \\ =b\sin(t)+x_0 \end{cases}, t\in[0,2\pi)$

Data un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, le coordinate dei vertici sono

Vertici: $A_1=(a,0)$ $A_2=(-a,0)$ $B_1=(0,b)$ $B_2=(0,-b)$

Asintoti: $y = \pm \frac{b}{a} x$

Asse focale:

se $a > b$ l'asse focale è A_1A_2, l'asse minore è B_1B_2

se $a < b$ l'asse focale è B_1B_2 l'asse minore è A_1A_2

se $a > b$ la lunghezza dell'asse focale è $2a$

se $a < b$ la lunghezza dell'asse focale è $2b$

Fuochi

Posto $c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$, le coordinate dei fuochi sono

se $a > b$ $F_1 = (c,0)$ $F_2 = (-c,0)$

se $a < b$ $F_1 = (0,c)$ $F_2 = (0,-c)$

Eccentricità

Data un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, e posto $c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$

se $a > b$ l'eccentricità vale $e = \frac{c}{a}$,

se $a < b$ l'eccentricità vale $e = \frac{c}{b}$

Se $a, b > 0$, con $a \neq b$, risulta $0 < e < 1$. Se $a = b$, ossia per la circonferenza, risulta $e = 0$.

Iperbole

L'iperbole è il luogo dei punti del piano per cui è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

Iperbole con i fuochi sull'asse x e simmetrici rispetto all'origine $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a, b \in R^+$.

Iperbole con i fuochi sull'asse y e simmetrici rispetto all'origine $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

Equazione parametrica $\begin{cases} x = a\cosh(t) \\ y = b\sinh(t) \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi)$ o $\begin{cases} x = a\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)} \\ y = \dfrac{b}{\cos(t)} \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

Vertici:

se $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ i vertici sono $A_1 = (a,0)$ $A_2 = (-a,0)$

se $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ i vertici sono $B_1 = (0,b)$ $B_2 = (0,-b)$

Asintoti: $y = \pm \frac{b}{a} x$

Fuochi: posto $c^2 = a^2 + b^2$

se appartenenti all'asse x hanno coordinate $F_1 = (c,0)$ $F_2 = (-c,0)$

se appartenenti all'asse y hanno coordinate $F_1 = (0,c)$ $F_2 = (0,-c)$

Eccentricità

Se i fuochi appartengono all'asse x l'eccentricità vale $e = \frac{c}{a}$

Se i fuochi appartengono all'asse y l'eccentricità vale $e = \frac{c}{b}$.

- Iperbole equilatera

Se $a=b$ e i fuochi appartengono all'asse x l'iperbole equilatera è $x^2-y^2=a^2$

Se $a=b$ e i fuochi appartengono all'asse y l'iperbole equilatera è $x^2-y^2=-a^2$

Gli asintoti di un'iperbole equilatera sono $y=x$ e $y=-x$, l’'eccentricità è $e=\sqrt{2}$.

- Iperbole equilatera riferita agli assi

Un'iperbole equilatera ruotata di 45° ha per asintoti gli assi cartesiani, l’equazione è $xy=k$

- Funzione omografica

Una funzione omografica è un'iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi cartesiani, ma non necessariamente coincidenti con gli assi stessi.

Dati $a,b,c,d\in R$, con $c\neq 0$, l'equazione di una funzione omografica è $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Se $ad-bc=0$ l'equazione è una retta parallela all'asse x privata del punto di ascissa $-\dfrac{d}{c}$

Se $ad-bc\neq 0$ l'equazione rappresenta un'iperbole equilatera con centro di simmetria $\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$ e asintoti

$x=-\dfrac{d}{c}$ e $y=\dfrac{a}{c}$.

Altri luoghi e proprietà

- Punto medio di un segmento *AB: se* $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$ il punto medio è $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.
- Distanza fra due punti (lunghezza di un segmento)

Se $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$ la lunghezza di AB è $d=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_2)^2}$

- Asse di un segmento AB

Se $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$ l’asse è $2(x_1-x_2)x+2(y_1-y_2)y-(x_1^2-x_2^2)-(y_1^2-y_2^2)=0$

- Bisettrice

Due rette distinte $a_1x+b_1y+c_1=0$ e $a_2x+b_2y+c_2=0$ individuano nel piano quattro angoli, le cui bisettrici sono
$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \qquad \frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=-\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

- Luogo dei punti a distanza assegnata da una retta

Il luogo dei punti a distanza d dalla retta $ax+by+c=0$ è dato dalle due rette di equazione
$$ax+by+c-d\sqrt{a^2+b^2}=0 \qquad ax+by+c+d\sqrt{a^2+b^2}=0$$

- Baricentro di un triangolo

Dato un triangolo di vertici in $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$, $C=(x_3,y_3)$,

le coordinate del baricentro sono $G=\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

- Area di un triangolo

Se i vertici del triangolo sono $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$, $C=(x_3,y_3)$

la sua area vale $$Area=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|x_1y_2+x_3y_1+x_2y_3-x_3y_2-x_1y_3-x_2y_1\right|$$

Trasformazioni geometriche

Traslazioni nel piano $\begin{cases} X = x + a \\ Y = y + b \end{cases}$

Rotazioni nel piano di centro O in senso antiorario di un angolo α

$\begin{cases} X = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ con $\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 > 0$

Rototraslazioni nel piano di centro $C(a,b)$ in senso antiorario di un angolo α

$\begin{cases} X = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a - a\cos\alpha + b\sin\alpha \\ Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b - a\sin\alpha - b\cos\alpha \end{cases}$ con $\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 > 0$

Affinità $\begin{cases} X = ax + by + m \\ Y = cx + dy + n \end{cases}$ con $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \neq 0$

Similitudine diretta $\begin{cases} X = ax - by + m \\ Y = bx + ay + n \end{cases}$ con $\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 > 0$

Similitudine indiretta $\begin{cases} X = ax + by + m \\ Y = bx - ay + n \end{cases}$ con $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = -(a^2 + b^2) < 0$

Il numero $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ è detto rapporto di similitudine.

Isometria diretta $\begin{cases} X = ax - by + m \\ Y = bx + ay + n \end{cases}$ con $\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = 1$

Isometria indiretta $\begin{cases} X = ax + by + m \\ Y = bx - ay + n \end{cases}$ con $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = -(a^2 + b^2) = -1$

Omotetia di centro O e rapporto k $\begin{cases} X = kx \\ Y = ky \end{cases}$ con $\Delta = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k^2 > 0$

Dilatazione di centro O $\begin{cases} X = kx \\ Y = hy \end{cases}$ con $h,k \neq 0$

Simmetria rispetto all'asse delle ascisse $\begin{cases} X = x \\ Y = -y \end{cases}$

Simmetria rispetto all'asse delle ordinate $\begin{cases} X = -x \\ Y = y \end{cases}$

Simmetria rispetto alla retta $y = k$ è $\begin{cases} X = x \\ Y = -y + 2k \end{cases}$

Simmetria rispetto alla retta $x = h$ è $\begin{cases} X = -x + 2h \\ Y = y \end{cases}$

Simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante $\begin{cases} X = y \\ Y = x \end{cases}$

Simmetria rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante $\begin{cases} X = -y \\ Y = -x \end{cases}$

Simmetria rispetto all'origine $\begin{cases} X = -x \\ Y = -y \end{cases}$

Simmetria rispetto al punto $C(a,b)$ è $\begin{cases} X = -x + 2a \\ Y = -y + 2b \end{cases}$

3. GONIOMETRIA E TRIGONOMETRIA

- Prima relazione fondamentale $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Con $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}, \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

- Seconda $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$
- Terza $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq k\pi,\ k \in Z$ oppure $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha},\ \alpha \neq k\dfrac{\pi}{2},\ k \in Z$
- Quarta $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$
- Quinta $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha},\ \alpha \neq k\pi,\ k \in Z$
- Archi associati

$$\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha) \qquad \sin(\alpha+\pi) = -\sin(\alpha) \qquad \tan(\alpha+\pi) = \tan(\alpha)$$
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha) \qquad \sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha) \qquad \tan(\pi-\alpha) = -\tan(\alpha)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin(\alpha) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos(\alpha) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot(\alpha)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin(\alpha) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos(\alpha) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot(\alpha)$$

