SIMULAZIONE PROVA ESAME DI MATURITA' PER LICEO SCIENTIFICO

Prova di Matematica

PROBLEMA1

Sia data la funzione $g(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$

1. Determinare i coefficienti a, b, c, d, e, f in modo che $g(x)$ sia pari, abbia un minimo relativo nell'origine e un massimo in $x = 1$;
2. Posto $b = -1$ si studi la funzione ottenuta, indicando in particolare i flessi, e se ne tracci il grafico G in un sistema di riferimento cartesiano Oxy;
3. Si determini l'area della regione di piano delimitata dal grafico G e dalle rette individuate dalle ascisse dei flessi;
4. Si determini il volume del solido generato dalla rotazione completa intorno all'asse delle ascisse della parte di piano delimitata dal grafico G del primo quadrante. Come cambia il volume se la rotazione avviene attorno alla retta di equazione $y = k$ con $k < 0$?

PROBLEMA2

Sia data la funzione $f(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x}$

1. Si determinino i coefficienti a, b, c di modo che

$$\int_0^1 f(x)dx = 4 - 2e^{-1}, \qquad \int_1^2 f(x)dx = 2e^{-1} - e^{-2}, \qquad \int_2^{+\infty} f(x)dx = e^{-2}$$

2. Si studi e si disegni la funzione ottenuta al punto precedente;
3. Tramite uno dei metodi numerici studiati, si dia un'approssimazione a meno di 10^{-2} del punto di intersezione tra la curva e la retta r di equazione $y = 8$;
4. Si calcoli l'area della regione di piano compresa tra la curva, l'asse delle ordinate e la retta r

QUESTIONARIO

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\arctan\frac{x-\pi}{x-4}\right)}$

2. Determinare l'ampiezza di ciascun angolo alla base di un trapezio isoscele circoscritto a un semicerchio di raggio di misura r in modo che la superficie del solido generato dal trapezio in una rotazione completa intorno alla base maggiore risulti $2\pi\left(3\sqrt{2}-2\right)r^2$.

3. Data la funzione $f(x)\begin{cases} e^{a/x} & x<0 \\ x\sin(\sqrt{x}) & x\geq 0\end{cases}$, studiarne la continuità e derivabilità su R al variare del parametro a.

4. Calcolare il limite per $x\to 2$ di $f(x)=\frac{3-\sqrt{5+2x}}{x^2-5x+6}$.

5. Di una funzione $f(x)$ si sa che la sua derivata terza è $f'''(x)=e^x-\frac{4}{3}e^{-x}-\frac{4}{3}e^{2x}$ e che $f(0)=2, f'(0)=-1, f''(0)=1$. Si trovi $f(x)$.

6. Risolvere la disequazione $\left|1-|x+1|\right|\geq 1+|x-1|$.

7. Una scatola contiene 6 palle bianche, 3 palle rosse, ed 1 palla verde. Si estraggono dalla scatola tre palle in successione, senza inserire ciascuna palla nuovamente nella scatola dopo averla estratta.

   a) Calcolare la probabilità di estrarre tre palle bianche.

   b) Calcolare la probabilità di estrarre tre palle bianche sapendo che la prima palla estratta è bianca.

   c) Calcolare la probabilità di estrarre tre palle bianche sapendo che le prime due palle estratte sono bianche.

   d) Calcolare la probabilità che nessuna delle tre palle estratte sia bianca.

8. Calcolare il valore medio della funzione $f(x)=\ln^3(x)$ in $\left[e,e^2\right]$

9. Sia $n\in \mathrm{N}$. Risolvere la seguente equazione: $\binom{n}{4}-\binom{n}{3}=n^3-3n^2+2n$

10. Tra tutti i parallelepipedi rettangoli di altezza h e di superficie totale costante S , qual è quello di volume massimo?

PROBLEMA1

Sia data la funzione $g(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$

Punto 1

Determinare i coefficienti a, b, c, d, e, f **in modo che la funzione sia pari, abbia un minimo relativo nell'origine e un massimo in** $x = 1$

La funzione $g(x)$ sarà pari se $g(x) = g(-x)$ e quindi se

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = -ax^5 + bx^4 - cx^3 + dx^2 - ex + f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax^5 + cx^3 + ex = -ax^5 - cx^3 - ex \Rightarrow 2ax^5 + 2cx^3 + 2ex = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ e = 0 \end{cases}$$

di conseguenza $g(x)$ diventa $g(x) = bx^4 + dx^2 + f$.

Essa passerà per l'origine se $g(0) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ per cui $g(x)$ diventa $g(x) = bx^4 + dx^2$.

La derivata prima e seconda di $g(x)$ sono rispettivamente $g'(x) = 4bx^3 + 2dx$ e $g''(x) = 12bx^2 + 2d$; essa presenterà un minimo in $x = 0$ se $\begin{cases} g'(0) = 0 \\ g''(0) > 0 \end{cases}$. La condizione $g'(0) = 0$ è implicitamente verificata, mentre $g''(0) > 0$ comporta $d > 0$.

La presenza del massimo in $x = 1$ è garantita se $\begin{cases} g'(1) = 0 \\ g''(1) < 0 \end{cases}$ e quindi se $\begin{cases} 4b + 2d = 0 \\ 12b + 2d < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -2b \\ 12b - 4b < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -2b \\ b < 0 \end{cases}$. Notiamo che la condizione $d > 0$ è implicitamente verificata da $b < 0$ in quanto $d = -2b$.

Tenendo conto dei risultati ottenuti, la forma analitica della famiglia di funzioni $g(x)$ diventa $g(x) = b(x^4 - 2x^2)$ con il vincolo $b < 0$.

