

Esame di stato di istruzione secondaria superiore
Indirizzi: Scientifico, Scientifico opzione scienze applicate e Scientifico ad
indirizzo sportivo
Tema di matematica

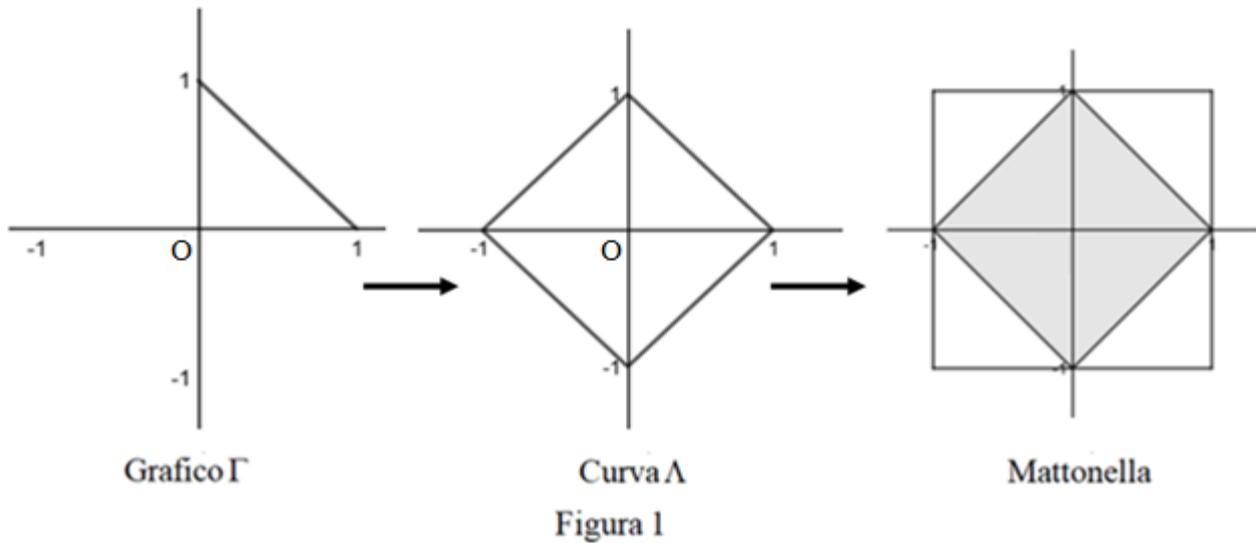
Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario

PROBLEMA 1

Devi programmare il funzionamento di una macchina che viene adoperata nella produzione industriale di mattonelle per pavimenti. Le mattonelle sono di forma quadrata di lato 1 (in un'opportuna unità di misura) e le fasi di lavoro sono le seguenti:

- si sceglie una funzione $y = f(x)$ definita e continua nell'intervallo $[0,1]$, che soddisfi le condizioni:
 - a) $f(0) = 1$;
 - b) $f(1) = 0$;
 - c) $0 < f(x) < 1$ per $0 < x < 1$
- La macchina traccia il grafico Γ della funzione $y = f(x)$ e i grafici simmetrici di Γ rispetto all'asse y , all'asse x e all'origine O , ottenendo in questo modo una curva chiusa Λ , passante per i punti $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, simmetrica rispetto agli assi cartesiani e all'origine, contenuta nel quadrato Q di vertici $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$.
- La macchina costruisce la mattonella colorando di grigio l'interno della curva chiusa e lasciando bianca la parte restante del quadrato Q ; vengono quindi mostrate sul display alcune mattonelle affiancate, per dare un'idea dell'aspetto del pavimento.

Il manuale d'uso riporta un esempio del processo realizzativo di una mattonella semplice:



La pavimentazione risultante è riportata di seguito:

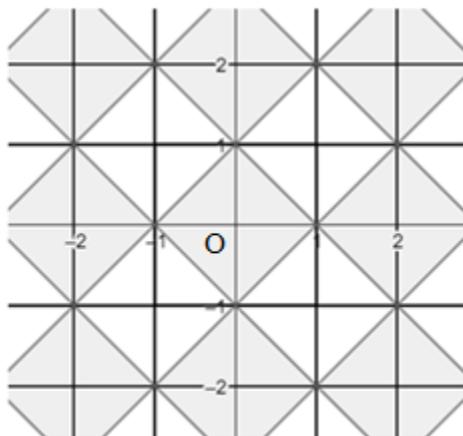


Figura 2

1. Con riferimento all'esempio, determina l'espressione della funzione $y = f(x)$ e l'equazione della curva Λ , così da poter effettuare una prova e verificare il funzionamento della macchina.

Ti viene richiesto di costruire una mattonella con un disegno più elaborato che, oltre a rispettare le condizioni a), b) e c) descritte in precedenza, abbia e l'area della parte colorata pari al 55% dell'area dell'intera mattonella. A tale scopo, prendi in considerazione funzioni polinomiali di secondo grado e di terzo grado.

2. Dopo aver verificato che non è possibile realizzare quanto richiesto adoperando una funzione polinomiale di secondo grado, determina i coefficienti $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ della funzione polinomiale di terzo grado che soddisfa le condizioni poste. Rappresenta infine in un piano cartesiano la mattonella risultante.

Vengono proposti a un cliente due tipi diversi di disegno, derivanti rispettivamente dalle funzioni $a_n(x) = 1 - x^n$ e $b_n(x) = (1 - x)^n$, considerate per $x \in [0,1]$, con n intero positivo.

3. Verifica che al variare di n tutte queste funzioni rispettano le condizioni a), b) e c). Dette $A(n)$ e $B(n)$ le aree delle parti colorate delle mattonelle ottenute a partire da tali funzioni a_n e b_n , calcola $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n)$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} B(n)$ ed interpreta i risultati in termini geometrici.

Il cliente decide di ordinare 5.000 mattonelle con il disegno derivato da $a_2(x)$ e 5.000 con quello derivato da $b_2(x)$. La verniciatura viene effettuata da un braccio meccanico che, dopo aver depositato il colore, torna alla posizione iniziale sorvolando la mattonella lungo la diagonale. A causa di un malfunzionamento, durante la produzione delle 10.000 mattonelle si verifica con una probabilità del 20% che il braccio meccanico lasci cadere una goccia di colore in un punto a caso lungo la diagonale, macchiando così la mattonella appena prodotta.

