

**Esame di stato di istruzione secondaria superiore**  
**Indirizzi: Scientifico comunicazione opzione sportiva**  
**Tema di matematica**

*Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario*

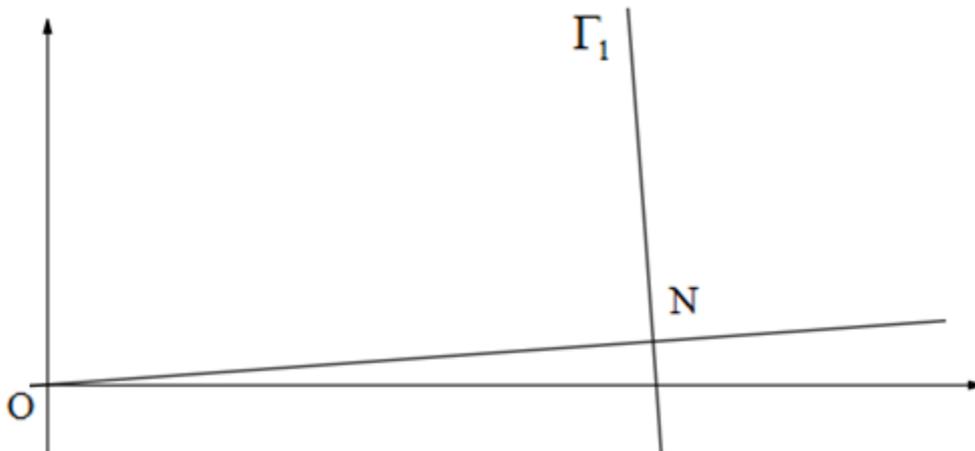
**PROBLEMA 1**

Consideriamo la funzione  $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  così definita:

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9$$

con  $k \in \mathbb{Z}$ .

1. Detto  $\Gamma_k$  il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro  $k$  la retta  $r_k$ , tangente a  $\Gamma_k$  nel punto di ascissa 0 e la retta  $s_k$ , tangente a  $\Gamma_k$  nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto  $M$  di ascissa  $\frac{2}{3}$ ;
2. Dopo aver verificato che  $k = 1$  è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto  $M$  è minore di 10, studia l'andamento della funzione  $f_1(x)$ , determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.
3. Detto  $T$  il triangolo delimitato dalle rette  $r_1$ ,  $s_1$  e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto  $P(x_P, y_P)$  all'interno di  $T$ , questo si trovi al di sopra di  $\Gamma_1$  (cioè che si abbia  $y_P > f_1(x)$  per tale punto  $P$ ).
4. Nella figura è evidenziato un punto  $N \in \Gamma_1$  e un tratto del grafico  $\Gamma_1$ . La retta normale a  $\Gamma_1$  in  $N$  (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a  $\Gamma_1$  in quel punto) passa per l'origine degli assi  $O$ . Il grafico  $\Gamma_1$  possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado  $n > 0$  non può possedere più di  $2n - 1$  punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.



## SVOLGIMENTO

### Punto 1

Il punto ad ascissa 0 è (0,9) mentre il punto ad ascissa 1 è (1,k+8).

La retta  $r_k$  ha equazione  $y = f'_k(0)x + 9$  dove  $f'_k(0) = [-3x^2 + k]_{x=0} = k$  pertanto la retta  $r_k$  ha equazione  $y = kx + 9$ .

La retta  $s_k$  ha equazione  $y = f'_k(1)(x - 1) + k + 8$  dove  $f'_k(1) = [-3x^2 + k]_{x=1} = k - 3$  pertanto la retta  $s_k$  ha equazione  $y = (k - 3)(x - 1) + k + 8$ .

Tali rette si intersecano in un punto che soddisfa la seguente equazione:

$$kx + 9 = (k - 3)(x - 1) + k + 8 \rightarrow kx + 9 = kx - k - 3x + 3 + k + 8 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Il punto M ha coordinate  $M = \left(\frac{2}{3}, \frac{2k}{3} + 9\right)$

### Punto 2

L'ordinata del punto M è:

$$f_k\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}k + \frac{235}{27}$$

Si ha:

$$f_k\left(\frac{2}{3}\right) < 10 \rightarrow \frac{2}{3}k + \frac{235}{27} < 10 \rightarrow \frac{2}{3}k < \frac{35}{27} \rightarrow k < \frac{35}{18} \cong 1.94$$

di conseguenza  $k=1$  è il massimo intero positivo affinché l'ordinata del punto M sia minore di 10.

Studiamo la funzione  $f_1(x) = -x^3 + x + 9$ .

- **Dominio:** R
- **Intersezioni asse ascisse:** trattandosi di una cubica, possiamo applicare il metodo di Cardano per individuare le soluzioni dell'equazione  $f_1(x) = -x^3 + x + 9 = 0$ ; tale metodo dice che, in presenza di una equazione di terzo grado del tipo  $x^3 + px + q = 0$  la soluzione è

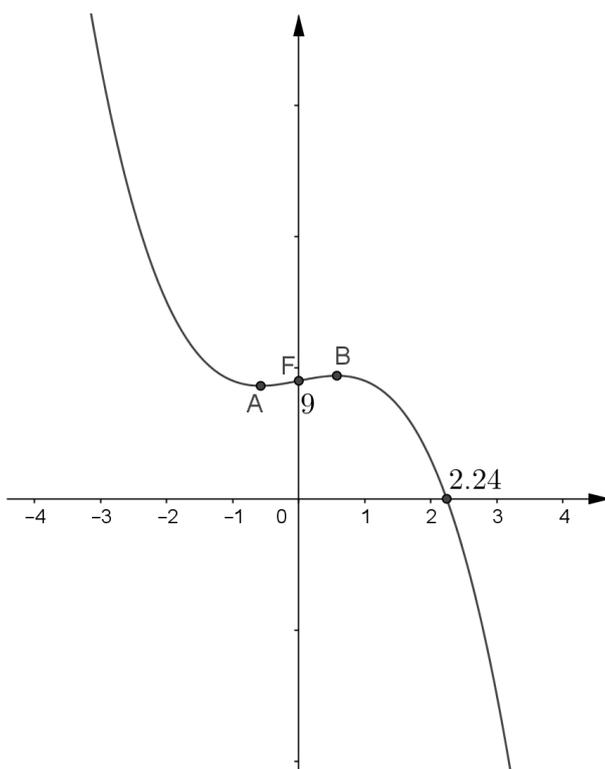
$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Nel caso in esame  $f_1(x) = -x^3 + x + 9 = 0 \Rightarrow x^3 - x - 9 = 0$  pertanto i parametri  $p$  e  $q$  sono  $p = -1, q = -9$  da cui si ricava