- Formule di addizione e sottrazione

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta},\ \alpha,\beta,(\alpha-\beta),(\alpha+\beta) \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$$
$$\cot(\alpha\pm\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha},\ \alpha,\beta,(\alpha-\beta),(\alpha+\beta) \neq k\pi,\ k\in Z$$

- Formule per la duplicazione

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ \alpha \neq \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in Z$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha},\ \alpha \neq k\frac{\pi}{2},\ k\in Z$$

- Formule di triplicazione

$$\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha) \qquad \cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$$
$$\tan(3\alpha) = \frac{3\tan(\alpha) - \tan^3(\alpha)}{1-3\tan^2(\alpha)},\ \alpha \neq \frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3},\ k\in Z$$

- Formule per la bisezione

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \alpha \neq (2k+1)\pi,\ k\in Z \qquad \cot\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}, \alpha \neq 2k\pi,\ k\in Z$$

- Formule parametriche

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq (2k+1)\pi,\ k\in Z \qquad \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq (2k+1)\pi,\ k\in Z$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z \qquad \tan\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2\tan\frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq k\pi,\ k\in Z$$

- Formule di prostaferesi

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad \sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\tan\alpha\pm\tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \alpha,\beta \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z \quad \cot\alpha\pm\cot\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}, \alpha,\beta\neq k\pi,\ k\in Z$$

- Formule di Werner

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[s\cos in(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

- Formule di Briggs

Siano $a,b,c,\ p=\frac{a+b+c}{2}$ la lunghezza dei tre lati ed il semiperimetro di un triangolo. Si ha:

$$\begin{cases} \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\ \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \\ \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \\ \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \\ \tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} \\ \cot\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}} \\ \cot\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}} \end{cases}$$

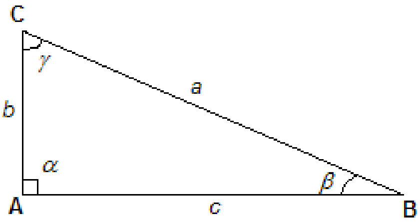
- Conversione fra radianti e gradi

α misura in radianti, α° misura in gradi: $\alpha = \frac{\pi}{180^\circ}\alpha^\circ \qquad \alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}\alpha$

- Archi notevoli

α (radianti)	α° (gradi)	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cot(\alpha)$
0	0°	0	1	0	non esiste
$\frac{\pi}{12}$	15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{10}$	18°	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{8}$	$22^\circ 30'$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{5}$	36°	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{3\pi}{10}$	54°	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{8}$	$67^\circ 30'$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
$\frac{2\pi}{5}$	72°	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$
$\frac{5\pi}{12}$	75°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	non esiste	0

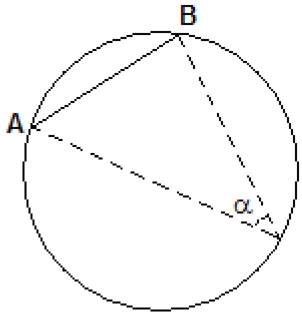
Triangolo rettangolo



$b = a\sin(\beta) = a\cos(\gamma), c = a\sin(\gamma) = a\cos(\beta)$

$b = c\tan(\beta) = c\cot(\gamma), c = b\tan(\gamma) = b\cot(\beta)$

Teorema della corda

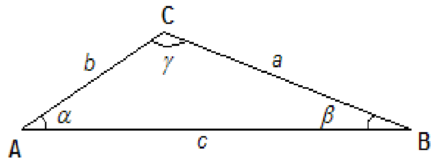


Sia R il raggio della circonferenza, e sia α l'ampiezza dell'angolo alla circonferenza sotteso dalla corda AB, allora la lunghezza di AB è

$\overline{AB} = 2R\sin(\alpha)$

Triangolo qualsiasi

- Area del triangolo



$$A = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) = \frac{1}{2}ac\sin(\beta)$$

oppure $A = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin(\beta)\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{2}b^2\frac{\sin(\alpha)\sin(\gamma)}{\sin(\beta)} = \frac{1}{2}c^2\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$

Teorema dei seni $\quad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Teorema del coseno (o di Carnot)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

Teorema delle proiezioni $a = b\cos(\gamma) + c\cos(\beta) \quad b = a\cos(\gamma) + c\cos(\alpha) \qquad c = a\cos(\beta) + b\cos(\alpha)$

Raggio della circonferenza inscritta in un triangolo di area A e semiperimetro p

$$r = \frac{A}{p} = (p-a)\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = (p-b)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = (p-c)\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

Raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo $\quad R = \frac{a}{2\sin(\alpha)} = \frac{b}{2\sin(\beta)} = \frac{c}{2\sin(\gamma)} = \frac{abc}{4A}$

Raggio della circonferenza exinscritta tangente, rispettivamente, ai lati di misura a, b, c:

$$r_a = \frac{A}{p-a} \qquad r_b = \frac{A}{p-b} \qquad r_c = \frac{A}{p-c}$$

Lunghezza della mediana relativa, rispettivamente, ai lati di misura a, b, c:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \qquad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \qquad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

Lunghezza della bisettrice relativa, rispettivamente, agli angoli di ampiezza α, β, γ:

$$b_\alpha = \frac{2bc\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{b+c} \qquad b_\beta = \frac{2ac\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{a+c} \qquad b_\gamma = \frac{2ab\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{a+b}$$

Teorema delle tangenti o di Nepero $\quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \frac{\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$

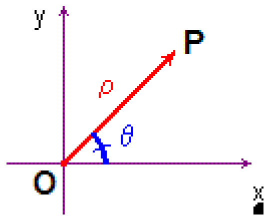
Significato trigonometrico della pendenza di una retta

m coefficiente angolare della retta e α misura dell'angolo tra retta e asse delle ascisse: $m = \tan\alpha$

Angolo tra due rette

m, m' coefficienti angolari delle rette, α misura dell'angolo tra le rette. Si ha $\tan\alpha = \frac{m-m'}{1+mm'}$

Coordinate polari



$$(\rho,\theta)\rightarrow(x,y):\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

$$(x,y)\rightarrow(\rho,\theta):\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{se } \ x>0 \ \text{ e } \ y\geq 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)+2\pi & \text{se } \ x>0 \ \text{ e } \ y>0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)+\pi & \text{se } \ x<0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } \ x=0 \ \text{ e } \ y>0 \\ \dfrac{3\pi}{2} & \text{se } \ x=0 \ \text{ e } \ y<0 \end{cases} \end{cases}$$

4. ANALISI

Limiti

Proprietà dei limiti

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \in R$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2 \in R$, allora

$$\lim_{x\to x_0} \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot l_1, \forall \alpha \in R \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = l_1 \pm l_2 \qquad \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = l_1 \cdot l_2$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l_1}, l_1 \neq 0 \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}, l_2 \neq 0$$

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in R$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) = \mp\infty$$

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = +\infty$$

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in R/\{0\}$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \begin{cases} \pm\infty & se \quad l > 0 \\ \mp\infty & se \quad l < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ non esiste, ma $f(x)$ è una funzione limitata, e se $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0$$

Se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ non esiste, ma $f(x)$ è una funzione limitata, e se $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Tavola dei limiti notevoli

- Razionali

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}=$$

$+\infty$ se $n>m$ e $\frac{a_n}{b_m}>0$; $\quad -\infty$ se $n>m$ e $\frac{a_n}{b_m}<0$; $\quad \frac{a_n}{b_m}$ se $n=m$; $\quad 0$ se $n<m$