4. Fornisci una stima motivata del numero di mattonelle che, avendo una macchia nella parte non colorata, risulteranno danneggiate al termine del ciclo di produzione.

SVOLGIMENTO

Punto 1

La curva Λ ha equazione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ -1 + |x| & \text{se } -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 1 + x & \text{se } -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1 \\ -1 - x & \text{se } -1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq 0 \\ -1 + x & \text{se } 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$$

In modo più sintetico la funzione può essere scritta come

$$|y| = 1 - |x| \rightarrow |x| + |y| = 1$$

Consideriamo la funzione $f(x) = 1 - x$ per verificare che rispetta tutte le 3 condizioni a), b) e c).
Si ha:

- $f(0) = 1 - 0 = 1$;
- $f(1) = 1 - 1 = 0$;
- $0 < x < 1 \rightarrow -1 < -x < 0 \rightarrow 1 - 1 < 1 - x < 0 + 1 \rightarrow 0 < 1 - x < 1$ pertanto $0 < f(x) < 1$

Tali 3 condizioni sono soddisfatte anche gli altri rami della funzione appartenenti al 2°, 3° e 4° quadrante visto che la curva Λ in figura 1 si ottiene tracciando in ordine:

- Il grafico Γ di $f(x) = 1 - x$ per $x \in [0,1]$;
- Il simmetrico di Γ rispetto all'asse delle ordinate ottenendo il grafico di $f(x) = 1 + x$ per $x \in [-1,0]$;
- Il simmetrico di Γ rispetto all'asse delle ascisse ottenendo il grafico di $f(x) = -1 + x$ per $x \in [0,1]$;
- Il simmetrico di Γ rispetto all'origine O ottenendo il grafico di $f(x) = -1 - x$ per $x \in [-1,0]$;

Punto 2

Consideriamo la funzione polinomiale di secondo grado: $f(x) = ax^2 + bx + c, 0 \leq x \leq 1$.

Imponendo le seguenti condizioni si ha:

- $f(0) = 1 \rightarrow c = 1$
- $f(1) = 0 \rightarrow a + b + c = 0$
- $f'(0) = 0 \rightarrow b = 0$

Di conseguenza i valori dei 3 parametri sono:

$$a = -1, b = 0, c = 1$$

pertanto la funzione polinomiale diventa

$$f(x) = 1 - x^2, 0 \leq x \leq 1$$

e non può rappresentare la mattonella richiesta in quanto la parte colorata ha area sottesa pari a

$$\int_0^1 (1-x^2)dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \cong 66.7\% \neq 55\%$$

Consideriamo la funzione polinomiale di terzo grado: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, 0 \leq x \leq 1$.

Imponendo le seguenti condizioni si ha:

- $f(0) = 1 \rightarrow d = 1$
- $f(1) = 0 \rightarrow a + b + c + d = 0$
- $f'(0) = 0 \rightarrow c = 0$

Di conseguenza i valori dei parametri sono:

$$b = -(1+a), c = 0, d = 1$$

pertanto la funzione polinomiale diventa:

$$f(x) = ax^3 - (1+a)x^2 + 1, 0 \leq x \leq 1$$

L'area dell'intera mattonella in $[0,1]$ è pari a 1, pertanto l'area della mattonella in grigio in $[0,1]$, essendo pari al 55% dell'area dell'intera mattonella, è pari a 0.55.

Imponendo che l'area della mattonella in grigio sia pari a 0.55 si ricava:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [ax^3 - (1+a)x^2 + 1]dx &= 0.55 \rightarrow \left[a \frac{x^4}{4} - (1+a) \frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = 0.55 \rightarrow \left[\frac{a}{4} - \frac{(1+a)}{3} + 1 \right] \\ &= 0.55 \rightarrow -\frac{a}{12} + \frac{2}{3} = \frac{11}{20} \rightarrow \frac{a}{12} = \frac{2}{3} - \frac{11}{20} \rightarrow \frac{a}{12} = \frac{7}{60} \rightarrow a = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

Di conseguenza i valori dei 4 parametri della funzione polinomiale sono:

$$a = \frac{7}{5}, b = -\frac{12}{5}, c = 0, d = 1.$$

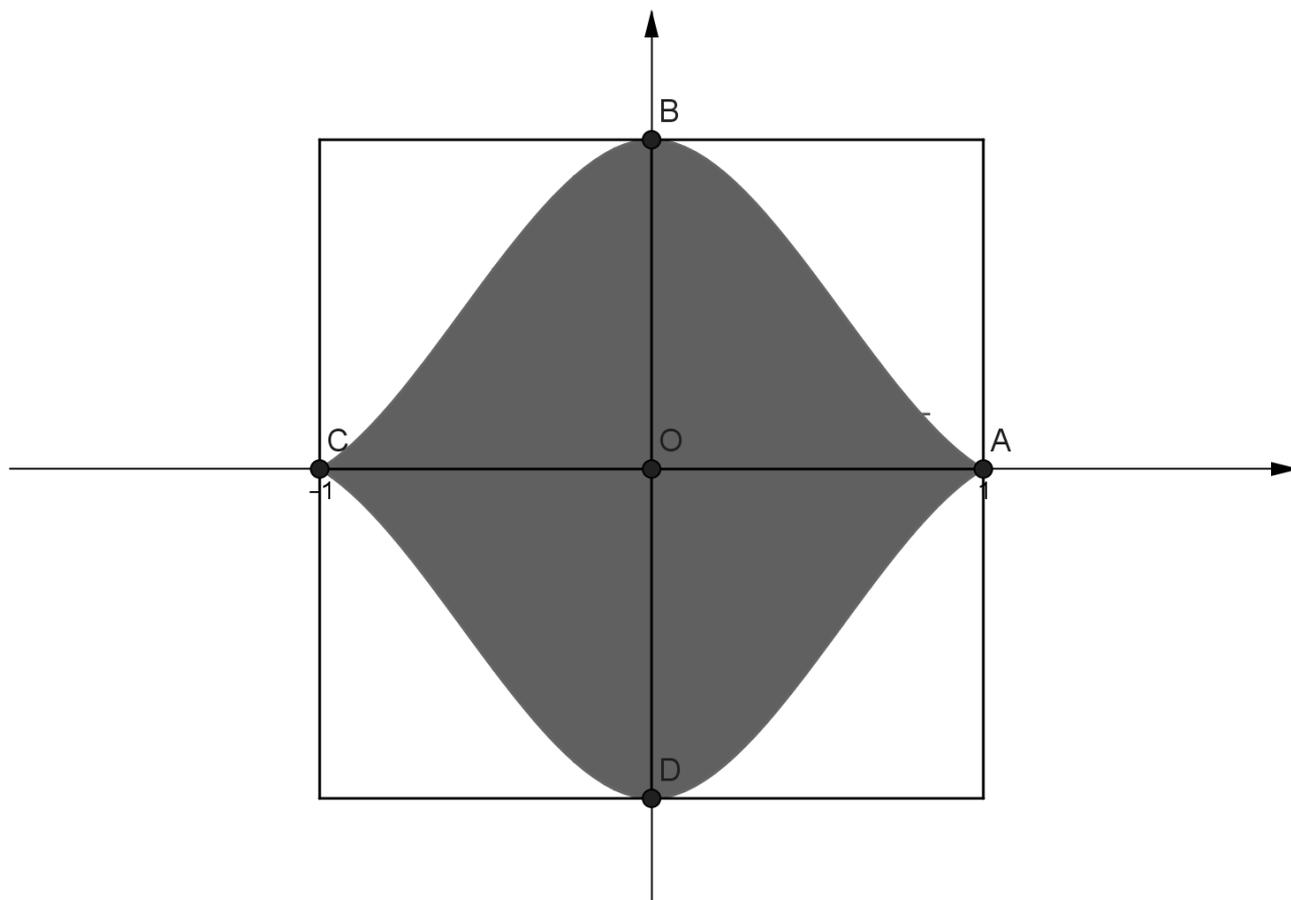
Con queste condizioni la funzione polinomiale diventa:

$$f(x) = \frac{7}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 1, 0 \leq x \leq 1.$$

La derivata prima di tale funzione è $f'(x) = \frac{21}{5}x^2 - \frac{24}{5}x, 0 \leq x \leq 1$ e si annulla in $x = 0, x = \frac{8}{7}$ pertanto nell'intervallo $[0,1]$ la funzione è strettamente decrescente, di conseguenza è soddisfatta anche la condizione c).

La derivata seconda è $f''(x) = \frac{42}{5}x - \frac{24}{5}, 0 \leq x \leq 1$ e si annulla in $x = \frac{4}{7}$ che è ascissa di flesso a tangente obliqua.

Di seguito il grafico della mattonella.

**Punto 3**

Consideriamo ora $a_n(x) = 1 - x^n$, essa soddisfa le condizioni a), b) e c) in quanto:

- $a_n(0) = 1$
- $a_n(1) = 0$
- per $0 \leq x \leq 1$ ed n intero positivo si ha $0 \leq x^n \leq 1 \rightarrow -1 \leq -x^n \leq 0 \rightarrow 1 - 1 \leq 1 - x^n \leq 1 + 0 \rightarrow 0 \leq a_n(x) \leq 1$

Consideriamo ora $b_n(x) = (1 - x)^n$, essa soddisfa le condizioni a), b) e c) in quanto:

- $b_n(0) = 1$
- $b_n(1) = 0$
- per $0 \leq x \leq 1$ si ha $0 \leq (1 - x) \leq 1 \rightarrow 0 \leq (1 - x)^n \leq 1 \rightarrow 0 \leq b_n(x) \leq 1$

Consideriamo ora l'area della parte colorata delle mattonelle con forma $a_n(x) = 1 - x^n$, si ha:

$$A(n) = 4 \int_0^1 (1 - x^n) dx = 4 \left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = 4 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 4 \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

Consideriamo ora l'area della parte colorata delle mattonelle con forma $b_n(x) = (1 - x)^n$, si ha:

$$B(n) = 4 \int_0^1 (1 - x)^n dx = 4 \left[-\frac{(1 - x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{4}{n+1}$$

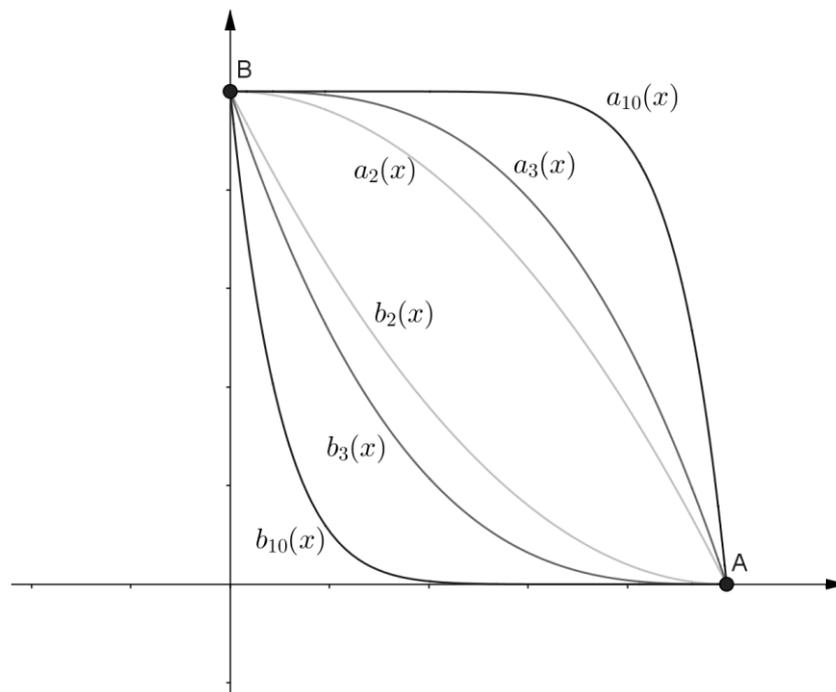
Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \left(\frac{n}{n+1} \right) = 4$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n+1} = 0$$