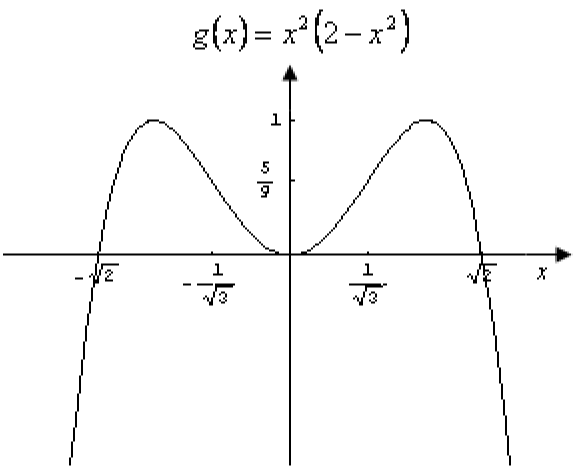
Punto 2

Posto $b=-1$ si studi la funzione ottenuta, indicando in particolare i flessi, e se ne tracci il grafico G in un sistema di riferimento cartesiano Oxy

Posto $b=-1$ studiamo la funzione $g(x)=x^2\left(2-x^2\right)$

- *Dominio*: $D_g:(-\infty,+\infty)$;
- *Intersezione asse ascisse*: $g(x)=x^2\left(2-x^2\right)=0 \Rightarrow x=-\sqrt{2} \vee x=0 \vee x=\sqrt{2}$;
- *Intersezione asse ordinate*: $x=0 \Rightarrow g(0)=0$;
- *Simmetrie*: la funzione è pari come da ipotesi;
- *Positività*: $g(x)=x^2\left(2-x^2\right)>0 \Rightarrow \left(-\sqrt{2},0\right)\cup\left(0,\sqrt{2}\right)$;
- *Asintoti verticali*: visto che il dominio è tutto R, non vi sono asintoti verticali;
- *Asintoti orizzontali*: poiché $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=-\infty$ concludiamo che non vi sono asintoti orizzontali;
- *Asintoti obliqui*: poiché $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=\mp\infty$ concludiamo che non vi sono asintoti obliqui;
- *Crescenza e decrescenza*: da ipotesi, la funzione presenta un minimo relativo in $m=(0,0)$ e un massimo relativo ed assoluto in $M_1=(1,1)$; per la parità la funzione presenterà un massimo relativo ed assoluto anche in $M_2=(-1,1)$; infatti la derivata prima $g'(x)=4\left(x-x^3\right)$ è positiva in $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ in cui la funzione è strettamente crescente e negativa in $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ in cui è strettamente decrescente;
- *Concavità e convessità*: la derivata seconda è $g''(x)=4\left(1-3x^2\right)$ per cui la funzione presenta due flessi a tangente obliqua in $F_1=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{5}{9}\right)$ e $F_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{5}{9}\right)$

Di seguito il grafico:



Punto 3

Si determini l'area della regione di piano delimitata dal grafico G e dalle rette individuate dalle ascisse dei flessi

L'area richiesta è pari a

$$S = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(2x^2 - x^4\right) dx = 2\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(2x^2 - x^4\right) dx = 2\left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= 2\left(\frac{2\sqrt{3}}{27} - \frac{\sqrt{3}}{135}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{15}$$

in cui, nel primo passaggio, si è sfruttata la parità della funzione integranda.

Punto 4

Si determini il volume del solido generato dalla rotazione completa intorno all'asse delle ascisse della parte di piano delimitata dal grafico G del primo quadrante. Come cambia il volume se la rotazione avviene attorno alla retta di equazione $y = k$ con $k < 0$?

Il volume del solido generato dalla rotazione completa intorno all'asse delle ascisse della parte di piano delimitata dal grafico G nel primo quadrante è pari

$$V=\pi\int_0^{\sqrt{2}} g^2(x)dx=\pi\int_0^{\sqrt{2}} x^4\left(2-x^2\right)^2 dx=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(x^8-4x^6+4x^4\right)dx=$$
$$=\pi\left[\frac{x^9}{9}-\frac{4x^7}{7}+\frac{4x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}}=\pi\left(\frac{16\sqrt{2}}{9}-\frac{32\sqrt{2}}{7}+\frac{16\sqrt{2}}{5}\right)=$$
$$=\pi\left(\frac{560\sqrt{2}-1440\sqrt{2}+1008\sqrt{2}}{315}\right)=\frac{128\sqrt{2}}{315}\pi$$

Il solido generato dalla rotazione completa intorno alla retta $y=k$ con $k<0$ della parte di piano delimitata dal grafico G nel primo quadrante può essere visto come insieme delle sue sezioni con piani perpendicolari all'asse *x*; tali sezioni sono corone circolari di raggio esterno $R_{est}(x,k)=g(x)+|k|$ e raggio interno $R_{\text{int}}(k)=|k|$. Pertanto il volume richiesto è pari a

$$V(k)=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left[R_{est}^2(x,k)-R_{\text{int}}^2(k)\right]dx=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left\{\left[x^2\left(2-x^2\right)+|k|\right]^2-k^2\right\}dx=$$
$$=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left[\left(-x^4+2x^2+|k|\right)^2-k^2\right]dx=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(x^8+4x^4+k^2-4x^6-2x^4|k|+4|k|x^2-k^2\right)dx=$$
$$=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left[x^8-4x^6+2x^4\left(-|k|+2\right)+4|k|x^2\right]dx=\pi\left[\frac{x^9}{9}-\frac{4x^7}{7}+\frac{2x^5\left(-|k|+2\right)}{5}+\frac{4|k|x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}}=$$
$$=\pi\left[\frac{16\sqrt{2}}{9}-\frac{32\sqrt{2}}{7}+\frac{8\sqrt{2}\left(-|k|+2\right)}{5}+\frac{8\sqrt{2}|k|}{3}\right]=$$
$$=\pi\left[\left(\frac{16\sqrt{2}}{9}-\frac{32\sqrt{2}}{7}+\frac{16\sqrt{2}}{5}\right)+|k|\left(-\frac{8\sqrt{2}}{5}+\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)\right]=\pi\left(\frac{128\sqrt{2}}{315}+\frac{16\sqrt{2}}{15}|k|\right)$$