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{1}{27}}} \cong 2.24$$

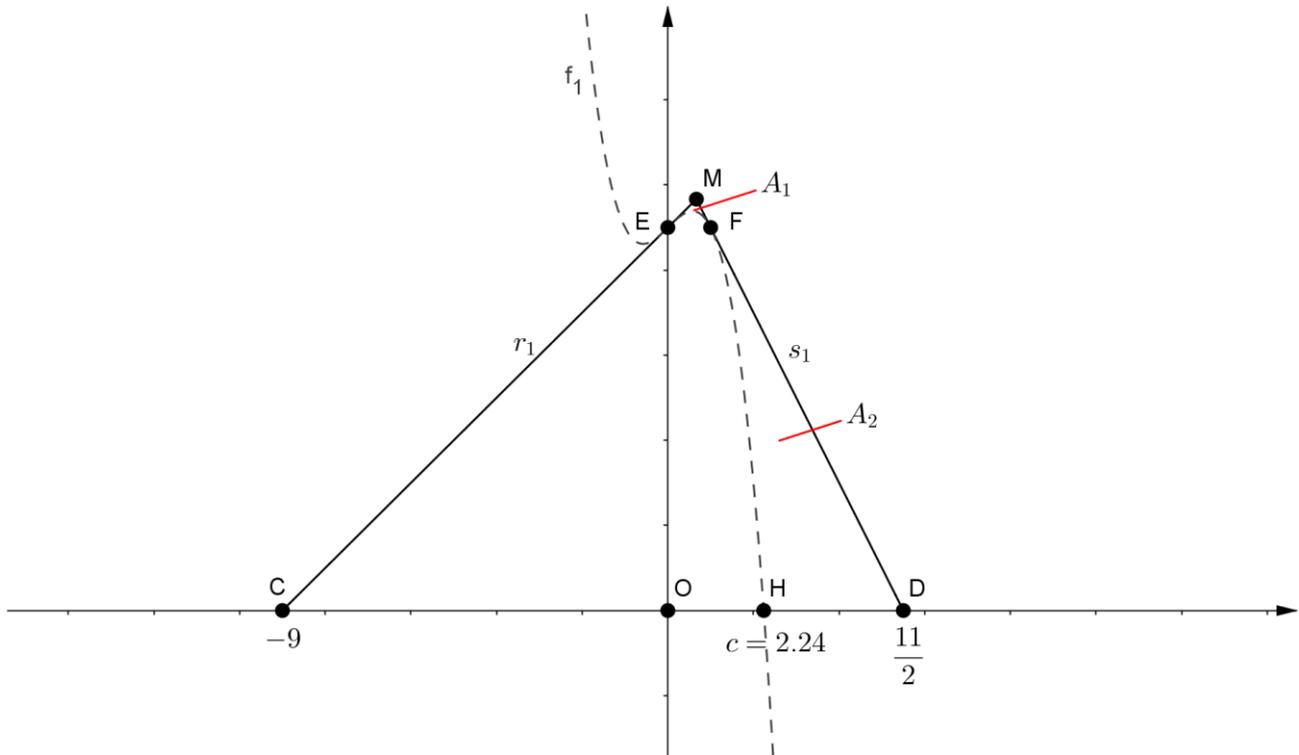
- **Intersezioni asse ordinate:**  $x = 0 \rightarrow y = 9$ ;
- **Simmetria:** non è nè pari nè dispari;
- **Asintoti verticali:** non ve ne sono;
- **Asintoti orizzontali:** non ve ne sono in quanto  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_1(x) = \mp\infty$ ;
- **Asintoti verticali:** non ve ne sono;
- **Crescenza e decrescenza:** la derivata prima è  $f_1'(x) = -3x^2 + 1$  pertanto la funzione è strettamente crescente nell'intervallo  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$  e strettamente decrescente in  $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ ;
- **Concavità e convessità:** la derivata seconda è  $f_1''(x) = -6x$  pertanto la funzione volge concavità verso l'alto nell'intervallo  $(0, +\infty)$  e verso il basso in  $(-\infty, 0)$  di conseguenza il punto  $F=(0,9)$  è un flesso a tangente obliqua; inoltre essendo  $f_1''(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 2\sqrt{3}$  e  $f_1''(\frac{\sqrt{3}}{3}) = -2\sqrt{3}$  si deduce che  $A = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, 9 - \frac{2\sqrt{3}}{9})$  è un punto di minimo relativo e  $B = (\frac{\sqrt{3}}{3}, 9 + \frac{2\sqrt{3}}{9})$  è un punto di massimo relativo.
- **Positività:** visto che la funzione è strettamente decrescente  $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$  e che l'ascissa di minimo è positiva, deduciamo che la funzione è positiva nell'intervallo  $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ ; analogamente visto che la funzione è strettamente crescente in  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$  deduciamo che è positiva anche in  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ ; inoltre visto che la funzione è strettamente decrescente in  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$  e che  $f(2.24) = 0$  deduciamo che la funzione è negativa per  $x > 2.24$  e positiva di conseguenza in  $(-\infty, 2.24)$ .

Di seguito il grafico.



**Punto 3**

Consideriamo la figura seguente in cui sono rappresentate nello stesso riferimento cartesiano le rette  $r_1: y = x + 9$ ,  $s_1: y = -2x + 11$  e la cubica  $f_1(x) = -x^3 + x + 9$ .



La condizione  $y_p > f_1(x)$  è soddisfatta dai punti che appartengono alle seguenti 2 regioni di piano:

- $A_1$ : triangolo mistilineo MEF
- $A_2$ : triangolo mistilineo HFD

Per calcolare la somma di tali 2 aree conviene calcolare l'area del triangolo MCD e sottrarre l'area del triangolo EOC e l'area sottesa da  $f_1(x)$  con l'asse delle ascisse.

L'area del triangolo MCD è pari a:

$$S(MCD) = \frac{\overline{CD} \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{29}{2}\right) \cdot \left(\frac{29}{3}\right) = \frac{841}{12}$$

L'area del triangolo EOC è pari a:

$$S(EOC) = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{EO}}{2} = \frac{1}{2} \cdot (9) \cdot (9) = \frac{81}{2}$$

Detta  $c$  l'ascissa di intersezione di  $f_1(x)$  con l'asse delle ascisse, l'area sottesa da  $f_1(x)$  con l'asse delle ascisse è pari a:

$$\int_0^c f_1(x) dx = \int_0^c (-x^3 + x + 9) dx = -\frac{c^4}{4} + \frac{c^2}{2} + 9c$$

Il valore di  $c$  calcolato con il metodo di Cardano è  $c = 2.24$  di conseguenza

$$\int_0^c f_1(x) dx = -\frac{c^4}{4} + \frac{c^2}{2} + 9c \cong 16.38$$

La probabilità richiesta è quindi pari a:

$$p = \frac{\frac{841}{12} - \frac{81}{2} - 16.38}{\frac{841}{12}} \cong 0.189 = 18.9\%$$

#### Punto 4

Sia  $P_n(x)$  un polinomio di grado  $n$ .