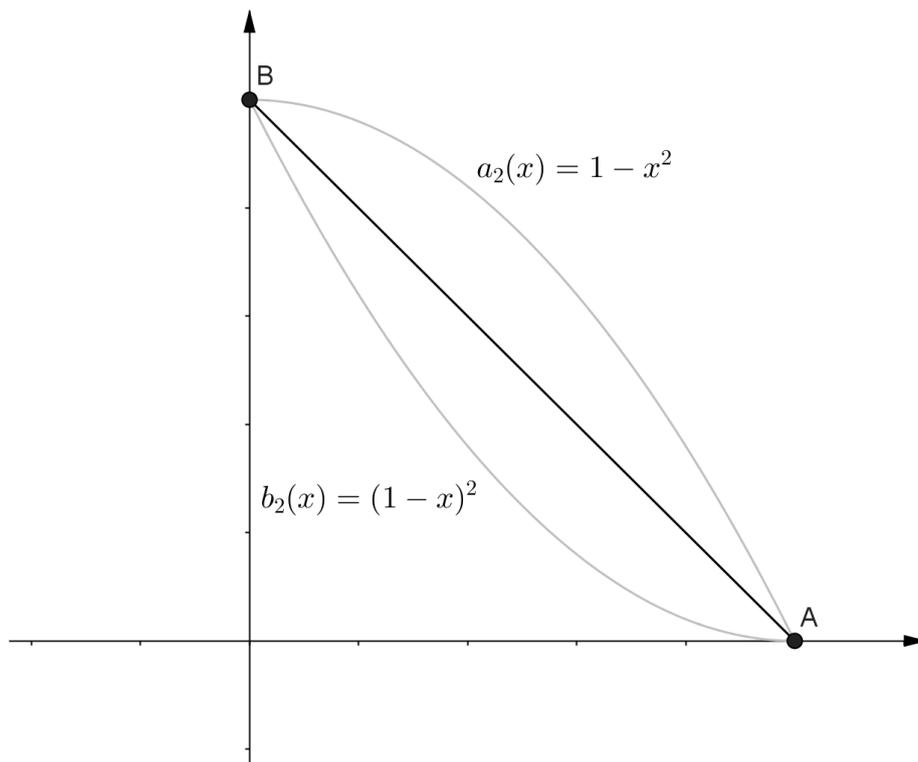
La spiegazione geometrica è deducibile dal grafico seguente dove sono state rappresentate nello stesso riferimento cartesiano $a_2(x)$, $a_3(x)$, $a_{10}(x)$, $b_2(x)$, $b_3(x)$, $b_{10}(x)$ da cui si evince che:

- al crescere di n , il profilo della funzione $a_n(x) = 1 - x^n$, $0 \leq x \leq 1$ tende all'intera mattonella ovvero la parte colorata satura l'intera mattonella;
- al crescere di n , il profilo della funzione $b_n(x) = (1 - x)^n$, $0 \leq x \leq 1$ tende a svuotare la parte colorata dalla mattonella.



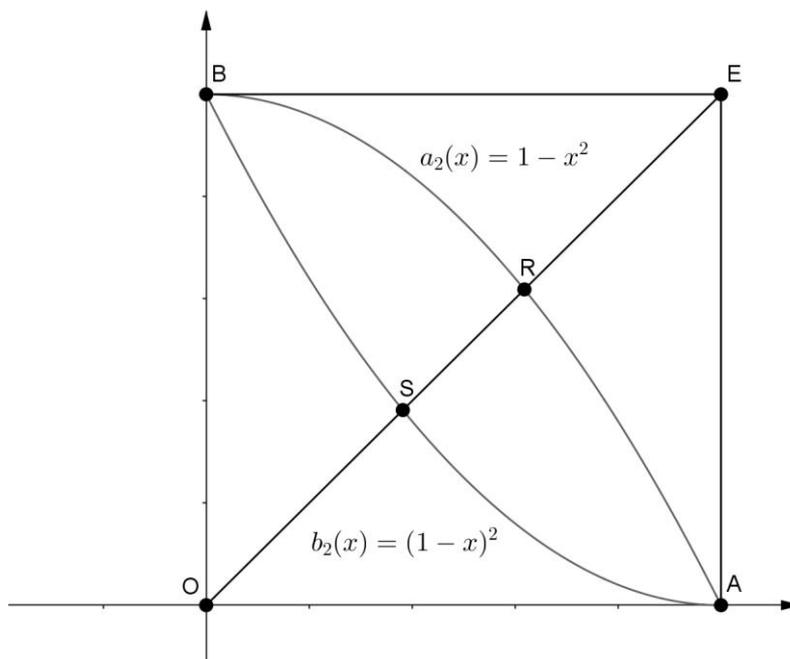
Punto 4

Consideriamo la seguente figura in cui è stata considerata la diagonale che congiunge i punti $A(1,0)$ e $B(0,1)$.



In questo caso, essendo la diagonale sempre sotto il profilo $a_2(x)$, deduciamo che le mattonelle con profilo $a_2(x)$ non si macchieranno mai, mentre si macchieranno sempre le mattonelle di tipo $b_2(x)$ visto che tale profilo sta al di sotto della diagonale; di conseguenza si macchieranno il 20% di 5000 piastrelle ovvero 1000 piastrelle.

Coinsideriamo ora, invece, l'altra diagonale, ovvero quella che congiunge i punti $O(0,0)$ e $E(1,1)$.



In questo caso la probabilità che le gocce sulla diagonale OE macchino le piastrelle con profilo $a_2(x)$ è pari a:

$$p(a_2) = \frac{\overline{RE}}{\overline{OE}}$$

Calcoliamo ora l'intersezione R tra $a_2(x) = 1 - x^2$ e la retta $y = x$:

$$\begin{cases} a_2(x) = 1 - x^2 \\ y = x \end{cases} \rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

di conseguenza, scartando la soluzione negativa, si deduce che il punto R ha coordinate $R\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ e la distanza RE è pari a

$$\overline{RE} = \sqrt{\left(1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)$$

Di conseguenza la probabilità che le gocce macchino le piastrelle con profilo $a_2(x)$ è pari a

$$p(a_2) = \frac{\overline{RE}}{\overline{OE}} = \frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

La probabilità che le gocce sulla diagonale OE macchino le piastrelle con profilo $b_2(x)$ è pari a:

$$p(b_2) = \frac{\overline{SE}}{\overline{OE}}$$

Calcoliamo ora l'intersezione S tra $a_2(x) = 1 - x^2$ e la retta $y = x$:

$$\begin{cases} b_2(x) = (1-x)^2 \\ y = x \end{cases} \rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

di conseguenza, scartando la soluzione $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, si deduce che il punto S ha coordinate $S\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ e la distanza SE è pari a

$$\overline{SE} = \sqrt{\left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}\right)$$

Di conseguenza la probabilità che le gocce macchino le piastrelle con profilo $b_2(x)$ è pari a

$$p(b_2) = \frac{\overline{SE}}{\overline{OE}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

La probabilità che risulti danneggiata una mattonella con profilo $a_2(x)$ è pari a:

$$\frac{1}{5} \cdot p(a_2) = \frac{3-\sqrt{5}}{10} \cong 7.64\%$$

La probabilità che risulti danneggiata una mattonella con profilo $b_2(x)$ è pari a:

$$\frac{1}{5} \cdot p(b_2) = \frac{\sqrt{5} - 1}{10} \cong 12.36\%$$

Il numero di piastrelle danneggiate è quindi pari a:

$$5000 \cdot 7.64\% + 5000 \cdot 12.36\% = 5000 \cdot 20\% = 1000$$

come nel primo caso.