Notiamo che se $k\to 0$ il volume tende al valore precedentemente calcolato $\lim_{k\to 0} V(k)=\frac{128\sqrt{2}}{315}\pi$

PROBLEMA2

Sia data la funzione $f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\cdot e^{-x}$

Punto 1

Si determinino i coefficienti a,b,c **di modo che**

$$\int_0^1 f(x)dx = 4-2e^{-1}, \qquad \int_1^2 f(x)dx = 2e^{-1}-e^{-2}, \qquad \int_2^{+\infty} f(x)dx = e^{-2}$$

Calcoliamo innanzitutto l'integrale indefinito $\int\left(ax^2+bx+c\right)\cdot e^{-x}dx$ utilizzando l'integrazione per parti. Si ha:

$$\begin{aligned}
&\int\left(ax^2+bx+c\right)\cdot e^{-x}dx = -\left(ax^2+bx+c\right)\cdot e^{-x}+\int(2ax+b)\cdot e^{-x}dx = \\
&= -\left(ax^2+bx+c\right)\cdot e^{-x}-(2ax+b)\cdot e^{-x}+\int 2a\cdot e^{-x}dx = \\
&= -\left(ax^2+bx+c\right)\cdot e^{-x}-(2ax+b)\cdot e^{-x}-2a\cdot e^{-x} = \\
&= -\left[ax^2+(2a+b)x+(2a+b+c)\right]\cdot e^{-x}+\text{costante}
\end{aligned}$$

Ora calcoliamo i tre integrali definiti $\int_0^1 f(x)dx, \int_1^2 f(x)dx, \int_2^{+\infty} f(x)dx$. Si ha:

$$\int_0^1 f(x)dx = \left\{-\left[ax^2+(2a+b)x+(2a+b+c)\right]\cdot e^{-x}\right\}_0^1 = -(5a+2b+c)e^{-1}+(2a+b+c)$$

$$\int_1^2 f(x)dx = \left\{-\left[ax^2+(2a+b)x+(2a+b+c)\right]\cdot e^{-x}\right\}_1^2 = -(10a+3b+c)e^{-2}+(5a+2b+c)e^{-1}$$

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \left\{-\left[ax^2+(2a+b)x+(2a+b+c)\right]\cdot e^{-x}\right\}_2^{+\infty} = (10a+3b+c)e^{-2}$$

Imponendo $\int_0^1 f(x)dx = 4-2e^{-1}, \int_1^2 f(x)dx = 2e^{-1}-e^{-2}, \int_2^{+\infty} f(x)dx = e^{-2}$ si ha:

$$\begin{cases}
-(5a+2b+c)e^{-1}+(2a+b+c)=4-2e^{-1} \\
-(10a+3b+c)e^{-2}+(5a+2b+c)e^{-1}=2e^{-1}-e^{-2} \\
(10a+3b+c)e^{-2}=e^{-2}
\end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} (2a+b+c)=4 \\ (5a+2b+c)=2 \\ (10a+3b+c)=1 \end{cases}$$

Sottraendo la prima alla seconda ed alla terza il sistema diventa

$$\begin{cases} (2a+b+c)=4 \\ (3a+b)=-2 \\ (8a+2b)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2a+b+c)=4 \\ b=-2-3a \\ 8a+2(-2-3a)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=4-2a-b \\ b=-2-3a \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{7}{2} \\ c=\frac{13}{2} \end{cases}$$

Di conseguenza la funzione ottenuta è $f(x)=\left(\frac{x^2-7x+13}{2}\right)\cdot e^{-x}$

Punto 2

Si studi e si disegni la funzione ottenuta al punto precedente

Studiamo la funzione $f(x)=\left(\frac{x^2-7x+13}{2}\right)\cdot e^{-x}$

- *Dominio*: $D_f:(-\infty,+\infty)$;
- *Intersezione asse ascisse*: $f(x)=\left(\frac{x^2-7x+13}{2}\right)\cdot e^{-x}=0 \Rightarrow \nexists x\in R$ in quanto sia $(x^2-7x+13)$ che e^{-x} sono sempre positivi in tutto R;
- *Intersezione asse ordinate*: $x=0\Rightarrow f(0)=\frac{13}{2}$;
- *Simmetrie*: la funzione non è né pari né dispari;
- *Positività*: $f(x)=\left(\frac{x^2-7x+13}{2}\right)\cdot e^{-x}>0\Rightarrow \forall x\in R$ in quanto sia $(x^2-7x+13)$ che e^{-x} sono sempre positivi in tutto R;
- *Asintoti verticali*: visto che il dominio è tutto R, non vi sono asintoti verticali;