La normale a tale polinomio in un punto  $(x_0, y_0)$  ha equazione:

$$y = -\frac{1}{P'_n(x_0)}(x - x_0) + P_n(x_0)$$

Tale retta passa per l'origine se

$$-\frac{1}{P'_n(x_0)}(0 - x_0) + P_n(x_0) = 0 \rightarrow P'_n(x_0) \cdot P_n(x_0) + x_0 = 0$$

Se  $P_n(x)$  ha grado  $n$ , la sua derivata prima ha grado  $(n - 1)$  pertanto  $P'_n(x_0) \cdot P_n(x_0)$  ha grado  $(2n - 1)$  e di conseguenza, per il teorema fondamentale dell'Algebra, l'equazione

$$P'_n(x_0) \cdot P_n(x_0) + x_0 = 0$$

ha al più  $(2n - 1)$  radici e quindi non esistono più di  $(2n - 1)$  punti in cui la normale passa per l'origine.

**PROBLEMA 2**

Siano  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  e  $g: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  rispettivamente le funzioni *parte intera* e *parte frazionaria* (o *mantissa*) di un numero  $x \in \mathfrak{R}$ . Tali funzioni sono così definite:

$$f(x) = \max\{m \in \mathbb{Z} | m \leq x\} \text{ e } g(x) = x - f(x)$$

Pertanto, ad esempio,  $f(\pi) = 3, g(4,79) = 0,79$ .

1. A partire dalle definizioni delle funzioni  $f$  e  $g$ , mostra che per ogni  $x \in \mathfrak{R}$  si ha  $0 \leq g(x) < 1$ . Disegna i grafici delle funzioni  $f$  e  $g$  determinando esplicitamente i loro punti di discontinuità e, eventualmente, i relativi salti.
2. Dopo aver verificato che la funzione  $g$  è periodica di periodo 1, calcola la media di  $g$  nell'intervallo  $[0, n]$  qualsiasi sia  $n \in \mathbb{N}, n > 0$ . Calcola inoltre la media di  $g$  nell'intervallo  $\left[0, n + \frac{1}{2}\right]$ , e determina il limite a cui tale media tende per  $n \rightarrow \infty$ .
3. Calcola il volume del solido ottenuto dalla rotazione di  $\frac{\pi}{6}$  radianti intorno all'asse  $x$  della regione di piano delimitata dai grafici di  $f$  e  $g$  nell'intervallo  $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ .
4. Stabilisci per quali valori dei parametri reali  $a, b, c, d$  la funzione  $h: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  definita dalla legge:

$$h(x) = a + b \cdot \sin(cx + d)$$

verifica le seguenti condizioni<sup>1</sup>

$$\min g = \min h, \sup g = \max h, 2h'' + 2h - 1 = 0$$

Quante sono le funzioni siffatte?

<sup>1</sup>  $\min g$  = minimo della funzione  $g$ ,

$\sup g$  = estremo superiore della funzione  $g$ ,

$\max h$  = massimo della funzione  $h$

## SVOLGIMENTO

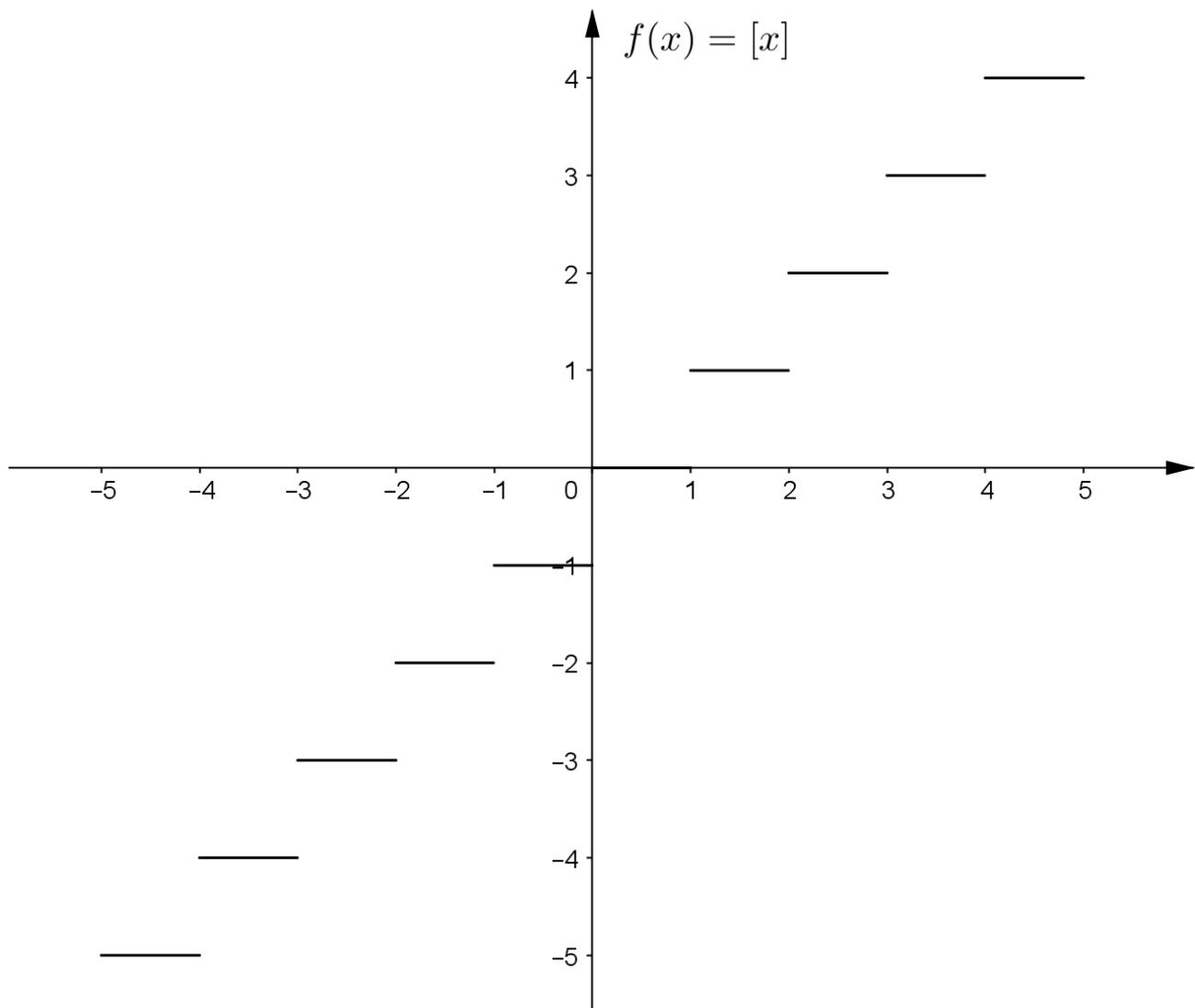
### Punto 1

Per ogni  $x$ , essendo  $f(x) = \max\{m \in \mathbb{Z} | m \leq x\}$ , si ha che:

$$x - 1 < f(x) \leq x \rightarrow -1 < f(x) - x \leq 0 \rightarrow 0 \leq x - f(x) < 1$$

ovvero  $0 \leq g(x) < 1$ .