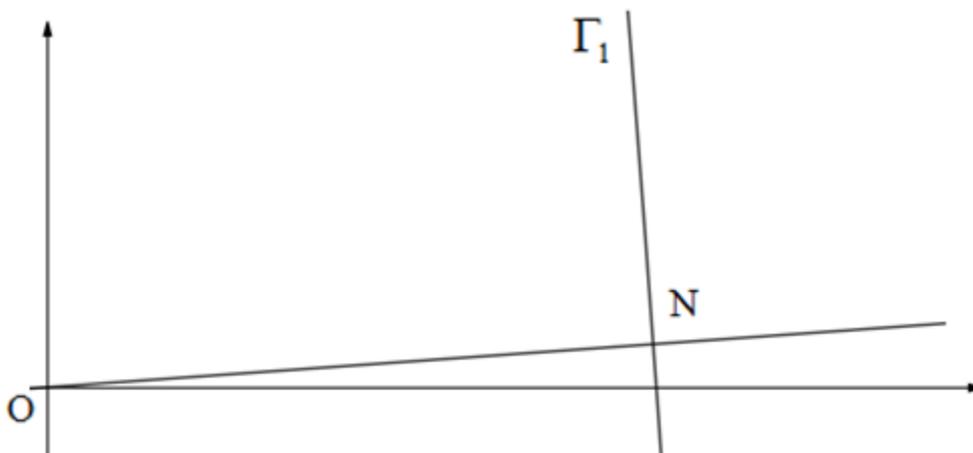
PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k , tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k , tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$;
2. Dopo aver verificato che $k = 1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.
3. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1 , s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P(x_P, y_P)$ all'interno di T , questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_P > f_1(x)$ per tale punto P).
4. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1 . La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O . Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n - 1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.



SVOLGIMENTO

Punto 1

Il punto ad ascissa 0 è (0,9) mentre il punto ad ascissa 1 è (1,k+8).

La retta r_k ha equazione $y = f'_k(0)x + 9$ dove $f'_k(0) = [-3x^2 + k]_{x=0} = k$ pertanto la retta r_k ha equazione $y = kx + 9$.

La retta s_k ha equazione $y = f'_k(1)(x - 1) + k + 8$ dove $f'_k(1) = [-3x^2 + k]_{x=1} = k - 3$ pertanto la retta s_k ha equazione $y = (k - 3)(x - 1) + k + 8$.

Tali rette si intersecano in un punto che soddisfa la seguente equazione:

$$kx + 9 = (k - 3)(x - 1) + k + 8 \rightarrow kx + 9 = kx - k - 3x + 3 + k + 8 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Il punto M ha coordinate $M = \left(\frac{2}{3}, \frac{2k}{3} + 9\right)$

Punto 2

L'ordinata del punto M è:

$$f_k\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}k + \frac{235}{27}$$

Si ha:

$$f_k\left(\frac{2}{3}\right) < 10 \rightarrow \frac{2}{3}k + \frac{235}{27} < 10 \rightarrow \frac{2}{3}k < \frac{35}{27} \rightarrow k < \frac{35}{18} \cong 1.94$$

di conseguenza $k=1$ è il massimo intero positivo affinché l'ordinata del punto M sia minore di 10.

Studiamo la funzione $f_1(x) = -x^3 + x + 9$.

- **Dominio:** R
- **Intersezioni asse ascisse:** trattandosi di una cubica, possiamo applicare il metodo di Cardano per individuare le soluzioni dell'equazione $f_1(x) = -x^3 + x + 9 = 0$; tale metodo dice che, in presenza di una equazione di terzo grado del tipo $x^3 + px + q = 0$ la soluzione è

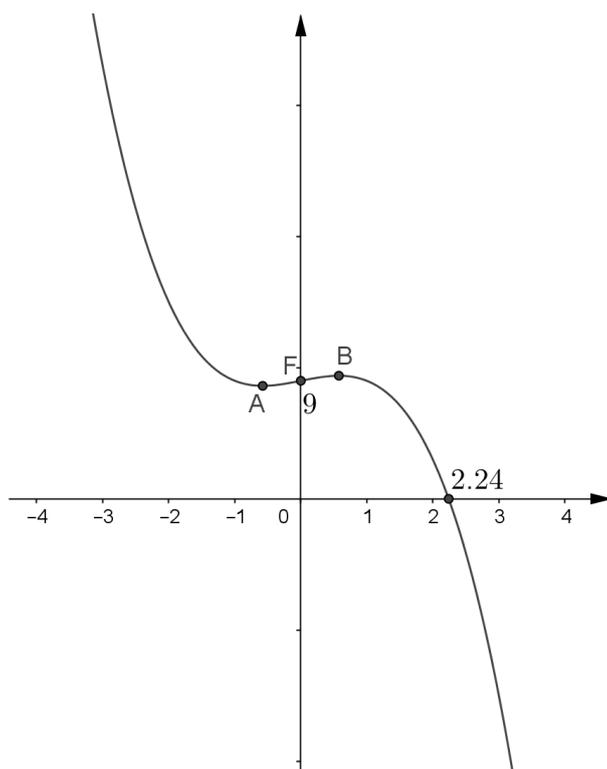
$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Nel caso in esame $f_1(x) = -x^3 + x + 9 = 0 \Rightarrow x^3 - x - 9 = 0$ pertanto i parametri p e q sono $p = -1, q = -9$ da cui si ricava