- *Asintoti orizzontali*: poiché

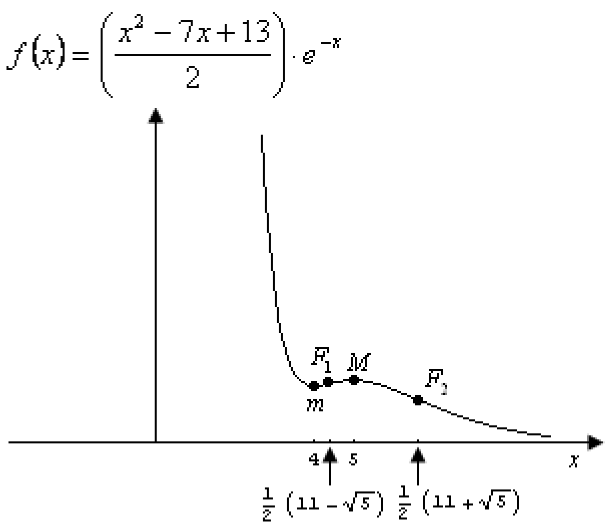
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{x^2-7x+13}{2}\right)\cdot e^{-x}\right]=+\infty\cdot+\infty=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-7x+13}{2e^x}\right)\xrightarrow[\text{del'Hospital}]{\text{Applicando 2 volte}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right)=0$$

  concludiamo che $y=0$ è asintoto orizzontale destro;

- *Asintoti obliqui*: poiché $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty, \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ concludiamo che non vi sono asintoti obliqui;
- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $f'(x)=-\left(\frac{x^2-7x+13}{2}\right)\cdot e^{-x}+\left(\frac{2x-7}{2}\right)\cdot e^{-x}=\left(\frac{-x^2+9x-20}{2}\right)\cdot e^{-x}$; di conseguenza $f'(x)=\left(\frac{-x^2+9x-20}{2}\right)\cdot e^{-x}>0\Rightarrow x^2-9x+20<0\Rightarrow 4<x<5$ per cui la funzione è strettamente crescente in $(4,5)$ e strettamente decrescente in $(-\infty,4)\cup(5,+\infty)$ e presenta un minimo relativo in $m=\left(4,\frac{e^{-4}}{2}\right)$ e un massimo relativo in $M=\left(5,\frac{3e^{-5}}{2}\right)$;
- *Concavità e convessità*: la derivata seconda è $f''(x)=-\left(\frac{-x^2+9x-20}{2}\right)\cdot e^{-x}+\left(\frac{-2x+9}{2}\right)\cdot e^{-x}=\left(\frac{x^2-11x+29}{2}\right)\cdot e^{-x}$ che si annulla per $x^2-11x+29=0\Rightarrow x=\frac{11\pm\sqrt{5}}{2}$ in cui la funzione presenta due flessi a tangente obliqua

Di seguito il grafico non in scala, così presentato per mostrare la crescenza/decrescenza e concavità/convessità della funzione. Si ricordi che tale grafico interseca l'asse delle ordinate in $\left(0,\frac{13}{2}\right)$:



Punto 3

Tramite uno dei metodi numerici studiati, si dia un'approssimazione a meno di 10^{-2} **del punto di intersezione tra la curva e la retta r di equazione** $y = 8$

Dobbiamo risolvere l'equazione $\left(\frac{x^2 - 7x + 13}{2}\right) \cdot e^{-x} = 8$ e cioè $\left(x^2 - 7x + 13\right) \cdot e^{-x} - 16 = 0$.

Poniamo $h(x) = \left(x^2 - 7x + 13\right) \cdot e^{-x} - 16$; notiamo che $\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 0} h(x) = -3$ per cui a norma del teorema degli zeri $\exists \alpha \in (-\infty, 0) \mid h(\alpha) = 0$. Tale zero è anche unico in quanto in $(-\infty, 0)$ la funzione è strettamente decrescente.

Poiché $h\left(-\frac{1}{5}\right) > 0$ per calcolare lo zero consideriamo l'intervallo $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$; ci avvaliamo del metodo di Newton-Raphson che permette di calcolare lo zero ricorsivamente tramite la formula $x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$ con punto iniziale $x_0 = -\frac{1}{5}$ in quanto $h(x_0)$ e $h''(x_0)$ sono concordi. La tabella seguente mostra tutti i passi dell'algoritmo:

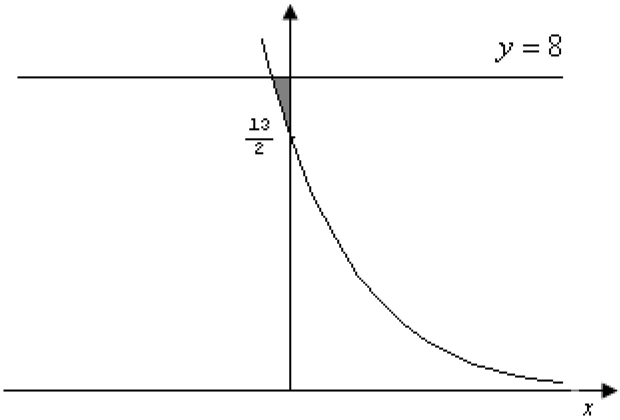
n	x_n	x_{n+1}	err=$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	err $< 10^{-2}$
0	-0,200	-0,138		
1	-0,138	-0,136	0,062	NO
2	-0,136	-0,136	0,002	SI

Dalla tabella soprastante deduciamo che lo zero appartenente all'intervallo $\left(-\frac{1}{5},0\right)$ dell'equazione $h(x)=0$ a meno di 10^{-2} è $\alpha \cong -0{,}136$.