Di seguito il grafico della funzione  $y = [x]$  ovvero la parte intera di  $x$ .

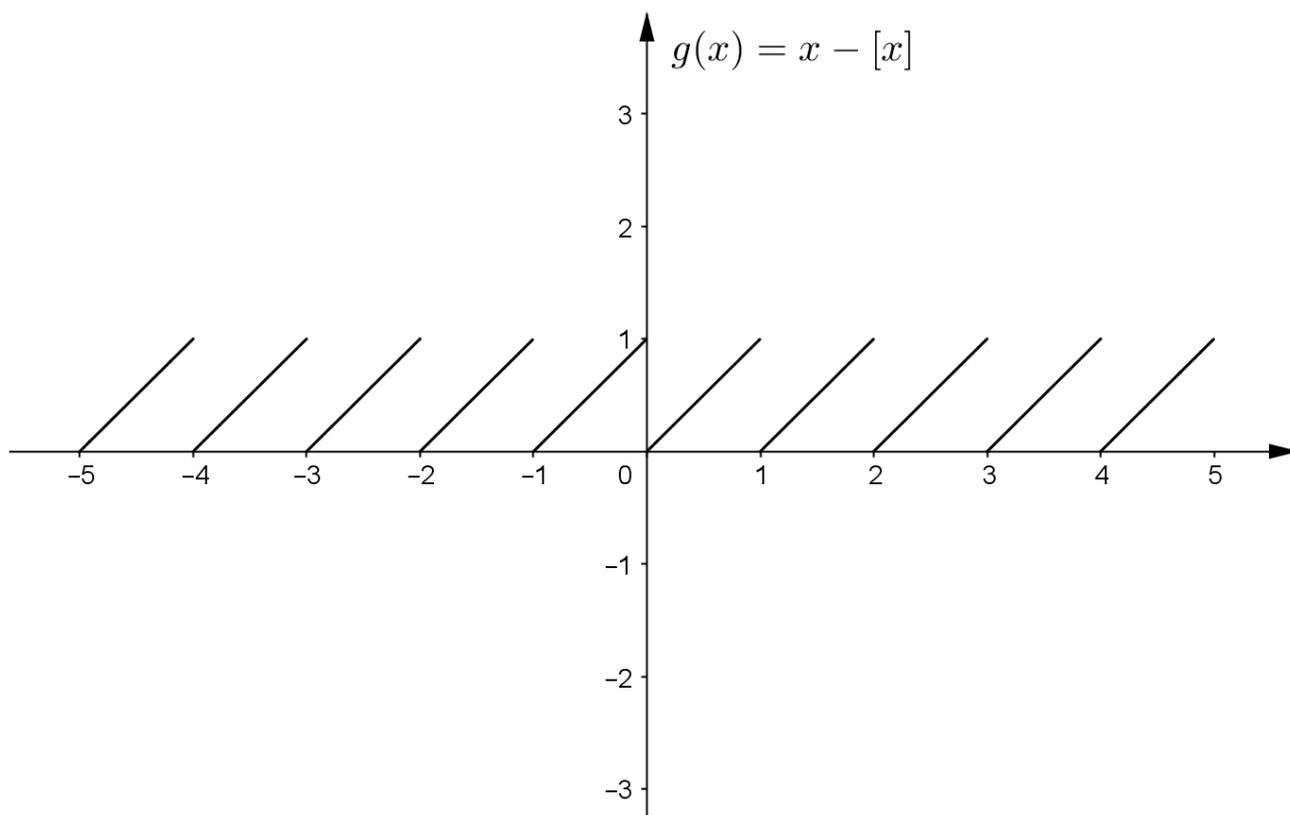


I punti di discontinuità di  $f(x)$  sono infiniti, di prima specie e situati alle ascisse  $x = k, k \in \mathbb{Z}$ .

Il salto è pari a:

$$f(x_k^+) - f(x_k^-) = k - (k - 1) = 1$$

Di seguito il grafico della funzione parte frazionaria di  $x$ :



I punti di discontinuità di  $g(x)$  sono infiniti, di prima specie e situati alle ascisse  $x = k, k \in \mathbb{Z}$ .  
Il salto è pari a:

$$g(x_k^+) - g(x_k^-) = 0 - 1 = -1$$

### Punto 2

Come si nota dal grafico,  $g(x)$  è periodica di periodo 1.

La media di  $g(x)$  nell'intervallo  $[0, n]$  qualsiasi sia  $n \in \mathbb{N}, n > 0$  è pari a:

$$M(g) = \frac{1}{n} \int_0^n g(x) dx = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Alternativamente basta notare che nell'intervallo  $[0, n]$  ci sono  $n$  triangoli rettangoli isoscele di area  $\frac{1}{2}$  pertanto la media in  $[0, n]$  coincide con l'area di ogni triangolo.

La media di  $g(x)$  nell'intervallo  $[0, n + \frac{1}{2}]$  qualsiasi sia  $n \in \mathbb{N}, n > 0$  è pari a:

$$\begin{aligned} M(g) &= \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_n^{n+\frac{1}{2}} g(x) dx = \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left[ \int_0^n g(x) dx + \int_n^{n+\frac{1}{2}} g(x) dx \right] = \\ &= \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left[ n \cdot \int_0^1 g(x) dx + \int_n^{n+\frac{1}{2}} (x - n) dx \right] = \\ &= \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left\{ \frac{n}{2} + \left[ \frac{(x - n)^2}{2} \right]_n^{n+\frac{1}{2}} \right\} = \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{8} \right) = \frac{4n + 1}{4(2n + 1)} \end{aligned}$$

Il limite per  $n \rightarrow \infty$  è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 1}{4(2n + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 1}{8n + 4} = \frac{1}{2}$$