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{1}{27}}} \cong 2.24$$

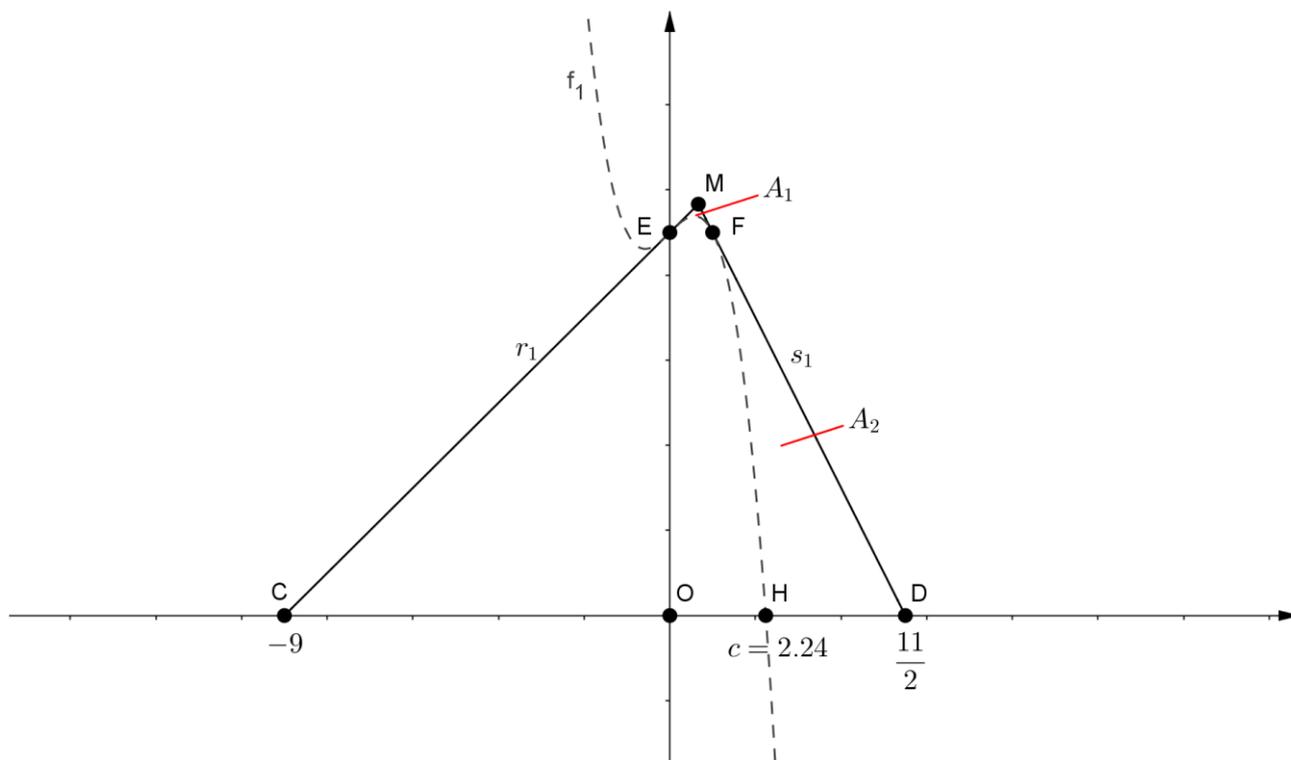
- **Intersezioni asse ordinate:** $x = 0 \rightarrow y = 9$;
- **Simmetria:** non è nè pari nè dispari;
- **Asintoti verticali:** non ve ne sono;
- **Asintoti orizzontali:** non ve ne sono in quanto $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_1(x) = \mp\infty$;
- **Asintoti verticali:** non ve ne sono;
- **Crescenza e decrescenza:** la derivata prima è $f_1'(x) = -3x^2 + 1$ pertanto la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ e strettamente decrescente in $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$;
- **Concavità e convessità:** la derivata seconda è $f_1''(x) = -6x$ pertanto la funzione volge concavità verso l'alto nell'intervallo $(0, +\infty)$ e verso il basso in $(-\infty, 0)$ di conseguenza il punto $F=(0,9)$ è un flesso a tangente obliqua; inoltre essendo $f_1''(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 2\sqrt{3}$ e $f_1''(\frac{\sqrt{3}}{3}) = -2\sqrt{3}$ si deduce che $A = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, 9 - \frac{2\sqrt{3}}{9})$ è un punto di minimo relativo e $B = (\frac{\sqrt{3}}{3}, 9 + \frac{2\sqrt{3}}{9})$ è un punto di massimo relativo.
- **Positività:** visto che la funzione è strettamente decrescente $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ e che l'ascissa di minimo è positiva, deduciamo che la funzione è positiva nell'intervallo $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$; analogamente visto che la funzione è strettamente crescente in $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ deduciamo che è positiva anche in $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$; inoltre visto che la funzione è strettamente decrescente in $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ e che $f(2.24) = 0$ deduciamo che la funzione è negativa per $x > 2.24$ e positiva di conseguenza in $(-\infty, 2.24)$.

Di seguito il grafico.



Punto 3

Consideriamo la figura seguente in cui sono rappresentate nello stesso riferimento cartesiano le rette $r_1: y = x + 9$, $s_1: y = -2x + 11$ e la cubica $f_1(x) = -x^3 + x + 9$.



La condizione $y_p > f_1(x)$ è soddisfatta dai punti che appartengono alle seguenti 2 regioni di piano:

- A_1 : triangolo mistilineo MEF
- A_2 : triangolo mistilineo HFD

Per calcolare la somma di tali 2 aree conviene calcolare l'area del triangolo MCD e sottrarre l'area del triangolo EOC e l'area sottesa da $f_1(x)$ con l'asse delle ascisse.