- Esponenziali e logaritmici

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\frac{1}{e} \qquad \lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}\quad \forall a\in R^+/\{1\} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ \forall a\in R^+/\{1\} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty\ \ \forall\, a\in(1,+\infty) \qquad \lim_{x\to 0}\log_a x=+\infty\ \ \forall a\in(0,1)$$

$$\lim_{x\to +\infty}\log_a x=+\infty\ \ \forall\, a\in(1,+\infty) \qquad \lim_{x\to +\infty}\log_a x=-\infty\ \ \forall\, a\in(0,1)$$

$$\lim_{x\to 0}a^x=1 \qquad \lim_{x\to -\infty}a^x=0\ \ \forall\, a\in(1,+\infty)$$

$$\lim_{x\to -\infty}a^x=+\infty\ \ \forall\, a\in(0,1) \qquad \lim_{x\to +\infty}a^x=+\infty\ \ \forall\, a\in(1,+\infty)$$

$$\lim_{x\to +\infty}a^x=0\ \ \forall\, a\in(0,1) \qquad \lim_{x\to +\infty}x^b=0\ \ \forall\, b\in(-\infty,0)$$

$$\lim_{x\to +\infty}x^b=+\infty\ \ \forall\, b\in(0,+\infty) \qquad \lim_{x\to 0^+}x^r\log_a x=0\ \ \forall\, a\in R^+/\{1\},\forall\, r\in R^+$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log_a x}{x^r}=+\infty\ \ \forall\, a\in(0,1),\forall\, r\in R^+ \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\log_a x}{x^r}=-\infty\ \ \forall\, a\in(1,+\infty),\forall\, r\in R^+$$

$$\lim_{x\to +\infty}x^b a^x=\lim_{x\to +\infty}a^x,\forall\, b\in R^+,\forall\, a\in R^+/\{1\} \qquad \lim_{x\to -\infty}|x|^b\ a^x=\lim_{x\to -\infty}a^x,\forall\, b\in R^+$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{a^x}{x^b}=\lim_{x\to +\infty}a^x,\forall\, b\in R^+,\forall\, a\in R^+/\{1\} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^b}{a^x}=\lim_{x\to -\infty}a^x,\forall\, b\in R^+,\forall\, a\in R^+/\{1\}$$

$$\lim_{x\to -\infty}e^x x^b=0,\forall\, b\in R^+$$

- Goniometrici e iperbolici

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}=\frac{m}{n} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan mx}{nx}=\frac{m}{n} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin mx}{nx}=\frac{m}{n}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan mx}{nx}=\frac{m}{n} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{settsinh}(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{setttanh}(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty \qquad \lim_{x\to -\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to +\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\cot x=+\infty \qquad \lim_{x\to \pi^-}\cot x=-\infty \qquad \lim_{x\to -\infty}\mathrm{arccot}x=\pi \qquad \lim_{x\to +\infty}\mathrm{arccot}x=0$$

Punti di discontinuità

- Discontinuità di prima specie

Sia $f: X\to R$ con $X\subseteq R$ e $x_0\in X$ di accumulazione per X (a sinistra e a destra) e siano $l\in R, l_1\in R$.

Si dice che f presenta un punto di discontinuità di prima specie in x_0 se
$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \neq l_1 = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

- Discontinuità di seconda specie

Sia $f : X \to R$ con $X \subseteq R$ e $x_0 \in X$ di accumulazione per X , se almeno uno dei limiti destro o sinistro è infinito o non esiste allora si dice che presenta un punto di discontinuità di seconda specie in x_0

- Discontinuità di terza specie

Sia $f : X \to R$ con $X \subseteq R$ e $x_0 \in X$ di accumulazione per X e siano $l \in R, \lim_{x\to x_0} f(x) = l$, se $f(x) \neq l$ o $f(x_0)$ non esiste, allora si dice che f presenta un punto di discontinuità di terza specie o eliminabile in x_0.

Derivate

$f:(a,b)\to R$ si dice *derivabile* in $x_0 \in (a,b)$ se e solo se $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ esiste finito.

Il limite si dice *derivata prima* di f in x_0 e si indica con uno dei seguenti simboli

$$f'(x_0) \quad o \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad o \quad D[f](x_0) \quad o \quad \dot{f}(x_0)$$

Proprietà della derivata e regole di derivazione

- Linearità — Additività $(f \pm g)' = f' \pm g'$
  Omogeneità $(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f'$ con $\alpha \in R$
- Derivata di un prodotto $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- Derivata di un quoziente $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
- Derivata del reciproco $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$
- Derivata di una funzione composta $(g \circ f)' = g'[f(x)] \cdot f'(x)$
- Derivata di una funzione potenza $[f^n(x)]' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$
- Derivate di funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$

  $\left[f(x)^{g(x)}\right]' = \left\{e^{g(x)\ln[f(x)]}\right\}' = f(x)^{g(x)} \cdot \left\{g'(x)\ln[f(x)] + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right\}$
- Derivata di un valore assoluto $|f(x)|' = \text{sgn}[f(x)] \cdot f'(x)$
- Derivata della funzione inversa

$f : A \to B$ invertibile, $g : B \to A$ l'inversa, se f è derivabile in x e $f'(x) \neq 0$ si ha $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

Derivate delle funzioni elementari

$D(\text{costante}) = 0$ $\qquad$ $D(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}$

$D(\sin x) = \cos x$ $\qquad$ $D(\cos x) = -\sin x$

$D(\tan x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $\qquad$ $D(\cot x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$

$D(a^x) = a^x \cdot \ln a$ $\qquad$ $D(e^x) = e^x$

$D(\log_a x) = \dfrac{1}{x} \cdot \log_a e = \dfrac{1}{x \ln a}$ $\qquad$ $D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$

$D(\sinh x) = \cosh x$ $\qquad$ $D(\cosh x) = \sinh x$

$D(\tanh x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ $\qquad$ $D(\coth x) = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$

$D[\text{settsinh}(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad$ $D[\text{settcosh}(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$D[\text{setttanh}(x)] = \dfrac{1}{1-x^2}$ $\qquad$ $D[\text{settcoth}(x)] = \dfrac{1}{1-x^2}$

$D(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $D(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$D(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $D(\text{arc}\cot x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Teoremi sulle derivate

- Teorema di Fermat

Condizione necessaria ma non sufficiente affinché un punto sia di massimo o minimo relativo.
Sia $f: X \to R$ con $X \subseteq R$ e $x_0 \in X$ di accumulazione per X (a sinistra e a destra) con *f* derivabile in x_0, allora x_0 è un punto di massimo o minimo relativo per $f \Rightarrow f'(x_0) = 0$

- Teorema di Rolle

Sia $f: [a,b] \to R$ con *f* continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) tale che $f(a) = f(b)$, allora $\exists c \in (a,b) \mid f'(c) = 0$

- Significato geometrico del teorema di Rolle

Se il grafico di una funzione è dotato di tangente (cioè è derivabile) in tutti i punti interni all'intervallo $[a,b]$ ed assume lo stesso valore agli etsremi dell'intervallo, allora esiste un punto in cui la tangente è orizzontale (la funzione ha un massimo o un minimo).

- Teorema di Lagrange o del valor medio

Sia con *f* continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b), allora $\exists c \in (a,b) \mid f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

- Significato geometrico del teorema di Lagrange

Se un arco di curva continua in $[a,b]$ è dotato di tangente in tutti i punti dell'intervallo $[a,b]$ esclusi al più gli estremi, allora esiste un punto interno all'arco in cui la tangente è parallela alla corda congiungente gli estremi dell'arco di curva.