**Punto 3**

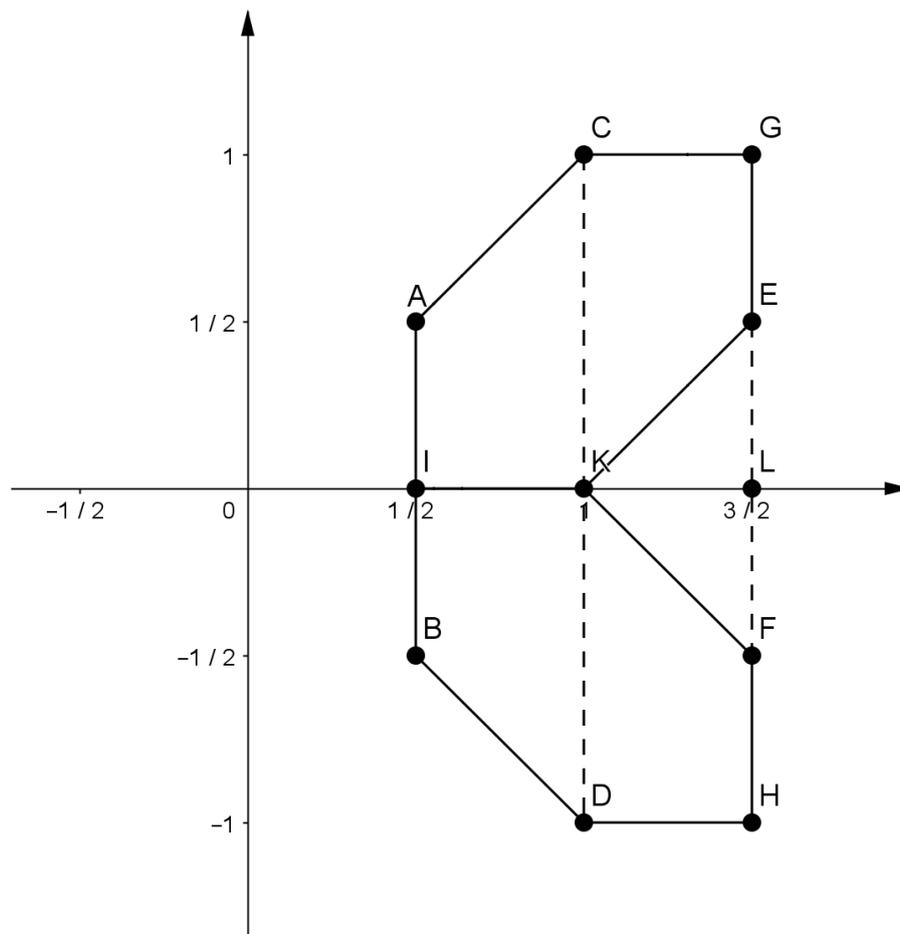
Sia  $V_{2\pi}$  il volume ottenuto dalla rotazione completa intorno all'asse delle ascisse della regione di piano tra  $f$  e  $g$  nell'intervallo  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  e  $V_\alpha$  il volume ottenuto dalla rotazione di un angolo  $\alpha$ . Vale la proporzione seguente:

$$V_{2\pi} : 2\pi = V_\alpha : \alpha$$

da cui si deduce

$$V_{\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi} V_{2\pi} = \frac{1}{12} V_{2\pi}$$

Consideriamo la figura seguente che rappresenta, in sezione, la rotazione di un giro intero attorno all'asse delle ascisse della regione di piano tra  $f$  e  $g$  nell'intervallo  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ .



Il volume  $V_{2\pi}$  è dato da:

$$V_{2\pi} = V_{\text{TRONCO DI CONO}}(ABDC) + V_{\text{CILINDRO}}(CDHG) - V_{\text{CONO}}(EKF)$$

Si ha:

$$V_{\text{TRONCO DI CONO}}(ABDC) = \frac{\pi}{3} \cdot \overline{IK} \cdot (\overline{CK}^2 + \overline{AI}^2 + \overline{CK} \cdot \overline{AI}) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7\pi}{24}$$

$$V_{\text{CILINDRO}}(CDHG) = \pi \cdot \overline{KL} \cdot \overline{CK}^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$V_{\text{CONO}}(EKF) = \frac{\pi}{3} \cdot \overline{KL} \cdot \overline{EL}^2 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{24}$$

di conseguenza

$$V_{2\pi} = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24} = \frac{3\pi}{4}$$

$$V_{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{12} V_{2\pi} = \frac{\pi}{16}$$

Alternativamente, notando che la retta AC ha equazione  $y = x$  e la retta EK ha equazione  $y = x - 1$  il volume  $V_{2\pi}$  è pari a:

$$\begin{aligned} V_{2\pi} &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (x^2 - 0^2) dx + \pi \int_1^{\frac{3}{2}} [1^2 - (x-1)^2] dx = \\ &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx + \pi \int_1^{\frac{3}{2}} (2x - x^2) dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \pi \left[ x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^{\frac{3}{2}} = \\ &= \pi \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{24} \right) + \pi \left[ \left( \frac{9}{4} - \frac{27}{24} \right) - \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{7}{24} \pi + \frac{11}{24} \pi = \frac{3}{4} \pi \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$V_{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{12} V_{2\pi} = \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{4} \pi = \frac{\pi}{16}$$

#### Punto 4

Come si evince dal grafico di  $g(x)$  si ha:

$$\min(g) = 0, \sup(g) = 1$$

La funzione  $h(x) = a + b \cdot \sin(cx + d)$  è massima se  $\sin(cx + d) = 1$  pertanto

$$\max(h) = a + |b|$$

La funzione  $h(x) = a + b \cdot \sin(cx + d)$  è minima se  $\sin(cx + d) = -1$  pertanto

$$\min(h) = a - |b|$$

Quindi imponendo le due condizioni seguenti si ha:

$$\begin{cases} \min(g) = \min(h) \\ \sup(g) = \max(h) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - |b| = 0 \\ a + |b| = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi le funzione  $h(x)$  sono:

$$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(cx + d)$$

$$h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin(cx + d)$$

Consideriamo ora  $h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(cx + d)$ .

Calcoliamo ora la derivata seconda di  $h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(cx + d)$ , si ha:

$$h''(x) = -\frac{c^2}{2} \cdot \sin(cx + d)$$

Imponendo la condizione  $2h'' + 2h - 1 = 0$  si ricava:

$$-c^2 \cdot \sin(cx + d) + 1 + \sin(cx + d) - 1 = 0 \rightarrow \sin(cx + d) \cdot (1 - c^2) = 0 \rightarrow c = \pm 1$$

Quindi le funzioni che soddisfano le condizioni indicate sono infinite, periodiche di  $2\pi$  e del tipo

$$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(\pm x + d), d \in \mathbb{R}$$

Consideriamo ora  $h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin(cx + d)$ .