L'area del triangolo MCD è pari a:

$$S(MCD) = \frac{\overline{CD} \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{29}{2}\right) \cdot \left(\frac{29}{3}\right) = \frac{841}{12}$$

L'area del triangolo EOC è pari a:

$$S(EOC) = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{EO}}{2} = \frac{1}{2} \cdot (9) \cdot (9) = \frac{81}{2}$$

Detta c l'ascissa di intersezione di $f_1(x)$ con l'asse delle ascisse, l'area sottesa da $f_1(x)$ con l'asse delle ascisse è pari a:

$$\int_0^c f_1(x) dx = \int_0^c (-x^3 + x + 9) dx = -\frac{c^4}{4} + \frac{c^2}{2} + 9c$$

Il valore di c calcolato con il metodo di Cardano è $c = 2.24$ di conseguenza

$$\int_0^c f_1(x) dx = -\frac{c^4}{4} + \frac{c^2}{2} + 9c \cong 16.38$$

La probabilità richiesta è quindi pari a:

$$p = \frac{\frac{841}{12} - \frac{81}{2} - 16.38}{\frac{841}{12}} \cong 0.189 = 18.9\%$$

Punto 4

Sia $P_n(x)$ un polinomio di grado n .

La normale a tale polinomio in un punto (x_0, y_0) ha equazione:

$$y = -\frac{1}{P'_n(x_0)}(x - x_0) + P_n(x_0)$$

Tale retta passa per l'origine se

$$-\frac{1}{P'_n(x_0)}(0 - x_0) + P_n(x_0) = 0 \rightarrow P'_n(x_0) \cdot P_n(x_0) + x_0 = 0$$

Se $P_n(x)$ ha grado n , la sua derivata prima ha grado $(n - 1)$ pertanto $P'_n(x_0) \cdot P_n(x_0)$ ha grado $(2n - 1)$ e di conseguenza, per il teorema fondamentale dell'Algebra, l'equazione

$$P'_n(x_0) \cdot P_n(x_0) + x_0 = 0$$

ha al più $(2n - 1)$ radici e quindi non esistono più di $(2n - 1)$ punti in cui la normale passa per l'origine.

QUESTIONARIO

1. Dimostrare che il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono.
2. Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?
3. Determinare i valori di k tali che la retta di equazione $y = -4x + k$ sia tangente alla curva di equazione $y = x^3 - 4x^2 + 5$.
4. Considerata la funzione $f(x) = \frac{3x - e^{\sin x}}{(5 + e^{-x} - \cos x)}$, determinare, se esistono, i valori di $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, giustificando adeguatamente le risposte fornite.
5. Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come in figura:



Determinare le dimensioni dei lati del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.

6. Determinare l'equazione della superficie sferica S , con centro sulla retta $r: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} t \in R$ tangente al piano $\pi: 3x - y - 2z + 14 = 0$ nel punto $T(-4,0,1)$.
7. Determinare a in modo che:

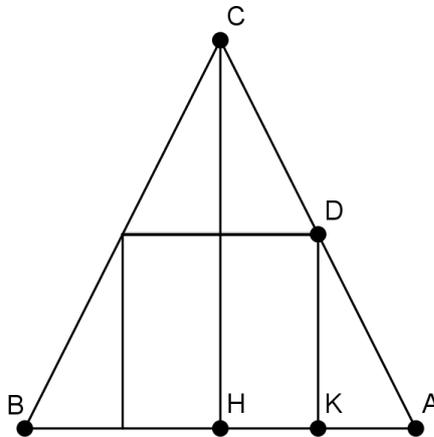
$$\int_a^{a+1} (3x^2 + 3) dx$$

Sia uguale a 10.

8. In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?
9. Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti $A(3,1,0), B(3,-1,2), C(1,1,2)$. Dopo aver verificato che ABC è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano α di equazione $x + y + z - 4 = 0$, stabilire quali sono i punti P tali che $ABCP$ sia un tetraedro regolare.
10. Determinare quali sono i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $y(x) = 2e^{kx+2}$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' - 3y = 0$.

SVOLGIMENTO

1. Consideriamo la figura seguente.



Supponiamo che l'altezza del cono sia pari ad H ed il raggio di base R e che l'altezza del cilindro sia h con $0 < h < H$ ed il raggio di base r con $0 < r < R$.

I triangoli CHA e DKA sono simili pertanto si ha:

$$H:R = h:(R-r) \rightarrow h = \frac{H}{R}(R-r) = H\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

Il volume del cono è:

$$V_{CONO} = \frac{1}{3}\pi HR^2$$

mentre il volume del cilindro è

$$V_{CILINDRO} = \pi hr^2 = \pi r^2 H \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

Il rapporto tra il volume del cilindro e quello del cono è:

$$f(r) = \frac{V_{CILINDRO}}{V_{CONO}} = \frac{\pi r^2 H \left(1 - \frac{r}{R}\right)}{\frac{1}{3}\pi HR^2} = \frac{3}{R^3}(Rr^2 - r^3)$$

Calcoliamo il valore del raggio r in corrispondenza del quale il rapporto tra i volumi raggiunge il valore massimo. Tale valore è da ricercare tra i valori che annullano la derivata prima di $f(r)$:

$$f'(r) = \frac{3}{R^3}(2Rr - 3r^2)$$

La derivata prima si annulla per $r = 0$, $r = \frac{2R}{3}$ ed è positiva se $r \in \left(0, \frac{2R}{3}\right)$ pertanto il valore massimo del rapporto lo si raggiunge per $r = \frac{2R}{3}$ ed è quindi pari a

$$f\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{3}{R^3}\left[R\left(\frac{2R}{3}\right)^2 - \left(\frac{2R}{3}\right)^3\right] = \frac{4}{9}$$

Essendo tale rapporto inferiore ad $\frac{1}{2}$ si deduce che il cilindro inscritto ha un volume che è sempre minore della metà del volume del cono circoscritto.

2. Sia x la probabilità che esca 1, si ha:

$$p(1) = x, p(2) = \frac{x}{2}, p(3) = \frac{x}{4}, p(4) = \frac{x}{8}$$

sommando tali probabilità e facendo in modo che la somma sia 1, si ricava:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = 1 \rightarrow x = \frac{8}{15}$$

per cui

$$p(1) = \frac{8}{15}, p(2) = \frac{4}{15}, p(3) = \frac{2}{15}, p(4) = \frac{1}{15}$$

La probabilità che, lanciando i due dadi, escono 2 numeri uguali è:

$$p = p^2(1) + p^2(2) + p^2(3) + p^2(4) = \frac{64}{225} + \frac{16}{225} + \frac{4}{225} + \frac{1}{225} = \frac{17}{45}$$

3. La retta e la curva sono tangenti nel punto in cui il coefficiente angolare della retta coincide con il valore della derivata prima della curva nell'ascissa del punto di tangenza; detto (a, b) il punto di tangenza si deve imporre la seguente uguaglianza:

$$y'(a) = 3a^2 - 8a = -4 \rightarrow 3a^2 - 8a + 4 = 0 \rightarrow a = \frac{4 \pm 2}{3} \rightarrow a = 2, a = \frac{2}{3}$$

Per $a = 2$ il punto di tangenza è $(2, -3)$ pertanto imponendo il passaggio di tale punto per la retta si ottiene $k = 5$.