- 1° Corollario del teorema di Lagrange

Sia $f: [a,b] \to R$

$$\begin{pmatrix} 1)\ f(x) \text{ continua in } [a,b] \\ 2)\ f(x) \text{ derivabile in } (a,b) \\ 3)\ f'(x) \geq 0\ [f'(x) \leq 0]\ \forall x \in (a,b) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f \text{ è crescente } \forall x \in (a,b) \\ [f \text{ è decrescente } \forall x \in (a,b)] \end{pmatrix}$$

- 2° Corollario del teorema di Lagrange

Sia $f:[a,b]\to R$

$$\begin{pmatrix} \text{1) } f(x) \text{continua in } [a,b] \\ \text{2) } f(x) \text{derivabile in } (a,b) \\ \text{3) } f'(x)=0 \ \ \forall x\in(a,b) \end{pmatrix} \Leftrightarrow f \text{ è costante } \forall x\in(a,b)$$

- 3° Corollario del teorema di Lagrange

Sia $f:[a,b]\to R$

$$\begin{pmatrix} \text{1) } f(x) \text{continua in } [a,b] \\ \text{2) } f(x) \text{derivabile in } (a,b) \\ \text{3) } f'(x)<0 \ \forall x\in(a,c) \text{ e } f'(x)>0 \ \forall x\in(c,b) \\ [f'(x)>0 \ \forall x\in(a,c) \text{ e } f'(x)<0 \ \forall x\in(c,b)] \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c \text{ è ascissa di minimo assoluto per } f \text{ in } (\mathrm{a,b}) \\ [c \text{ è ascissa di massimo assoluto per } f \text{ in } (\mathrm{a,b})] \end{pmatrix}$$

- Teorema di Cauchy o degli incrementi finiti

Siano con $f:[a,b]\to R, g:[a,b]\to R$ continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b) tali che $g'(x)\neq 0 \ \ \forall x\in(a,b)$, allora $\exists c\in(a,b) \mid \dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

- Teorema di De L'Hospital

Se $f(x), g(x)$ sono definite in un intorno I_{x_0} del punto x_0 (finito o infinito), escluso al più il punto x_0, se $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$, se $g'(x)\neq 0 \ \ \forall x\in I_{x_0}-\{x_0\}$ e se esiste $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ allora $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Integrali

Definizione di primitiva. Si dice che una funzione $F(x)$ è una *primitiva* di $f:I\to R$ (I è un intervallo e f è continua) se e solo se $F'(x)=f(x)$ per ogni $x\in I$.

Proprietà dell'integrale

- Linearità — additività $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

  Omogeneità $\int_a^b \alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$ con $\alpha\in R$
- Additività rispetto all'intervallo di integrazione

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b g(x)dx \quad \text{dove } c\in[a,b]: a<b<c$$

- Convenzione $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ se $a<b$
- Monotonia o teorema del confronto
- Se $f(x)\le g(x)$ in $[a,b]$ allora $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$
- Valore assoluto $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$
- Teorema fondamentale del calcolo integrale

Se $f(x)$ è continua in $[a,b]$ ed $F(x)$ una prmitiva di $f(x)$ in $[a,b]$, allora $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

- Teorema della media

Se $f:[a,b]\to R$ è continua, allora $\exists c\in(a,b)$ tale che $f(c)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Integrali indefiniti immediati

$\int [f(x)]^\alpha f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

$\int f'(x)\sin[f(x)]dx = -\cos[f(x)] + c$

$\int f'(x)\cos[f(x)]dx = \sin[f(x)] + c$

$\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]} = \tan[f(x)] + c$

$\int \frac{f'(x)}{\sin^2[f(x)]} dx = -\cot[f(x)] + c$

$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$

$\int f'(x)a^{f(x)}dx = a^{f(x)} \log_a(e) + c$

$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = \arcsin[f(x)] + c$

$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \arctan[f(x)] + c$

$\int kdx = kx + c$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \; (n \neq -1)$

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

$\int \sin xdx = -\cos x + c$

$\int \cos xdx = \sin x + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$

$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$

$\int \tan xdx = -\ln|\cos x| + c$

$\int \cot xdx = \ln|\sin x| + c$

$\int \sec(x)dx = \ln(|\sec(x) + \tan(x)|) + c$

$\int \csc(x)dx = \ln(|\csc(x) - \cot(x)|) + c$

$\int \arcsin(x)dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c$

$\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$

$\int \sec^2(x)dx = \tan(x) + c$

$\int \csc^2(x)dx = -\cot(x) + c$

$\int \sin(ax)\sin(bx)dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} + c, a^2 \neq b^2$

$\int \cos(ax)\cos(bx)dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} + c, a^2 \neq b^2$

$\int \sin(ax)\cos(bx)dx = -\frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)} + c, a^2 \neq b^2$

$\int \cos^n(x)dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}(x)\sin(x) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)dx, n \geq 2$

$\int \tan^n(x)dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}(x) - \int \tan^{n-2}(x)dx, n \geq 2$

$\int \cot^n(x)dx = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1}(x) - \int \cot^{n-2}(x)dx, n \geq 2$

$\int \frac{1}{\cos^n(x)} dx = \frac{1}{n-1}\frac{1}{\cos^{n-2}(x)}\tan(x) + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\cos^{n-2}(x)} dx, n \geq 2$

$\int \frac{1}{\sin^n(x)} dx = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{\sin^{n-2}(x)}\cot(x) + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\sin^{n-2}(x)} dx, n \geq 2$

$\int \sin^n(x)\cos^m(x)dx = -\frac{\sin^{n+1}(z)\cos^{m+1}(x)}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2}(x)\cos^m(x)dx, n \neq -m$

$\int \sin^n(x)\cos^m(x)dx = \frac{\sin^{n+1}(x)\cos^{m-1}(x)}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^n(x)\cos^{m-2}(x)dx, n \neq -m$

$\int x^n \sin(x)dx = -x^n \cos(x) + n\int x^{n-1}\cos(x)dx$ $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + c$

$\int \log_b(x)dx = x\log_b(x) - x\log_b(e) + c$ $\int e^x dx = e^x + c$

$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$ $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\left(\dfrac{x}{|a|}\right) + c$

$\int \dfrac{1}{a^2 + x^2}dx = \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{|a|}\right) + c$ $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}dx = \mathrm{settsinh}(x) + c$

$\int \dfrac{1}{a^2 + x^2}dx = \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{|a|}\right) + c$ $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}dx = \mathrm{settsinh}(x) + c$

$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}dx = \mathrm{settcosh}(x) + c$ $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln(|\, x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\ |) + c$

$\int \dfrac{1}{a^2 - x^2}dx = \dfrac{1}{2a}\ln\left(\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right|\right) + c$ $\int \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos(x) + c$

$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \dfrac{1}{2}\left[a^2 \arcsin\left(\dfrac{x}{|a|}\right) + x\sqrt{a^2 - x^2}\right] + c$ $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

$\int \dfrac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right| + c$ $\int \dfrac{1}{\cos x}dx = \ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + c$

$\int \sin^2 x dx = \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4}\right) + c$ $\int \cos^2 x dx = \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4}\right) + c$

$\int \sinh x dx = \cosh x + c$ $\int \cosh x dx = \sinh x + c$

$\int \dfrac{1}{\cosh^2 x}dx = \tanh x + c$ $\int \dfrac{1}{\sinh^2 x}dx = -\coth x + c$

$\int \tanh(x)dx = \ln[\cosh(x)] + c$ $\int \coth(x)dx = \ln[|\sinh(x)|] + c$

$\int \mathrm{sech}(x)dx = \mathrm{setttanh}[\sinh(x)] + c$ $\int \mathrm{cosech}(x)dx = \ln\left[\left|\tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|\right] + c$

$\int \mathrm{settsinh}(x)dx = x \cdot \mathrm{settsinh}(x) - \sqrt{x^2 + 1} + c$ $\int \mathrm{settcosh}(x)dxdx = x \cdot \mathrm{settcosh}(x) - \sqrt{x^2 - 1} + c$

$\int \mathrm{setttanh}(x)dx = x \cdot \mathrm{setttanh}(x) + \dfrac{\ln(1 - x^2)}{2} + c$

Integrazione per parti. Se in un intervallo f, g sono due funzioni continue con derivata continua, allora $\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$

Integrazione per sostituzione. Se f è una funzione continua su $[a,b]$ e g una funzione invertibile e derivabile con derivata continua su $[c,d]$, allora

$$\left[\int f(x)dx\right]_{x=g(t)} = \int f[g(t)] \cdot g'(t)dt$$

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]_{x=g(t)} = \int_c^d f[g(t)] \cdot g'(t)dt$$

con $c = g(a), d = g(b)$.