Calcoliamo ora la derivata seconda di  $h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin(cx + d)$ , si ha:

$$h''(x) = +\frac{c^2}{2} \cdot \sin(cx + d)$$

Imponendo la condizione  $2h'' + 2h - 1 = 0$  si ricava:

$$c^2 \cdot \sin(cx + d) + 1 - \sin(cx + d) - 1 = 0 \rightarrow \sin(cx + d) \cdot (c^2 - 1) = 0 \rightarrow c = \pm 1$$

Quindi le funzioni che soddisfano le condizioni indicate sono infinite, periodiche di  $2\pi$  e del tipo

$$h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin(\pm x + d), d \in \mathbb{R}$$

In conclusione le funzioni richieste sono infinite, periodiche di  $2\pi$  e del tipo

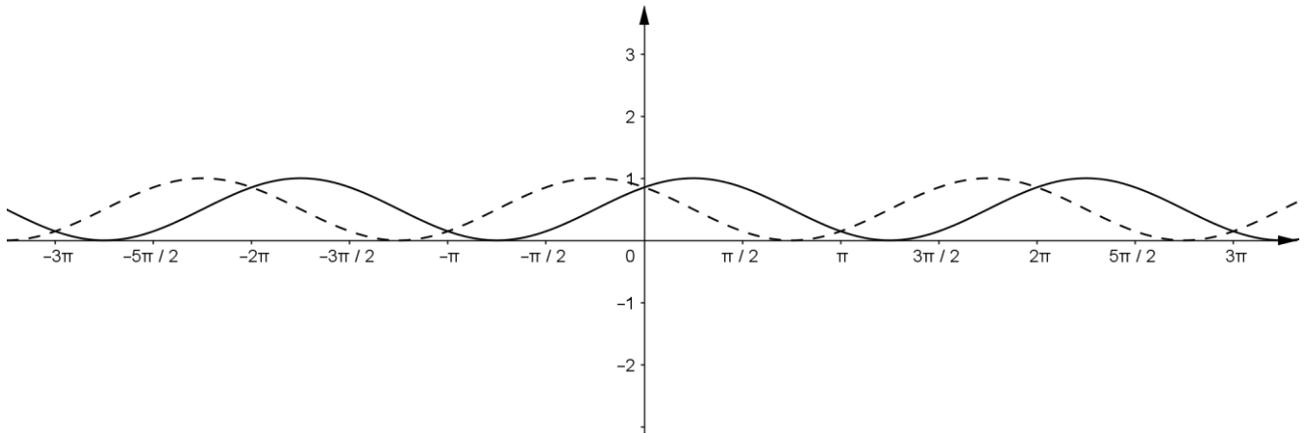
$$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(\pm x + d), d \in \mathbb{R}$$

$$h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin(\pm x + d), d \in \mathbb{R}$$

Di seguito vengono mostrati i grafici:

$$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ in linea continua}$$

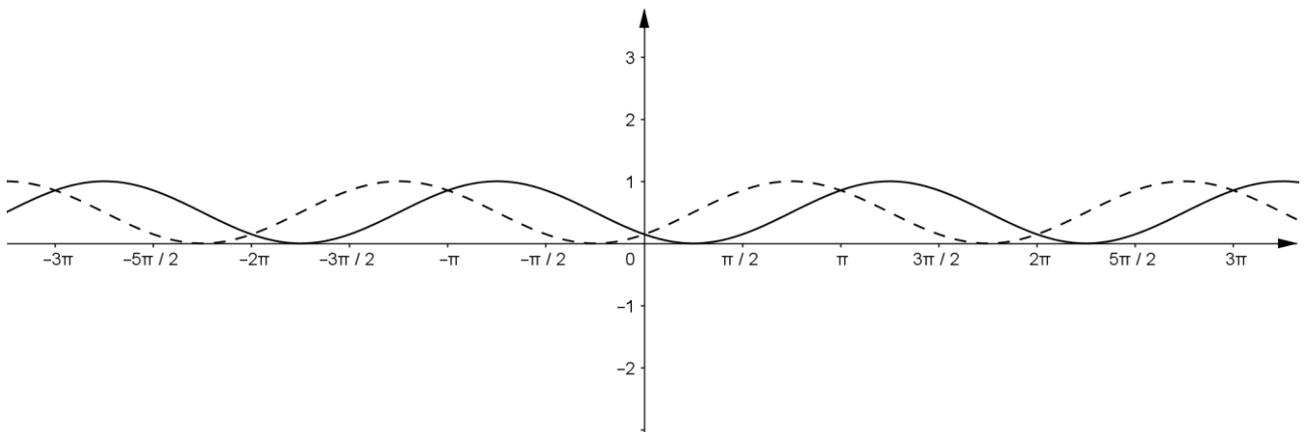
$$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ in linea tratteggiata}$$



Di seguito vengono mostrati i grafici:

$$h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ in linea continua}$$

$$h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ in linea tratteggiata}$$



**QUESTIONARIO**

1. Dimostrare che il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono.
2. Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?
3. Determinare i valori di  $k$  tali che la retta di equazione  $y = -4x + k$  sia tangente alla curva di equazione  $y = x^3 - 4x^2 + 5$ .
4. Considerata la funzione  $f(x) = \frac{3x - e^{\sin x}}{(5 + e^{-x} - \cos x)}$ , determinare, se esistono, i valori di  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , giustificando adeguatamente le risposte fornite.
5. Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come in figura:



Determinare le dimensioni dei lati del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.

6. Determinare  $a$  in modo che:

$$\int_a^{a+1} (3x^2 + 3) dx$$

Sia uguale a 10.

7. In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?
8. Determinare quali sono i valori del parametro  $k \in \mathbb{R}$  per cui la funzione  $y(x) = 2e^{kx+2}$  è soluzione dell'equazione differenziale  $y'' - 2y' - 3y = 0$ .
9. Trovare l'area  $R$  della regione di spazio racchiusa dalla curva

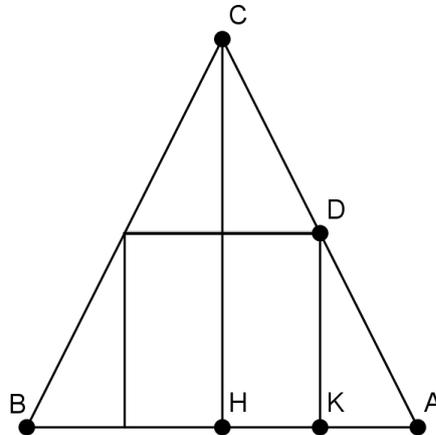
$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \text{per } 4 \leq x \leq 9$$

Sapendo inoltre che la retta di equazione  $x = k$  divide  $R$  in due figure di egual area, determinare il valore di  $k$ .

10. Verificare che, qualunque siano le costanti reali  $\varphi$  e  $k$ , la funzione  $y = ke^{-x} \sin(x + \varphi)$  è soluzione dell'equazione differenziale  $y'' + 2y' + 2y = 0$ . Trovare  $\varphi$  e  $k$  tali che questa funzione abbia un punto di massimo di coordinate  $(0,1)$ .

**SVOLGIMENTO**

1. Consideriamo la figura seguente.



Supponiamo che l'altezza del cono sia pari ad  $H$  ed il raggio di base  $R$  e che l'altezza del cilindro sia  $h$  con  $0 < h < H$  ed il raggio di base  $r$  con  $0 < r < R$ .