Punto 4

Si calcoli l'area della regione di piano compresa tra la curva, l'asse delle ordinate e la retta r

L'area da calcolare è rappresentata di seguito in grigio:



L'area richiesta è pari a $S=\int_{\alpha}^{0}\left[8-\left(\frac{x^2-7x+13}{2}\right)\cdot e^{-x}\right]dx$; applicando l'integrazione per parti si ha:

$$S=-8\alpha-\int_{\alpha}^{0}\left[\left(\frac{x^2-7x+13}{2}\right)\cdot e^{-x}\right]dx=$$

$$=-8\alpha+\left[\left(\frac{x^2-7x+13}{2}\right)\cdot e^{-x}\right]_{\alpha}^{0}-\int_{\alpha}^{0}\left[\left(\frac{2x-7}{2}\right)\cdot e^{-x}\right]dx=$$

$$=-8\alpha+\left[\left(\frac{x^2-7x+13}{2}\right)\cdot e^{-x}\right]_{\alpha}^{0}+\left[\left(\frac{2x-7}{2}\right)\cdot e^{-x}\right]_{\alpha}^{0}-\int_{\alpha}^{0}e^{-x}dx=$$

$$=-8\alpha+\left[\left(\frac{x^2-7x+13}{2}\right)\cdot e^{-x}\right]_{\alpha}^{0}+\left[\left(\frac{2x-7}{2}\right)\cdot e^{-x}\right]_{\alpha}^{0}+\left[e^{-x}\right]_{\alpha}^{0}=$$

$$=-8\alpha+\left[\left(\frac{x^2-5x+8}{2}\right)\cdot e^{-x}\right]_{\alpha}^{0}=4-8\alpha-\left(\frac{\alpha^2-5\alpha+8}{2}\right)\cdot e^{-\alpha}\cong 0{,}105$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\arctan\frac{x-\pi}{x-4}\right)}$

Il dominio della funzione è dato dalla risoluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases}\arctan\frac{x-\pi}{x-4}>0\\ \log_{\frac{1}{2}}\left(\arctan\frac{x-\pi}{x-4}\right)\geq 0\end{cases}$$

La disequazione $\arctan\frac{x-\pi}{x-4}>0$ è soddisfatta se $\frac{x-\pi}{x-4}>0$ e quindi se $x\in(-\infty,\pi)\cup(4,+\infty)$.

Ricordando che il logaritmo è in base $0<a=\frac{1}{2}<1$, la disequazione $\log_{\frac{1}{2}}\left(\arctan\frac{x-\pi}{x-4}\right)\geq 0$ è soddisfatta se $0<\left(\arctan\frac{x-\pi}{x-4}\right)\leq 1$ in quanto si inverte il segno della disequazione essendo la funzione logaritmo in base $0<a<1$ strettamente decrescente; poiché la disequazione $\arctan\frac{x-\pi}{x-4}>0$ è già stata studiata, studiamo solamente la disequazione $\left(\arctan\frac{x-\pi}{x-4}\right)\leq 1$ che equivale a $\frac{x-\pi}{x-4}\leq\tan 1$ e cioè $\frac{x(\tan 1-1)-(4\tan 1-\pi)}{x-4}\geq 0$, soddisfatta per $x\in(-\infty,4)\cup\left[\frac{4\tan 1-\pi}{\tan 1-1},+\infty\right)$.

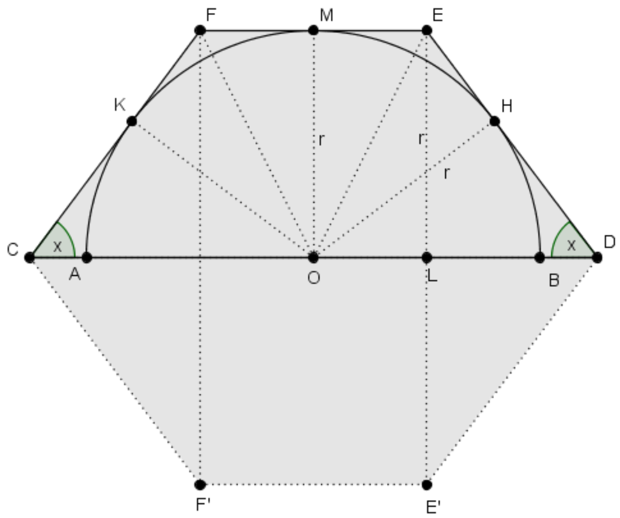
Mettendo assieme le due soluzioni in un unico sistema, il dominio della funzione è:

$$D_f: x\in(-\infty,\pi)\cup\left[\frac{4\tan 1-\pi}{\tan 1-1},+\infty\right)$$

Quesito 2

Determinare l'ampiezza di ciascun angolo alla base di un trapezio isoscele circoscritto a un semicerchio di raggio di misura r in modo che la superficie del solido generato dal trapezio in una rotazione completa intorno alla base maggiore risulti $2\pi\left(3\sqrt{2}-2\right)r^2$.

Consideriamo la figura sottostante.



Poniamo $D\hat{C}F = C\hat{D}E = x$ con $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

La superficie $S(x)$ del solido di rotazione è costituita dalla somma della superficie laterale di un cilindro di raggio r e altezza EF e delle superfici laterali di due coni congruenti di raggio di base r e apotema ED.