Lunghezza di una curva

Data la curva di equazione $y = f(x)$ con $x \in [a,b]$ ed $f(x)$ continua e derivabile in (a,b), la lunghezza dell'arco di curva grafico della funzione $y = f(x)$ relativamente ad $[a,b]$ è

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Calcolo di aree

L'area della regione di piano delinitata dal grafico di $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e dalle rette $x = a, x = b$ con $f(x), g(x)$ continue in $[a,b]$ e tali che $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ è data da $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

Calcolo di volumi

Se $y = f(x)$ una funzione continua in $[a,b]$, il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse delle ascisse del trapeziode delimitato dal grafico della funzione, dall'asse *x* e dalle rette $x = a, x = b$ è dato da $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

Integrali impropri

- Funzioni non limitate

Se $f : [a,b) \to R$ è continua e $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ o $(-\infty)$, allora $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to 0^+} \int_a^{b+t} f(x)dx$

- Intervalli illimitati

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^t f(x)dx$$

Integrali notevoli

$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (integrale di Gauss) $\qquad$ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ (integrale di Eulero)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin(x)}{x}\right]^3 dx = \frac{3}{4}\pi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln[\cos(x)]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln[\sin(x)]dx = -\frac{\pi}{2}\ln(2) \qquad \int_0^{\pi} \ln[1 - 2\alpha\cos(x) + \alpha^2]dx = 2\pi\ln|\alpha|$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (integrale di Fresnel)

Formule per l'integrazione numerica

- Formula di quadratura dei rettangoli

Si suddivide l'intervallo $[a,b]$ in n intervalli di ampiezza $h=\frac{(b-a)}{n}$ mediante gli $n+1$ punti $x_0=a, x_1=x_0+h, x_2=x_0+2h, \cdots, x_n=a+nh=b$ cui corrispondono i valori della funzione $y_0=f(a), y_1=f(a+h), y_2=f(a+2h), \cdots, y_{n-1}=f[a+(n-1)h], y_n=f(a+nh)=f(b)$.

L'area approssimata è per difetto $\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})$

per eccesso $\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}+y_n)$. L'errore è $\varepsilon_n \le \frac{(b-a)^2}{2n}\cdot \max_{[a,b]}|f'(x)|$

- Formula dei trapezi

Si suddivide l'intervallo $[a,b]$ in n intervalli di ampiezza $h=\frac{(b-a)}{n}$ mediante gli $n+1$ punti $x_0=a, x_1=x_0+h, x_2=x_0+2h, \cdots, x_n=a+nh=b$ cui corrispondono i valori della funzione $y_0=f(a), y_1=f(a+h), y_2=f(a+2h), \cdots, y_{n-1}=f[a+(n-1)h], y_n=f(a+nh)=f(b)$.

L'area approssimata è $\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)$

L'errore commesso è $\varepsilon_n \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot \max_{[a,b]}|f''(x)|$

- Formula di quadratura delle parabole o di Cavalieri-Simpson

Si suddivide l'intervallo $[a,b]$ in $2n$ intervalli di ampiezza $h=\frac{(b-a)}{2n}$ mediante i $2n+1$ punti $x_0=a, x_1=x_0+h, x_2=x_0+2h, \cdots, x_{2n}=a+2nh=b$ cui corrispondono i valori della funzione $y_0=f(a), y_1=f(a+h), y_2=f(a+2h), \cdots, y_{2n-1}=f[a+(2n-1)h], y_{2n}=f(a+2nh)=f(b)$

L'area approssimata è

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{6n}[y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4+y_6+\cdots+y_{2n-2})+4(y_1+y_3+y_5+\cdots+y_{2n-1})]$$

L'errore commesso è $\varepsilon_n \le \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\cdot \max_{[a,b]}|f^{IV}(x)|$

Zeri di una funzione

- Teorema di esistenza degli zeri

Se una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso $[a,b]$ e assume valori discordi agli estremi dell'intervallo, cioè $f(a)\cdot f(b)<0$, allora l'equazione $f(x)=0$ ha almeno una soluzione nell'intervallo (a,b): $\exists \alpha \in (a,b) \mid f(\alpha)=0$.

- 1° Teorema di unicità della soluzione

Se una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso $[a,b]$, assume valori discordi agli estremi dell'intervallo, cioè $f(a)\cdot f(b)<0$, è derivabile in (a,b) e $f'(x)\neq 0 \ \forall x \in (a,b)$, allora l'equazione $f(x)=0$ ha un'unica soluzione in (a,b): $\exists! \alpha \in (a,b) \mid f(\alpha)=0$.

- 2° Teorema di unicità della soluzione

Se una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso $[a,b]$, assume valori discordi agli estremi dell'intervallo, cioè $f(a)\cdot f(b)<0$, è derivabile due volte in (a,b) e $f''(x)$ ha segno costante in (a,b), allora l'equazione $f(x)=0$ ha un'unica soluzione in (a,b): $\exists! \alpha \in (a,b) \mid f(\alpha)=0$.

- Metodo di bisezione

Si suddivide ad ogni passo l'intervallo $[a,b]$ in due parti uguali e si determina in quale dei due sottointervalli è presente la soluzione, cioè valga sempre $f(a)\cdot f(b)<0$. In questo modo si dimezza progressivamente l'intervallo contenente la soluzione α.

Si pone $a_0=a, b_0=b$ e si calcolano $x_0=\dfrac{a_0+b_0}{2}$, $f(x_0)$.

Se $f(x_0)=0 \Rightarrow \alpha=x_0$ è lo zero cercato
Se $f(x_0)\cdot f(a)>0 \Rightarrow a_1=x_0, b_1=b_0$ e si cerca la soluzione $\alpha\in(a_1,b_1)\equiv(x_0,b_0)$
Se $f(x_0)\cdot f(a)<0 \Rightarrow a_1=a_0, b_1=x_0$ e si cerca la soluzione $\alpha\in(a_1,b_1)\equiv(a_0,x_0)$
Si prosegue con questo procedimento applicandolo a $(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)$ con

$$b_1-a_1=\frac{b_0-a_0}{2}=\frac{b-a}{2},\cdots,b_n-a_n=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}=\frac{b-a}{2^n}.$$

Il procedimento viene arrestato se:
- $|b_n-a_n|<\varepsilon$ con $\varepsilon\in R^+$ scelto a piacere o indicato espressamente nella richiesta
- $|f(x_n)|<\varepsilon$ con $\varepsilon\in R^+$ in modo che il valore $f(x_n)$ sia prossimo allo zero
- entrambe le condizioni

La soluzione approssimata è $\alpha\approx x_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ con un errore assoluto non superiore a $\dfrac{b-a}{2^n}$.

- Metodo delle tangenti o di Newton-Raphson

Sia $[a,b]$ l'intervallo all'interno del quale si trova l'unica radice α per cui certamente vale $f(a)\cdot f(b)<0$ e supponiamo che $f''(x)$ abbia segno costante $\forall x\in[a,b]$.
Posto $x_0=a$ se $f''(x_0)\cdot f(a)>0$ o $x_0=b$ se $f''(x_0)\cdot f(b)>0$, la radice richiesta è $\alpha\approx x_n$ con

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Il procedimento viene arrestato se:
- $|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon$ con $\varepsilon\in R^+$ scelto a piacere o indicato espressamente nella richiesta
- $|f(x_n)|<\varepsilon$ con $\varepsilon\in R^+$ in modo che il valore $f(x_n)$ sia prossimo allo zero
- entrambe le condizioni

- Metodo delle secanti o delle corde o di Lagrange

Sia $[a,b]$ l'intervallo all'interno del quale si trova l'unica radice α per cui certamente vale $f(a)\cdot f(b)<0$ e supponiamo che $f''(x)$ abbia segno costante $\forall x\in[a,b]$.
Posto $x_0=b\wedge k=a$ se $f''(x_0)\cdot f(a)>0$ o $x_0=a\wedge k=b$ se $f''(x_0)\cdot f(b)>0$, la radice richiesta è

$$\alpha\approx x_n \text{ con } x_n=x_{n-1}-\frac{k-x_{n-1}}{f(k)-f(x_{n-1})}\cdot f(x_{n-1})$$