I triangoli  $CHA$  e  $DKA$  sono simili pertanto si ha:

$$H:R = h:(R-r) \rightarrow h = \frac{H}{R}(R-r) = H\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

Il volume del cono è:

$$V_{CONO} = \frac{1}{3}\pi HR^2$$

mentre il volume del cilindro è

$$V_{CILINDRO} = \pi hr^2 = \pi r^2 H \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

Il rapporto tra il volume del cilindro e quello del cono è:

$$f(r) = \frac{V_{CILINDRO}}{V_{CONO}} = \frac{\pi r^2 H \left(1 - \frac{r}{R}\right)}{\frac{1}{3}\pi HR^2} = \frac{3}{R^3}(Rr^2 - r^3)$$

Calcoliamo il valore del raggio  $r$  in corrispondenza del quale il rapporto tra i volumi raggiunge il valore massimo. Tale valore è da ricercare tra i valori che annullano la derivata prima di  $f(r)$ :

$$f'(r) = \frac{3}{R^3}(2Rr - 3r^2)$$

La derivata prima si annulla per  $r = 0, r = \frac{2R}{3}$  ed è positiva se  $r \in \left(0, \frac{2R}{3}\right)$  pertanto il valore massimo del rapporto lo si raggiunge per  $r = \frac{2R}{3}$  ed è quindi pari a

$$f\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{3}{R^3} \left[ R \left(\frac{2R}{3}\right)^2 - \left(\frac{2R}{3}\right)^3 \right] = \frac{4}{9}$$

Essendo tale rapporto inferiore ad  $\frac{1}{2}$  si deduce che il cilindro inscritto ha un volume che è sempre minore della metà del volume del cono circoscritto.

---

2. Sia  $x$  la probabilità che esca 1, si ha:

$$p(1) = x, p(2) = \frac{x}{2}, p(3) = \frac{x}{4}, p(4) = \frac{x}{8}$$

sommando tali probabilità e facendo in modo che la somma sia 1, si ricava:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = 1 \rightarrow x = \frac{8}{15}$$

per cui

$$p(1) = \frac{8}{15}, p(2) = \frac{4}{15}, p(3) = \frac{2}{15}, p(4) = \frac{1}{15}$$

La probabilità che, lanciando i due dadi, escono 2 numeri uguali è:

$$p = p^2(1) + p^2(2) + p^2(3) + p^2(4) = \frac{64}{225} + \frac{16}{225} + \frac{4}{225} + \frac{1}{225} = \frac{17}{45}$$


---

3. La retta e la curva sono tangenti nel punto in cui il coefficiente angolare della retta coincide con il valore della derivata prima della curva nell'ascissa del punto di tangenza; detto  $(a, b)$  il punto di tangenza si deve imporre la seguente uguaglianza:

$$y'(a) = 3a^2 - 8a = -4 \rightarrow 3a^2 - 8a + 4 = 0 \rightarrow a = \frac{4 \pm 2}{3} \rightarrow a = 2, a = \frac{2}{3}$$

Per  $a = 2$  il punto di tangenza è  $(2, -3)$  pertanto imponendo il passaggio di tale punto per la retta si ottiene  $k = 5$ .

Per  $a = \frac{2}{3}$  il punto di tangenza è  $\left(\frac{2}{3}, \frac{95}{27}\right)$  pertanto imponendo il passaggio di tale punto per la retta si ottiene  $k = \frac{167}{27}$ .

---

4. Ricordiamo che le funzioni seno e coseno sono limitate in  $[-1, 1]$ , pertanto in un intorno di  $+\infty$  sia  $e^{\sin x}$  che  $(5 + e^{-x} - \cos x)$  sono valori limitati, di conseguenza

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - e^{\sin x}}{(5 + e^{-x} - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$$

In un intorno di  $-\infty$  sia  $e^{\sin x}$  che  $(5 - \cos x)$  sono valori limitati, mentre  $e^{-x}$  diverge di conseguenza

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - e^{\sin x}}{(5 + e^{-x} - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{e^{-x}}$$

ed applicando il teorema di de l'Hospital si ricava che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-e^{-x}} = 0$$

5. Sia  $a$  la base del rettangolo e  $b$  la sua altezza.

Sapendo che il recinto è pari a 2 metri si ha:

$$a + 2b + \pi \cdot \frac{a}{2} = 2 \rightarrow 2b = 2 - \frac{a(2 + \pi)}{2} \rightarrow b = 1 - \frac{a(2 + \pi)}{4}$$

L'area del recinto è pertanto pari a:

$$S_R(a) = a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a \cdot \left[1 - \frac{a(2 + \pi)}{4}\right] + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Tale area è massima nei punti in cui si annulla la derivata prima ovvero:

$$S'_R(a) = 1 - \frac{a(2 + \pi)}{2} + \pi \cdot \frac{a}{4} = 1 - a - \pi \cdot \frac{a}{2} + \pi \cdot \frac{a}{4} = 1 - a \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

L'area è quindi massima per

$$S'_R(a) = 0 \rightarrow a = \frac{4}{\pi + 4}$$

Quindi le dimensioni del rettangolo sono:

$$a = \frac{4}{\pi + 4}, b = 1 - \frac{(2 + \pi)}{\pi + 4} = \frac{2}{\pi + 4}$$

6. Si ha:

$$\int_a^{a+1} (3x^2 + 3)dx = [x^3 + 3x]_a^{a+1} = (a+1)^3 + 3(a+1) - a^3 - 3a = 3a^2 + 3a + 4$$

Imponendo che tale valore sia pari a 10 si ha:

$$3a^2 + 3a + 4 = 10 \rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \rightarrow a = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow a = -2, a = 1$$

7. Indichiamo con  $X$  il numero di partite vinte da un giocatore su un totale di 12 partite.

La distribuzione di probabilità di vincita è:

$$p(X = k) = \binom{12}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12-k} = \binom{12}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

Un giocatore vince la gara in 2 possibili casi:

- il primo vince almeno 10 partite su 12;
- il secondo ne perde al massimo 2;

quindi la probabilità che un giocatore vinca la gara su 12 partite è pari a:

$$\begin{aligned} p(X \geq 10) + p(X \leq 2) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot \left[ \binom{12}{10} + \binom{12}{11} + \binom{12}{12} + \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} \right] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot [66 + 12 + 1 + 1 + 12 + 66] = \frac{79}{2^{11}} \end{aligned}$$