Applicando i teoremi sui triangoli rettangoli si ha:

$$\overline{OD} = \overline{ED} = \frac{r}{\sin x}, \overline{LD} = \overline{ED}\cos x = r\frac{\cos x}{\sin x}$$

da cui

$$\overline{EF} = 2\overline{OL} = 2\left(\overline{OD} - \overline{LD}\right) = 2r\frac{(1-\cos x)}{\sin x}.$$

La superficie laterale del cilindro di raggio r e altezza EF è

$$S_{Cilindro}(x) = 2\pi r \cdot 2r\frac{(1-\cos x)}{\sin x} = 4\pi r^2\frac{(1-\cos x)}{\sin x}$$

mentre quella del cono di raggio di base r e apotema ED è

$$S_{Cono}(x) = \pi r \cdot \frac{r}{\sin x} = \pi r^2\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

Di conseguenza

$$S(x) = S_{Cilindro}(x) + 2S_{Cono}(x) = 4\pi r^2\,\frac{(1-\cos x)}{\sin x} + 2\pi r^2\left(\frac{1}{\sin x}\right) = 2\pi r^2\,\frac{(3-2\cos x)}{\sin x}$$

Imponendo $S(x) = 2\pi r^2\,\frac{(3-2\cos x)}{\sin x} = 2\pi\left(3\sqrt{2}-2\right)r^2$, si tratta di risolvere l'equazione

$$\left(3\sqrt{2}-2\right)\sin x + 2\cos x - 3 = 0$$

Ricordando che $\sin x = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}, \cos x = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$, posto per semplicità di notazione $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, l'equazione diventa

$$\begin{aligned}
&\frac{2\left(3\sqrt{2}-2\right)t}{1+t^2} + \frac{2\left(1-t^2\right)}{1+t^2} - 3 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2\left(3\sqrt{2}-2\right)t + 2\left(1-t^2\right) - 3\left(1+t^2\right) = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 5t^2 - 2\left(3\sqrt{2}-2\right)t + 1 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow t = \frac{\left(3\sqrt{2}-2\right) \pm \sqrt{\left(3\sqrt{2}-2\right)^2 - 5}}{5} = \frac{\left(3\sqrt{2}-2\right) \pm \sqrt{17-12\sqrt{2}}}{5} = \\
&= \frac{\left(3\sqrt{2}-2\right) \pm \left(3-2\sqrt{2}\right)}{5} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}+1}{5} \\ \sqrt{2}-1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ritornando alla notazione $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ le soluzioni sono:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{5} \Rightarrow x = 2\arctan\left(\frac{\sqrt{2}+1}{5}\right) \cong 51{,}54°$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{2}-1 \Rightarrow x = 2\arctan\left(\sqrt{2}-1\right) = 2\cdot\frac{\pi}{8} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} = 45°$$

Le soluzioni sono entrambe accettabili in quanto soddisfano la condizione $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Quesito 3

Data la funzione $f(x)\begin{cases} e^{a/x} & x<0 \\ x\sin(\sqrt{x}) & x \ge 0 \end{cases}$ **, studiarne la continuità e derivabilità su R al variare del parametro a**

Negli intervalli su cui sono considerati, i due tratti di cui si compone la funzione sono continui e derivabili. Esaminiamone il comportamento in corrispondenza di $x = 0$, valutando per primo il secondo tratto perché, non dipendendo da un parametro, è quello che determina il comportamento della funzione. Per la continuità si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} x\sin(\sqrt{x}) = 0 \Rightarrow \text{deve essere anche } \lim_{x\to 0^-} e^{a/x} = 0$$

Questo succede se $\lim_{x\to 0^-} \frac{a}{x} = -\infty$ ossia se $a > 0$

Per la derivabilità (che studiamo supponendo la funzione continua, ossia per $a > 0$), si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sin(\sqrt{x}) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \sin(\sqrt{x}) = 0 \Rightarrow \text{deve essere anche } \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{a/x} - 0}{x-0} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{a/x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1/x}{e^{-a/x}} = 0 \quad \forall a>0$$

In conclusione la funzione è continua e derivabile per $a > 0$

Quesito 4

Calcolare il limite per $x \to 2$ **di** $f(x) = \frac{3-\sqrt{5+2x}}{x^2-5x+6}$ **.**

Dobbiamo calcolare $\lim_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{5+2x}}{x^2-5x+6}$

Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$ per cui moltiplicando numeratore e denominatore per $3+\sqrt{5+2x}$ si ha:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{5+2x}}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(3-\sqrt{5+2x}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5+2x}\right)}{\left(x^2-5x+6\right)\cdot\left(3+\sqrt{5+2x}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{9-(5+2x)}{(x-2)\cdot(x-3)\cdot\left(3+\sqrt{5+2x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-2)}{(x-2)\cdot(x-3)\cdot\left(3+\sqrt{5+2x}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2}{(x-3)\cdot\left(3+\sqrt{5+2x}\right)}=\frac{-2}{(2-3)\cdot\left(3+\sqrt{5+4}\right)}=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$$

Analogo risultato avremmo ottenuto applicando De L'Hospital. Infatti:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{5+2x}}{x^2-5x+6}\overset{De\text{ L'Hospital}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{-\frac{2}{2\sqrt{5+2x}}}{2x-5}=\frac{-\frac{1}{3}}{-1}=\frac{1}{3}$$

Quesito 5

Di una funzione $f(x)$ si sa che la sua derivata terza è $f'''(x)=e^x-\frac{4}{3}e^{-x}-\frac{4}{3}e^{2x}$ e che $f(0)=2,\ f'(0)=-1,\ f''(0)=1$. Si trovi $f(x)$.

Dalla derivata terza dobbiamo risalire alla funzione $f(x)$; per tale scopo dobbiamo integrare tre volte la derivata terza e poi imporre le condizioni iniziali $f(0)=2,\ f'(0)=-1,\ f''(0)=1$.