Il procedimento viene arrestato se:
- $|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon$ con $\varepsilon\in R^+$ scelto a piacere o indicato espressamente nella richiesta
- $|f(x_n)|<\varepsilon$ con $\varepsilon\in R^+$ in modo che il valore $f(x_n)$ sia prossimo allo zero
- entrambe le condizioni

5. CALCOLO COMBINATORIO

- Coefficiente binomiale

Dati $n, k \in N$, con $0 \le k \le n$, si definisce *coefficiente binomiale* di n su k $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- Proprietà del coefficiente binomiale

I coefficienti binomiali rispettano le seguenti proprietà

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \forall n \in N \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \forall n \in N$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \forall n, k \in N, n \ge k \qquad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \quad \forall n, k \in N, n \ge k$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \forall n, k \in N, n \ge k \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

In particolare, dall'ultima proprietà, se $a = 1, b = 1$, discende che $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \forall n \in N$

mentre se $a = 1, b = -1$ $\quad \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots\cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

Un’altra proprietà scaturisce dalla *Formula di convoluzione di Vandermonde* valida in presenza di due insiemi *A* e *B*, disgiunti e di cardinalità, rispettivamente, *n* ed *m*. Se S è la loro unione $C_{n+m,k}$ rappresenta il numero dei suoi sottoinsiemi di *k* elementi:

$$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0} \cdot \binom{m}{k} + \binom{n}{1} \cdot \binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k} \cdot \binom{m}{0} = \sum_{r=0}^{k} \binom{n}{r} \cdot \binom{m}{k-r} \quad \forall n, m, k \in N, k \le \min(n, m)$$

da cui, se $n = m = k$, discende la proprietà $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$

Si può estendere la definizione di coefficiente binomiale anche ai numeri reali e precisamente si pone $\binom{r}{k} = \frac{r \cdot (r-1) \cdots (r-k+1)}{k!}, r \in R, k \in N$. Se $n < k$ si ha $\binom{n}{k} = 0$ e se $n < 0$ $\binom{-1}{k} = (-1)^k$.

- Coefficiente multinomiale

Dati $m+1$ numeri naturali, $n, k_1, k_2, \ldots, k_m \in N$, tali che $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, si definisce *coefficiente multinomiale* $\binom{n}{k_1, k_2, \cdots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{m} k_i!}$

e comunque si scelgano i numeri naturali $n, k_1, k_2, \ldots, k_m$ (purché $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$), risulta

$$\binom{n}{k_1, k_2, \cdots, k_m} \in N$$

- Proprietà del coefficiente multinomiale

Fissato $n \in N$, e detto $A_n \subset N^m$ l'insieme di tutte le m-ple di naturali $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ tali che $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, risulta

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_m) \in A_n} \binom{n}{k_1, k_2, \cdots, k_m} \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \cdots \cdot x_m^{k_m} = \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_m) \in A_n} n! \cdot \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i^{k_i}}{k_i!} \right)$$

- Permutazioni semplici

Dato un insieme X con n elementi, si chiama *permutazione* ogni ordinamento dell'insieme X . Dati n

oggetti distinti, il numero di permutazioni P_n è $P_n = n!$

- Permutazioni con ripetizione

Dati n oggetti non tutti distinti fra di loro, un ordinamento di tali oggetti si chiama permutazione con ripetizione. Supponiamo di poter suddividere gli n oggetti in h tipi diversi (ovviamente $h \le n$). Siano n_i il numero di elementi di tipo i, per ogni $i = 1,2,\cdots,h$, allora $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_h$. Indicando con $P^*_{n_1,n_2,\cdots,n_h}$ il numero delle permutazioni con ripetizione, ovvero il numero di tutti i possibili ordinamenti degli n oggetti, risulta $P^*_{n_1,n_2,\cdots,n_h} = \dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\cdots\cdot n_h!}$

- Combinazioni semplici

Dato un insieme X con cardinalità n (quindi contenente n elementi distinti), ogni sottoinsieme di X con k elementi ($0 \le k \le n$) viene detto *combinazione* di n oggetti di classe k, si indica con $C_{n,k}$, rappresenta il numero di tutti possibili modi con cui si possono scegliere k elementi fra n oggetti dati, e risulta

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ed inoltre $$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = P^*_{k,n-k}$$

- Combinazioni con ripetizione

Dato un insieme X di cardinalità n, ossia dati n oggetti distinti, ogni raggruppamento di k Elementi di X, ammettendo anche ripetizioni di oggetti, viene detto *combinazione con ripetizione* di n oggetti di classe k. Indicando con $C^*_{n,k}$ il numero di tutte le possibili combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k, risulta $C^*_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

- Disposizioni semplici

Dati n oggetti, ogni ordinamento di k oggetti ($0 \le k \le n$) comunque scelti fra gli n si chiama *disposizione* di n oggetti di classe k. Il numero di tutte le possibili disposizioni di n oggetti di classe k si indica con $D_{n,k}$ e risulta $D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)$

- Disposizioni con ripetizione

Dati n oggetti, ogni ordinamento di k oggetti in cui sono ammesse anche ripetizioni si chiama *disposizione con ripetizione* di n oggetti di classe k. Indicando con $D^*_{n,k}$ il numero di tutte le possibili disposizioni con ripetizioni di n oggetti di classe k, risulta $D^*_{n,k} = n^k$

6.GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Dominio

E' l'insieme di definizione della funzione in esame, cioè il più grande sottoinsieme di R in cui la funzione non perde di significato. Di seguito alcuni esempi di funzioni elementari:

$f(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ $\qquad dom(f)=\{x\in R: g(x)\neq 0\}$

$f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ (n pari) $\qquad dom(f)=\{x\in R: g(x)\geq 0\}$

$f(x)=\log[g(x)]$ $\qquad dom(f)=\{x\in R: g(x)> 0\}$

$f(x)=\tan[g(x)]$ $\qquad dom(f)=\left\{x\in R: g(x)\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi, \forall k\in Z\right\}$

$f(x)=\cot[g(x)]$ $\qquad dom(f)=\{x\in R: g(x)\neq k\pi, \forall k\in Z\}$

$f(x)=\arcsin[g(x)]$ $\qquad dom(f)=\{x\in R: -1\leq g(x)\leq 1\}$

$f(x)=\arccos[g(x)]$ $\qquad dom(f)=\{x\in R: -1\leq g(x)\leq 1\}$

Simmetrie

- Funzione pari $\qquad f(x)=f(-x)$
- Funzione dispari $\qquad f(x)=-f(-x)$

La somma di due funzioni pari è una funzione pari
La somma di due funzioni dispari è una funzione dispari
Il prodotto di due funzioni pari è una funzione pari
Il prodotto di due funzioni dispari è una funzione pari
Il prodotto di una funzione pari con una dispari è una funzione dispari
Il rapporto di due funzioni pari è una funzione pari
Il rapporto di due funzioni dispari è una funzione dispari
Il rapporto di una funzione pari con una dispari è una funzione dispari

Periodicità

Una funzione è periodica di periodo T se $f(x)=f(x+T)$

Intersezioni con l'asse delle ascisse

Le intersezioni con l'asse delle ascisse si ricavano risolvendo il sistema $\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases}$

Intersezioni con l'asse delle ordinate

Le intersezioni con l'asse delle ordinate si ricavano risolvendo il sistema $\begin{cases} y=f(x) \\ x=0 \end{cases}$

Studio del segno

Lo studio del segno si ricava risolvendo la disequazione $f(x) \gtrless 0$ e ricavando gli intervalli (contenuti nel dominio) di positività o negatività.

Asintoti

- Asintoti verticali

Quando una funzione ammette limite $+\infty$ o $-\infty$ in un punto x_0, si dice che essa ha come asintoto verticale la retta $x=x_0$.