Per $a = \frac{2}{3}$ il punto di tangenza è $(\frac{2}{3}, \frac{95}{27})$ pertanto imponendo il passaggio di tale punto per la retta si ottiene $k = \frac{167}{27}$.

4. Ricordiamo che le funzioni seno e coseno sono limitate in $[-1, 1]$, pertanto in un intorno di $+\infty$ sia $e^{\sin x}$ che $(5 + e^{-x} - \cos x)$ sono valori limitati, di conseguenza

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - e^{\sin x}}{(5 + e^{-x} - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$$

In un intorno di $-\infty$ sia $e^{\sin x}$ che $(5 - \cos x)$ sono valori limitati, mentre e^{-x} diverge di conseguenza

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - e^{\sin x}}{(5 + e^{-x} - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{e^{-x}}$$

ed applicando il teorema di de l'Hospital si ricava che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-e^{-x}} = 0$$

5. Sia a la base del rettangolo e b la sua altezza.

Sapendo che il recinto è pari a 2 metri si ha:

$$a + 2b + \pi \cdot \frac{a}{2} = 2 \rightarrow 2b = 2 - \frac{a(2 + \pi)}{2} \rightarrow b = 1 - \frac{a(2 + \pi)}{4}$$

L'area del recinto è pertanto pari a:

$$S_R(a) = a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a \cdot \left[1 - \frac{a(2 + \pi)}{4}\right] + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Tale area è massima nei punti in cui si annulla la derivata prima ovvero:

$$S'_R(a) = 1 - \frac{a(2 + \pi)}{2} + \pi \cdot \frac{a}{4} = 1 - a - \pi \cdot \frac{a}{2} + \pi \cdot \frac{a}{4} = 1 - a \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

L'area è quindi massima per

$$S'_R(a) = 0 \rightarrow a = \frac{4}{\pi + 4}$$

Quindi le dimensioni del rettangolo sono:

$$a = \frac{4}{\pi + 4}, b = 1 - \frac{(2 + \pi)}{\pi + 4} = \frac{2}{\pi + 4}$$

6. L'equazione della retta s perpendicolare al piano π e passante per $T = (-4, 0, 1)$ ha equazione:

$$\begin{cases} x = -4 + 3k \\ y = 0 - k \\ z = 1 - 2k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -4 + 3k \\ y = -k \\ z = 1 - 2k \end{cases}$$

Poichè il centro C della superficie sferica appartiene alla retta r , ha coordinate del tipo $C = (t, t, t)$ ed appartiene anche alla retta s si ha:

$$\begin{cases} t = -4 + 3k \\ t = -k \\ t = 1 - 2k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -k = -4 + 3k \\ t = -k \\ t = 1 - 2k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

La superficie sferica ha centro $C = (-1, -1, -1)$ e raggio

$$R = \sqrt{(-4 + 1)^2 + (0 + 1)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{14}$$

Di conseguenza l'equazione della superficie sferica è:

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 14$$

7. Si ha:

$$\int_a^{a+1} (3x^2 + 3)dx = [x^3 + 3x]_a^{a+1} = (a+1)^3 + 3(a+1) - a^3 - 3a = 3a^2 + 3a + 4$$

Imponendo che tale valore sia pari a 10 si ha:

$$3a^2 + 3a + 4 = 10 \rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \rightarrow a = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow a = -2, a = 1$$

8. Indichiamo con X il numero di partite vinte da un giocatore su un totale di 12 partite. La distribuzione di probabilità di vincita è:

$$p(X = k) = \binom{12}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12-k} = \binom{12}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

Un giocatore vince la gara in 2 possibili casi:

- il primo vince almeno 10 partite su 12;
- il secondo ne perde al massimo 2;

quindi la probabilità che un giocatore vinca la gara su 12 partite è pari a:

$$\begin{aligned} p(X \geq 10) + p(X \leq 2) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot \left[\binom{12}{10} + \binom{12}{11} + \binom{12}{12} + \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} \right] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot [66 + 12 + 1 + 1 + 12 + 66] = \frac{79}{2^{11}} \end{aligned}$$

9. Il triangolo è equilatero in quanto i tre lati hanno tutti la stessa lunghezza pari a $2\sqrt{2}$.

Inoltre per sostituzione si verifica che i tre vertici del triangolo appartengono all'equazione del piano $x + y + z - 4 = 0$.

Il vertice del tetraedro appartiene alla retta passante per il baricentro del triangolo che ha coordinate:

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right) \equiv \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

La retta cui appartiene il vertice del tetraedro ha quindi equazione:

$$\begin{cases} x = \frac{7}{3} + t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{4}{3} + t \end{cases}$$

di conseguenza il quarto vertice del tetraedro ha coordinate $\left(\frac{7}{3} + t, \frac{1}{3} + t, \frac{4}{3} + t\right)$.

Imponendo $\overline{PA} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \overline{PA}^2 = 8$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{7}{3} + t - 3\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + t - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} + t - 0\right)^2 &= 8 \rightarrow \left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(t + \frac{4}{3}\right)^2 = 8 \\ &\rightarrow 2\left(t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9}\right) + \left(t^2 + \frac{8}{3}t + \frac{16}{9}\right) = 8 \rightarrow 3t^2 + \frac{24}{9} = 8 \rightarrow t^2 = \frac{16}{9} \rightarrow t = \pm \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Di conseguenza il vertice del tetraedro può essere:

$$\left(\frac{11}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right), (1, -1, 0)$$

10. Le derivate prima e seconda della funzione soluzione sono:

$$y'(x) = 2ke^{kx+2}$$

$$y''(x) = 2k^2e^{kx+2}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ricava:

$$2k^2e^{kx+2} - 2 \cdot 2ke^{kx+2} - 3 \cdot 2e^{kx+2} = 0 \rightarrow k^2 - 2k - 3 = 0 \rightarrow k = 1 \pm 2 \rightarrow k = 3, k = -1$$