Integrando la derivata terza si ottiene la derivata seconda:

$$f''(x)=\int f'''(x)dx=\int\left(e^x-\frac{4}{3}e^{-x}-\frac{4}{3}e^{2x}\right)dx=e^x+\frac{4}{3}e^{-x}-\frac{2}{3}e^{2x}+k_1$$

Integrando la derivata seconda si ottiene la derivata prima:

$$f'(x)=\int f''(x)dx=\int\left(e^x+\frac{4}{3}e^{-x}-\frac{2}{3}e^{2x}+k_1\right)dx=e^x-\frac{4}{3}e^{-x}-\frac{1}{3}e^{2x}+k_1x+k_2$$

Integrando la derivata prima si ottiene la funzione $f(x)$:

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(e^x-\frac{4}{3}e^{-x}-\frac{1}{3}e^{2x}+k_1x+k_2\right)dx=e^x+\frac{4}{3}e^{-x}-\frac{1}{6}e^{2x}+k_1\frac{x^2}{2}+k_2x+k_3$$

Imponendo $f(0)=2,\ f'(0)=-1,\ f''(0)=1$ si ha:

$$\begin{cases}1+\frac{4}{3}-\frac{1}{6}+k_3=2\\1-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}+k_2=-1\\1+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}+k_1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=-\frac{2}{3}\\k_2=-\frac{1}{3}\\k_3=-\frac{1}{6}\end{cases}$$

La funzione richiesta è quindi pari a $f(x)=e^x+\frac{4}{3}e^{-x}-\frac{1}{6}e^{2x}-\frac{x^2}{3}-\frac{x}{3}-\frac{1}{6}$

Quesito 6

Risolvere la disequazione $\left|1-|x+1|\right|\geq 1+|x-1|$**.**

Le soluzioni sono date dall'unione delle soluzioni dei sistemi

$$(S_1)\ \begin{cases}1-|x+1|<0\\1-|x+1|\leq -1-|x-1|\end{cases},\quad (S_2)\ \begin{cases}1-|x+1|\geq 0\\1-|x+1|\geq 1+|x-1|\end{cases}$$

Consideriamo inizialmente il sistema (S_1). Si ha che:

$$\begin{cases}1-|x+1|<0\\1-|x+1|\leq -1-|x-1|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x+1|>1\\|x+1|\geq|x-1|+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<-2\vee x>0\\|x+1|\geq|x-1|+2\end{cases}$$

Ora se $x<-2$ la disequazione $|x+1|\geq|x-1|+2$ diventa

$$-x-1\geq -x+1+2\Rightarrow -1\geq 3\Rightarrow \nexists x\in R$$

Se $x>0$ la disequazione $|x+1|\geq|x-1|+2$ diventa

$$x+1\geq|x-1|+2\Rightarrow|x-1|\leq x-1\Rightarrow 1-x\leq x-1\leq x-1\Rightarrow\begin{cases}1-x\leq x-1\\x-1\leq x-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 1\\\forall x\in R\end{cases}\Rightarrow x\geq 1$$

Quindi la soluzione del sistema (S_1) è $x\geq 1$.

Consideriamo ora il sistema (S_2). Si ha che

$$\begin{cases}1-|x+1|\geq 0\\1-|x+1|\geq 1+|x-1|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x+1|\leq 1\\|x-1|\leq -|x+1|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leq x\leq 0\\\nexists x\in R\end{cases}\Rightarrow\nexists x\in R$$

Quindi il sistema (S_2) non ammette soluzioni.

Ne segue che la soluzione della disequazione è $x\geq 1$

Quesito 7

Una scatola contiene 6 palle bianche, 3 palle rosse, ed 1 palla verde. Si estraggono dalla scatola tre palle in successione, senza inserire ciascuna palla nuovamente nella scatola dopo averla estratta.

a) Calcolare la probabilità di estrarre tre palle bianche.

b) Calcolare la probabilità di estrarre tre palle bianche sapendo che la prima palla estratta è bianca.

c) Calcolare la probabilità di estrarre tre palle bianche sapendo che le prime due palle estratte sono bianche.

d) Calcolare la probabilità che nessuna delle tre palle estratte sia bianca.

a) La probabilità di estrarre tre palle bianche, senza reimmissione è pari a:

$$p = \Pr\{3 \text{ palle bianche}\} = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$$

b) La probabilità di estrarre e palle bianche sapendo che la prima è bianca, per la legge di Bayes è pari a:

$$\begin{aligned} p &= \Pr\{3 \text{ palle bianche} \mid \text{prima palla bianca}\} = \\ &= \frac{\Pr\{3 \text{ palle bianche, prima palla bianca}\}}{\Pr\{\text{prima palla bianca}\}} = \\ &= \frac{\Pr\{3 \text{ palle bianche}\}}{\Pr\{\text{prima palla bianca}\}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{6}{10}} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \end{aligned}$$

c) La probabilità di estrarre e palle bianche sapendo che la prima è bianca, per la legge di Bayes è pari a:

$$\begin{aligned} p &= \Pr\{3 \text{ palle bianche} \mid \text{prime due palle bianche}\} = \\ &= \frac{\Pr\{3 \text{ palle bianche, prime due palle bianche}\}}{\Pr\{\text{prime due palle bianche}\}} = \\ &= \frac{\Pr\{3 \text{ palle bianche}\}}{\Pr\{\text{prime due palle bianche}\}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9}} = \frac{90}{180} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d) La probabilità di non estrarre nessuna palla bianca è pari a:

$$p = \Pr\{\text{nessuna palla bianca}\} = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}$$

Quesito 8

Calcolare il valore medio della funzione $f(x)=\ln^3(x)$ **in** $\left[e,e^2\right]$