Più precisamente, data una funzione f, se $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$ (o $-\infty$), allora la retta $x=x_0$ è un asintoto verticale sinistro; se $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$ (o $-\infty$), allora la retta $x=x_0$ è un asintoto verticale destro; se $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ (o $-\infty$), allora la retta $x=x_0$ è un asintoto verticale (sia destro che sinistro).

- Asintoti orizzontali

Quando una funzione ammette limite finito l per $x\to+\infty$ $(-\infty)$ si dice che essa ha come asintoto orizzontale la retta $y=l$.

Più precisamente, data una funzione f, se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l_1 \in R$, allora la retta $y = l_1$ è un asintoto orizzontale sinistro; se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l_2 \in R$, allora la retta $y = l_2$ è un asintoto orizzontale destro.

- Asintoti obliqui

Se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ esiste finito e non nullo, e se $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right] = q$ esiste finito, allora la funzione f ammette per $x\to+\infty$ un asintoto obliquo destro di equazione $y = mx+q$.
Se $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ esiste finito e non nullo, e se $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right] = q$ esiste finito, allora la funzione f ammette per $x\to+\infty$ un asintoto obliquo sinistro di equazione $y = mx+q$.

Derivata prima

- Punto angoloso

se $\lim_{h\to0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_1 \in R \neq l_2 \in R = \lim_{h\to0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, allora $(x_0, f(x_0))$ è un punto angoloso.

- Flesso a tangente verticale

Se $\lim_{h\to0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e $\lim_{h\to0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ esistono, sono infiniti, e sono uguali, allora $(x_0, f(x_0))$ è un punto di flesso a tangente verticale e $x = x_0$ è una retta tangente al grafico di f che attraversa il grafico stesso.
se $\lim_{h\to0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$ e $\lim_{h\to0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$ il flesso verticale è ascendente
se $\lim_{h\to0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$ e $\lim_{h\to0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$ il flesso verticale è discendente

- Cuspide

Se $\lim_{h\to0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e $\lim_{h\to0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ esistono, entrambi infiniti, ma diversi, allora $(x_0, f(x_0))$ è un punto di cuspide.
In particolare:
se $\lim_{h\to0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$ e $\lim_{h\to0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$ la cuspide è rivolta verso il basso
se $\lim_{h\to0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$ e $\lim_{h\to0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$ la cuspide è rivolta verso l'alto

Punti critici

Risolvendo l'equazione $f'(x) = 0$, si trovano i punti critici.
Un punto critico $(x_0, f(x_0))$, in base al segno di f', può essere
- un minimo relativo se la derivata prima è negativa in un intorno sinistro di x_0 e positiva in un intorno destro di x_0
- un massimo relativo se la derivata prima è positiva in un intorno sinistro di x_0 e negativa in un intorno destro di x_0
- un un punto di flesso a tangente orizzontale se la derivata prima assume lo stesso segno in un intorno completo di x_0

Derivata seconda

Risolvendo l'equazione $f''(x) = 0$ si trovano gli eventuali punti di flesso a tangente obliqua. Se l'ascissa x_0 che annulla la derivata seconda annulla anche la derivata prima, bisogna valutare se il punto $(x_0, f(x_0))$ è di minimo relativo, massimo relativo o flesso a tangente orizzontale.
Fatto questo può essere utile studiare il segno della derivata seconda; negli intervalli in cui risulta $f''(x) > 0$ la funzione è convessa, invece negli intervalli in cui risulta $f''(x) < 0$ la funzione è concava.

Relazioni tra derivate

Sia $(x_0, f(x_0))$ un punto critico, cioè tale per cui $f'(x_0) = 0$.

Possono verificarsi i seguenti casi:

$$f'(x_0) = 0 \wedge \begin{cases} f''(x_0) > 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \text{è punto di minimo relativo} \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \text{è punto di massimo relativo} \\ f''(x_0) = 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \text{può essere un flesso, dipende da } f'''(x_0) \end{cases}$$

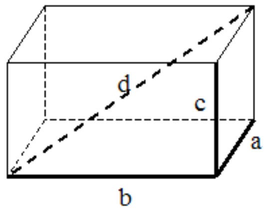
$$f''(x_0) = 0 \wedge \begin{cases} f'''(x_0) > 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \text{è punto di flesso ascendente} \\ f'''(x_0) < 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \text{è punto di flesso dicendente} \end{cases}$$

$$f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) = 0 \wedge \begin{cases} f^{pari}(x_0) > 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \text{ è punto di minimo relativo} \\ f^{pari}(x_0) < 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \text{ è punto di massimo relativo} \\ f^{dispari}(x_0) > 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \text{è punto di flesso ascendente} \\ f^{dispari}(x_0) < 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \text{è punto di flesso dicendente} \end{cases}$$

7. GEOMETRIA SOLIDA

Nel seguito: V volume, A_l area laterale, A_b area di base, A_t area totale, $2p_b$ perimetro di base, C circonferenza, d diagonale, h altezza, l lato, r raggio, r_i raggio della sfera inscritta, r_c raggio della sfera circoscritta, a apotema (in alcuni casi può essere un semplice spigolo).

Parallelepipedo rettangolo

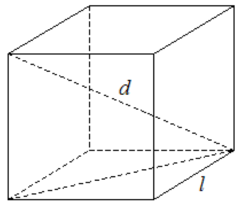


$V = A_b \cdot c = a \cdot b \cdot c$ $A_l = 2p_b \cdot c$ $A_b = a \cdot b$

$A_t = 2A_b + A_l = 2(ab + bc + ac)$ $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$A_l = A_t - 2A_b$ $A_b = \dfrac{A_t - A_l}{2} = \dfrac{V}{c}$ $2p_b = \dfrac{A_l}{c}$

Cubo

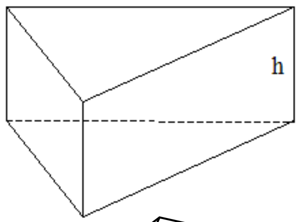


$V = l^3$ $A_l = 4l^2$ $A_t = 6l^2$ $d = l\sqrt{3}$

$r_i = \dfrac{l}{2}$ $r_c = \dfrac{l}{2}\sqrt{3}$ $l = \sqrt[3]{V} = \sqrt{\dfrac{A_t}{6}} = \sqrt{\dfrac{A_l}{4}}$

Prisma retto

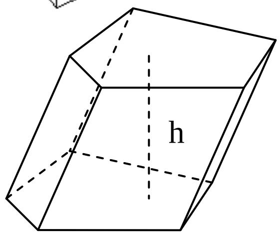
Il prisma retto ha la superficie inferiore congruente e parallela alla superficie superiore, le facce laterali sono rettangoli.



$V = A_b \cdot h$ $A_l = 2p_b \cdot h$ $A_t = A_l + 2A_b$ $2p_b = \dfrac{A_l}{h}$

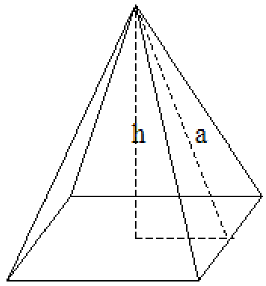
$h = \dfrac{A_l}{2p_b} = \dfrac{V}{A_b}$ $A_l = A_t - 2A_b$ $A_b = \dfrac{A_t - A_l}{2}$ $A_b = \dfrac{V}{h}$

Prisma obliquo



$V = A_b \cdot h$ $A_t = A_l + 2A_b$

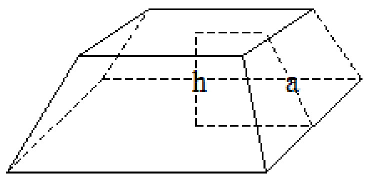
Piramide retta



$V = \dfrac{1}{3} A_b \cdot h$ $A_l = \dfrac{2p_b \cdot a}{2}$ $A_t = A_b + A_l$ $A_b = \dfrac{3V}{h}$