8. Le derivate prima e seconda della funzione soluzione sono:

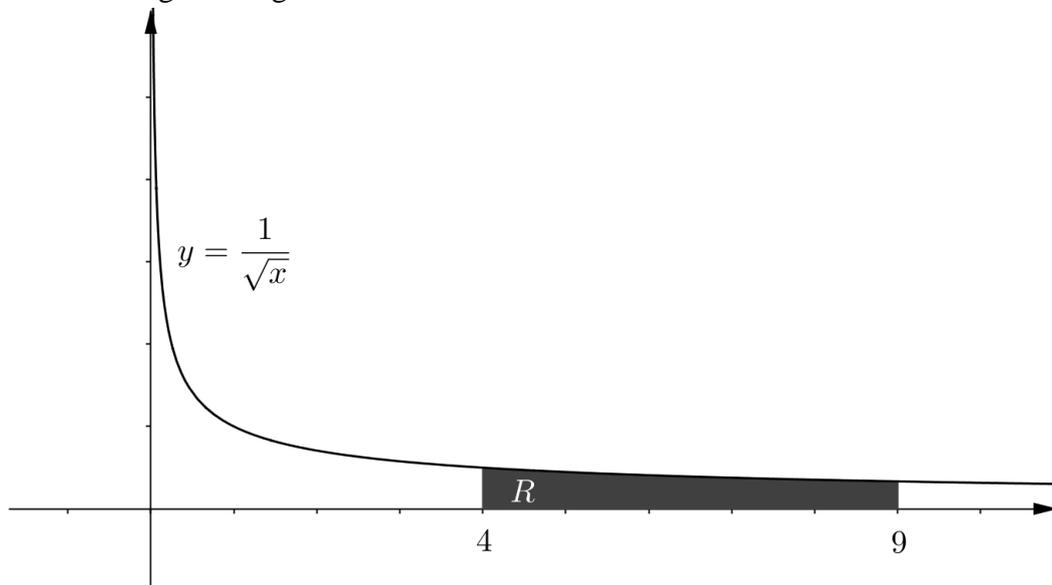
$$y'(x) = 2ke^{kx+2}$$

$$y''(x) = 2k^2e^{kx+2}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ricava:

$$2k^2e^{kx+2} - 2 \cdot 2ke^{kx+2} - 3 \cdot 2e^{kx+2} = 0 \rightarrow k^2 - 2k - 3 = 0 \rightarrow k = 1 \pm 2 \rightarrow k = 3, k = -1$$

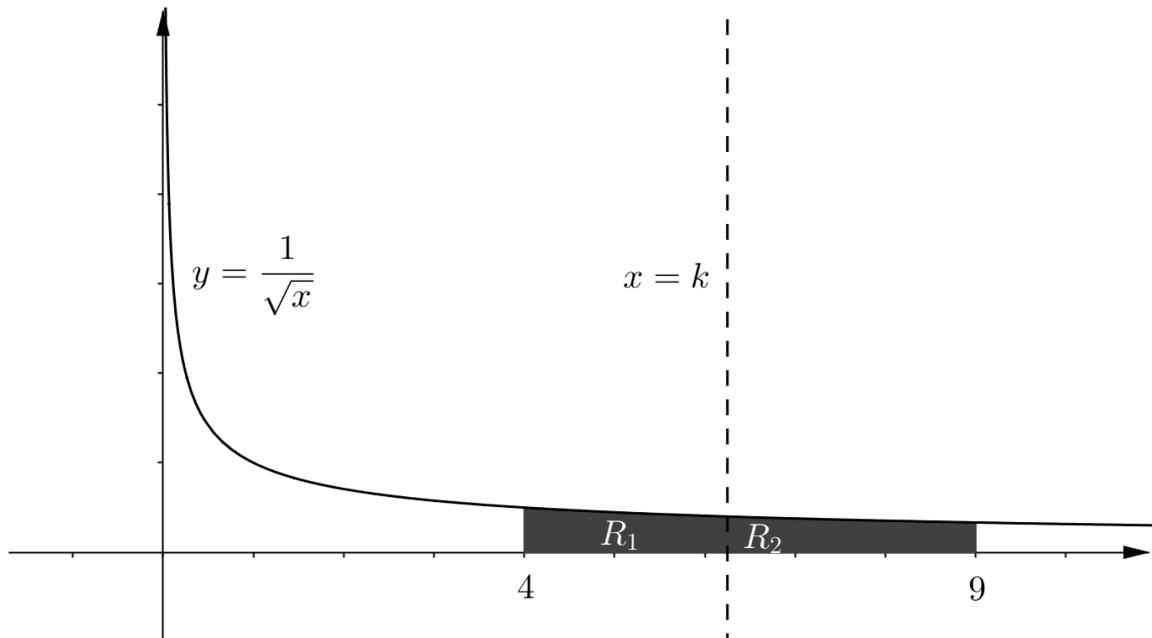
9. Consideriamo la seguente figura:



L'area richiesta è pari a:

$$S(R) = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_4^9 x^{-\frac{1}{2}} dx = [2\sqrt{x}]_4^9 = 6 - 4 = 2$$

Consideriamo la seguente figura.



Si ha:

$$\begin{aligned}
 S(R_1) = S(R_2) &\rightarrow \int_4^k \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_k^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \rightarrow [2\sqrt{x}]_4^k = [2\sqrt{x}]_k^9 \rightarrow \\
 &\rightarrow 2\sqrt{k} - 4 = 6 - 2\sqrt{k} \rightarrow 4\sqrt{k} = 10 \rightarrow \sqrt{k} = \frac{5}{2} \rightarrow k = \frac{25}{4}
 \end{aligned}$$

10. L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale di secondo grado è:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda = -1 \pm i$$

Di conseguenza la generica soluzione di una tale equazione differenziale è

$$y = e^{-x}[A \sin(x) + B \cos(x)]$$

Riscriviamo la soluzione indicata nella traccia  $y = ke^{-x} \sin(x + \varphi)$  sfruttando le proprietà della funzione seno:

$$y = ke^{-x} \sin(x + \varphi) = ke^{-x}[\sin(x) \cos(\varphi) + \cos(x) \sin(\varphi)]$$

Quindi ponendo

$$\begin{cases} A = k \cos(\varphi) \\ B = k \sin(\varphi) \end{cases}$$

le due equazioni diventano identiche.

Calcoliamo ora  $\varphi$  e  $k$  in funzione di  $A$  e  $B$ , si ha:

$$\begin{cases} \tan(\varphi) = \frac{B}{A} \\ k^2 = A^2 + B^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) \\ k = \sqrt{A^2 + B^2} \end{cases}$$

Di conseguenza, avendo dimostrato l'identità tra le due soluzioni, deduciamo che  $y = ke^{-x} \sin(x + \varphi)$  è soluzione dell'equazione differenziale qualsiasi  $\varphi$  e  $k$ .

La soluzione  $y = ke^{-x} \sin(x + \varphi)$  passa per  $(0,1)$  se

$$k \sin(\varphi) = 1$$

ed ha un massimo in  $(0,1)$  se la sua derivata prima

$$y' = -ke^{-x} \sin(x + \varphi) + ke^{-x} \cos(x + \varphi)$$

si annulla in  $x = 0$  ovvero

$$-k \sin(\varphi) + k \cos(\varphi) = 0 \rightarrow \sin(\varphi) = \cos(\varphi) \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Di conseguenza

$$k \sin(\varphi) = 1 \rightarrow k \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \rightarrow k = \sqrt{2}$$

$$k \sin(\varphi) = 1 \rightarrow k \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow k \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \rightarrow k = -\sqrt{2}$$

e le funzioni richieste sono

$$y = \sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = -\sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4} + \pi\right) = \sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Di conseguenza la funzione richiesta è univoca e pari a

$$y = \sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$