Il valore medio è pari a $V_M = \frac{1}{e^2-e}\int_e^{e^2}\ln^3(x)dx$. Applicando l'integrazione per parti si ha:

$$\begin{aligned}
&\int \ln^3(x)dx = x\ln^3(x)-3\int \ln^2(x)dx = \\
&= x\ln^3(x)-3x\ln^2(x)+6\int \ln(x)dx = \\
&= x\ln^3(x)-3x\ln^2(x)+6x\ln(x)-6\int dx = \\
&= x\left[\ln^3(x)-3\ln^2(x)+6\ln(x)-6\right]
\end{aligned}$$

Il valore medio è quindi:

$$\begin{aligned}
V_M &= \frac{1}{e^2-e}\int_e^{e^2}\ln^3(x)dx = \frac{1}{e^2-e}\left\{x\left[\ln^3(x)-3\ln^2(x)+6\ln(x)-6\right]\right\}_e^{e^2} = \\
&= \frac{1}{e^2-e}\left[e^2(8-12+12-6)-e(1-3+6-6)\right] = \frac{2e^2+2e}{e^2-e} = \frac{2(e+1)}{(e-1)}
\end{aligned}$$

Quesito 9

Sia $n\in \mathrm{N}$ **. Risolvere la seguente equazione:** $\binom{n}{4}-\binom{n}{3}=n^3-3n^2+2n$**.**

Per aver senso l'equazione devono aver senso i coefficienti binomiali coinvolti e cioè se $\begin{cases} n\geq 4 \\ n\geq 3\end{cases} \Rightarrow n\in \mathrm{N} \mid n\geq 4$.

Ricordando la definizione di binomiale, l'equazione si può scrivere in questo modo:

$$\frac{n!}{(n-4)!\cdot 4!}-\frac{n!}{(n-3)!\cdot 3!}=n^3-3n^2+2n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{24}-\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}=n(n-1)(n-2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)-4n\cdot(n-1)\cdot(n-2)=24n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)-28n\cdot(n-1)\cdot(n-2)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-31)=0\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}n=0\\n=1\\n=2\\n=31\end{array}\right.$$

La soluzione accettabile che soddisfa la condizione $n\in\mathrm{N}\,|\,n\geq 4$ è $n=31$.

Quesito 10

Tra tutti i parallelepipedi rettangoli di altezza h e di superficie totale costante S , qual è quello di volume massimo?

Poste x,y le dimensioni della base e dato che l'altezza per ipotesi è h , la superficie laterale è $S_L=2(x+y)\cdot h$. La superficie totale sarà $S_T=2A_{Base}+S_L=2xy+2(x+y)\cdot h$; ponendo $S_T=S$ ricaviamo $y=\frac{S-2hx}{2(h+x)}$ da cui l'area di base $A_{Base}=xy=\frac{Sx-2hx^2}{2(h+x)}$.

Studiamo innanzitutto i limiti geometrici imposti dal problema.

Il limite inferiore è dato da $x=0$, cioè quando il volume è nullo, mentre il limite superiore lo ricaviamo dalla formula $y=\frac{S-2hx}{2(h+x)}$ ponendo $y=0$, e cioè $x=\frac{S}{2h}$. In conclusione il limite geometrico cui deve essere vincolata la dimensione x del rettangolo di base è $0<x<\frac{S}{2h}$.

Poiché il volume è il prodotto dell'area di base per l'altezza, e quest'ultima è costante, la massimizzazione del volume equivale alla massimizzazione dell'area di base. Massimizziamo la funzione area di base $f(x)=\frac{Sx-2hx^2}{2(h+x)}$ attraverso il calcolo della derivata prima:

$$f'(x)=\frac{(S-4hx)\cdot 2(h+x)-2\cdot Sx-2hx^2}{2(h+x)}=\frac{h}{2}\left[\frac{-2x^2-4hx+S}{(h+x)^2}\right]$$

Studiamo il segno della derivata prima tenendo conto solo del numeratore in quanto il denominatore è sempre positivo e della limitazione $0 < x < \frac{S}{2h}$:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2S+4h^2}}{2} - h$$
$$f'(x) > 0 \Rightarrow 0 < x < \left(\frac{\sqrt{2S+4h^2}}{2} - h\right)$$
$$f'(x) < 0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2S+4h^2}}{2} - h\right) < x < \frac{S}{2h}$$

Dal segno della derivata prima deduciamo che l'area di base, è massima per

$$x = \left(\frac{\sqrt{2S+4h^2}}{2} - h\right)$$

cui corrisponde

$$y = \frac{S - 2h\cdot\left(\frac{\sqrt{2S+4h^2}}{2} - h\right)}{2\left[h + \left(\frac{\sqrt{2S+4h^2}}{2} - h\right)\right]} = \frac{S + 2h^2 - h\sqrt{2S+4h^2}}{\sqrt{2S+4h^2}} = \left(\frac{\sqrt{2S+4h^2}}{2} - h\right).$$

Notiamo che il parallelepipedo di volume massimo lo si ha quando la base è un quadrato di lato $L = \left(\frac{\sqrt{2S+4h^2}}{2} - h\right)$; tale parallelepipedo a base quadrata diventa un cubo se $x = y = h$ e quindi se $\frac{\sqrt{2S+4h^2}}{2} - h = h \Rightarrow \sqrt{2S+4h^2} = 4h$ da cui, elevando al quadrato ambo i membri, se $2S + 4h^2 = 16h^2 \Rightarrow S = 6h^2$.

In conclusione il parallelepipedo, di altezza h e superficie totale S, ha volume massimo quando la base è un quadrato di lato $L = \left(\frac{\sqrt{2S+4h^2}}{2} - h\right)$ e, se si impone nella traccia che la superficie totale sia pari a $S = 6h^2$, il parallelepipedo di volume massimo è un cubo di spigolo $L = h$.