$2p_b = \dfrac{2A_l}{a}$ $a = \dfrac{2A_l}{2p_b}$ $h = \dfrac{3V}{A_b}$

Tronco di piramide

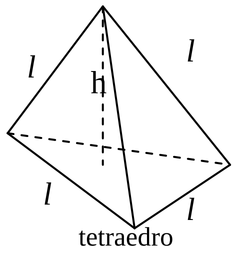


$V = \dfrac{1}{3} \cdot h \cdot (A_b + A_{b'} + \sqrt{A_b \cdot A_{b'}})$ $A_l = \dfrac{(2p + 2p') \cdot a}{2}$

$a = \dfrac{2A_l}{2p + 2p'}$ $A_t = A_l + A_b + A_{b'}$

Poliedri regolari

- **Tetraedro:** formato da 4 triangoli equilateri



$$V=\frac{l^3\sqrt{2}}{12} \qquad A_t=l^2\sqrt{3} \qquad r_i=\frac{l\sqrt{6}}{12} \qquad r_c=\frac{l\sqrt{6}}{4}$$

- **Esaedro**: formato da 6 quadrati è il cubo

- **Ottaedro:** formato da 8 triangoli equilateri

$$V=\frac{l^3\sqrt{2}}{3} \qquad A_t=2l^2\sqrt{3} \qquad r_i=\frac{l\sqrt{6}}{6} \qquad r_c=\frac{l\sqrt{2}}{2}$$

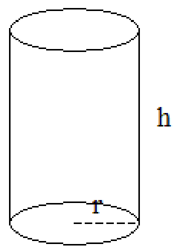
- **Dodecaedro:** formato da 12 pentagoni regolari

$$V=\frac{l^3\left(15+7\sqrt{5}\right)}{4} \qquad A_t=3l^2\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)} \qquad r_i=\frac{l\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}}{20} \qquad r_c=\frac{l\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}$$

- **Icosaedro:** formato da 20 triangoli equilateri

$$V=\frac{5l^3\left(3+\sqrt{5}\right)}{12} \qquad A_t=5l^2\sqrt{3} \qquad r_i=\frac{l\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12} \qquad r_c=\frac{l}{4}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}$$

Cilindro

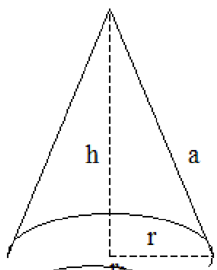


$$V=A_b\cdot h=\pi r^2 h \qquad A_b=\pi r^2 \qquad A_l=C\cdot h=2\pi rh$$

$$A_t=A_l+2A_b=2\pi r(h+r) \qquad A_b=\frac{V}{h}$$

$$C=2\pi r=\frac{A_l}{h} \qquad h=\frac{A_l}{2\pi r}=\frac{V}{\pi r^2} \qquad r=\frac{A_l}{2\pi h}=\sqrt{\frac{V}{\pi h}}$$

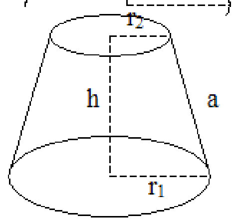
Cono



$$V=\frac{A_b\cdot h}{3}=\frac{\pi\cdot r^2\cdot h}{3} \qquad A_l=\frac{C\cdot a}{2}=\pi ra \qquad A_b=\pi r^2$$

$$A_t=A_b+A_l=\pi r^2+\pi ra \qquad a=\frac{A_l}{\pi r} \qquad r=\frac{A_l}{\pi a}=\sqrt{\frac{3V}{\pi h}} \qquad h=\frac{3\cdot V}{\pi r^2}$$

Tronco di cono



$$V=\frac{1}{3}h\pi\left(r_1^2+r_1r_2+r_2^2\right) \qquad A_l=\pi\cdot a\cdot(r_1+r_2) \qquad A_b=\pi r_1^2+\pi r_2^2$$

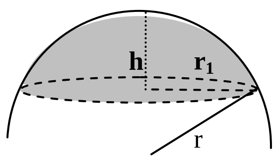
$$a=\sqrt{h^2+\left(r_1-r_2\right)^2}$$

Sfera

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3 \qquad A=4\pi r^2 \qquad r=\sqrt{\frac{A}{4\pi}}=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

Calotta sferica e segmento sferico ad una base o sezione sferica

$$V=\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h) \qquad A=2\pi rh$$

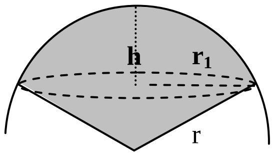


$r_1 = \sqrt{h(2r-h)}$

Settore sferico

$A_l = \pi r(r_1 + 2h)$

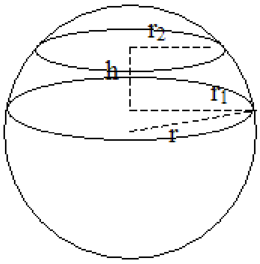
$V = \dfrac{2}{3}\pi r^2 h$



Zona sferica e segmento sferico a due basi

$V = \dfrac{\pi \cdot h}{2} \cdot \left(\dfrac{h^2}{3} + r_1^2 + r_2^2 \right)$,

$A = 2\pi r h$

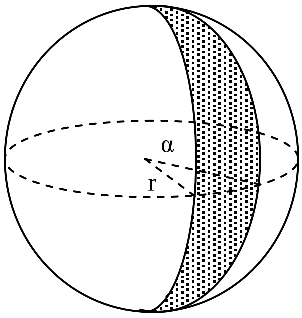


Fuso sferico e spicchio sferico

$V = \dfrac{\pi r^3}{270°}\alpha$

$A_l = \dfrac{\pi r^2}{90°}\alpha$

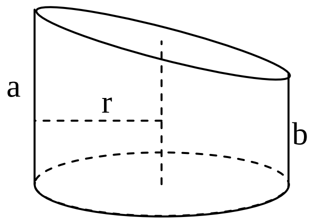
α è misurato in gradi
A_l è la parte di superficie sferica



Cilindro circolare retto a sezione obliqua

$V = \pi r^2 \dfrac{(a+b)}{2}$ $\qquad A_l = \pi r(a+b)$

$A_t = \pi r\left(a+b+r+\sqrt{r^2 + \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2} \right)$

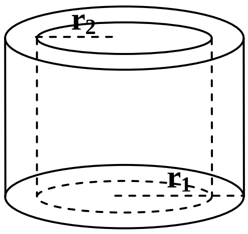


Corona cilindrica

$V = \pi h\left(r_1^2 - r_2^2\right)$

$A_l = 2\pi h(r_1 + r_2)$

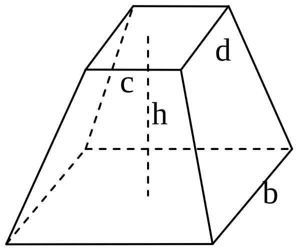
$A_t = 2\pi(r_1 + r_2)(h + r_1 - r_2)$



Obelisco

Le superfici laterali sono trapezi, le superfici superiore e inferiore sono rettangoli non simili.

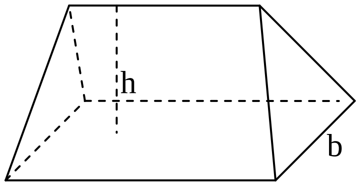
$$V = \frac{h}{6}\left[\left(2a+c\right)b+\left(2c+a\right)d\right]$$



Cuneo

Superficie di base rettangolare, le superfici laterali sono triangoli e trapezi isosceli.

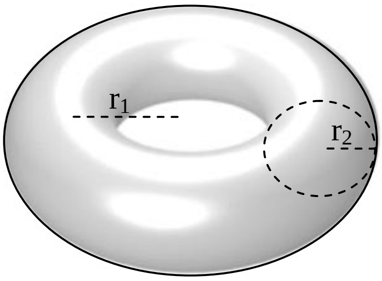
$$V = \frac{bh}{6}\left(2a+c\right)$$



Toro

$$V = 2\pi^2 r_2^2 r_1$$

$$A_t = 4\pi^2 r_1 r_2$$



Prisma obliquo triangolare

$$V = A_b \frac{a+b+c}{3}$$