

Esame di stato di istruzione secondaria superiore
Indirizzi: Scientifico opzione internazionale tedesca e opzione internazionale
francese

Tema di matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario

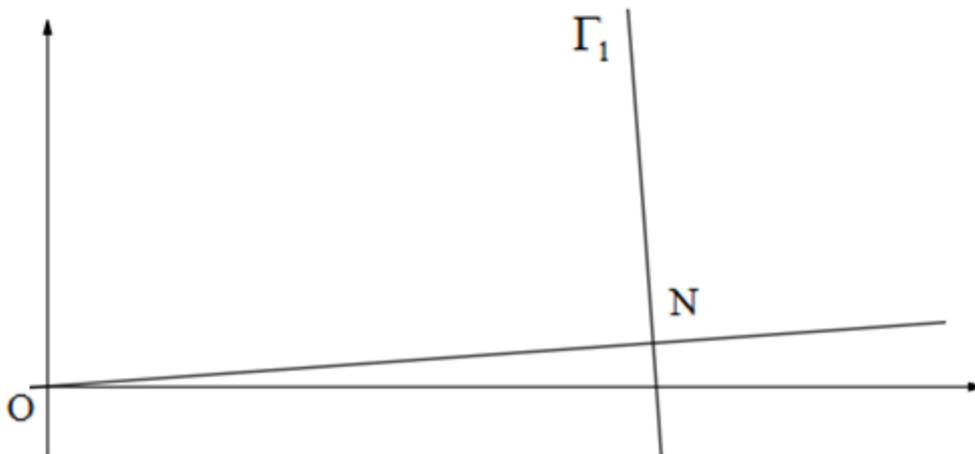
PROBLEMA 1

Consideriamo la funzione $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k , tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k , tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$;
2. Dopo aver verificato che $k = 1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.
3. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1 , s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P(x_p, y_p)$ all'interno di T , questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_p > f_1(x)$ per tale punto P).
4. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1 . La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O . Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n - 1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.



SVOLGIMENTO

Punto 1

Il punto ad ascissa 0 è (0,9) mentre il punto ad ascissa 1 è (1,k+8).

La retta r_k ha equazione $y = f'_k(0)x + 9$ dove $f'_k(0) = [-3x^2 + k]_{x=0} = k$ pertanto la retta r_k ha equazione $y = kx + 9$.

La retta s_k ha equazione $y = f'_k(1)(x - 1) + k + 8$ dove $f'_k(1) = [-3x^2 + k]_{x=1} = k - 3$ pertanto la retta s_k ha equazione $y = (k - 3)(x - 1) + k + 8$.

Tali rette si intersecano in un punto che soddisfa la seguente equazione:

$$kx + 9 = (k - 3)(x - 1) + k + 8 \rightarrow kx + 9 = kx - k - 3x + 3 + k + 8 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Il punto M ha coordinate $M = \left(\frac{2}{3}, \frac{2k}{3} + 9\right)$

Punto 2

L'ordinata del punto M è:

$$f_k\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}k + \frac{235}{27}$$

Si ha:

$$f_k\left(\frac{2}{3}\right) < 10 \rightarrow \frac{2}{3}k + \frac{235}{27} < 10 \rightarrow \frac{2}{3}k < \frac{35}{27} \rightarrow k < \frac{35}{18} \cong 1.94$$

di conseguenza $k=1$ è il massimo intero positivo affinché l'ordinata del punto M sia minore di 10.

Studiamo la funzione $f_1(x) = -x^3 + x + 9$.

- **Dominio:** R
- **Intersezioni asse ascisse:** trattandosi di una cubica, possiamo applicare il metodo di Cardano per individuare le soluzioni dell'equazione $f_1(x) = -x^3 + x + 9 = 0$; tale metodo dice che, in presenza di una equazione di terzo grado del tipo $x^3 + px + q = 0$ la soluzione è

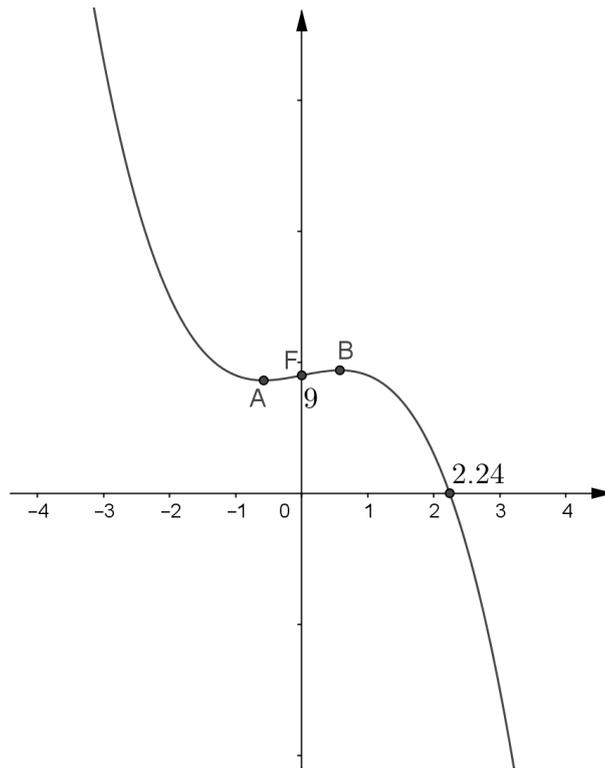
$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Nel caso in esame $f_1(x) = -x^3 + x + 9 = 0 \Rightarrow x^3 - x - 9 = 0$ pertanto i parametri p e q sono $p = -1, q = -9$ da cui si ricava

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{1}{27}}} \cong 2.24$$

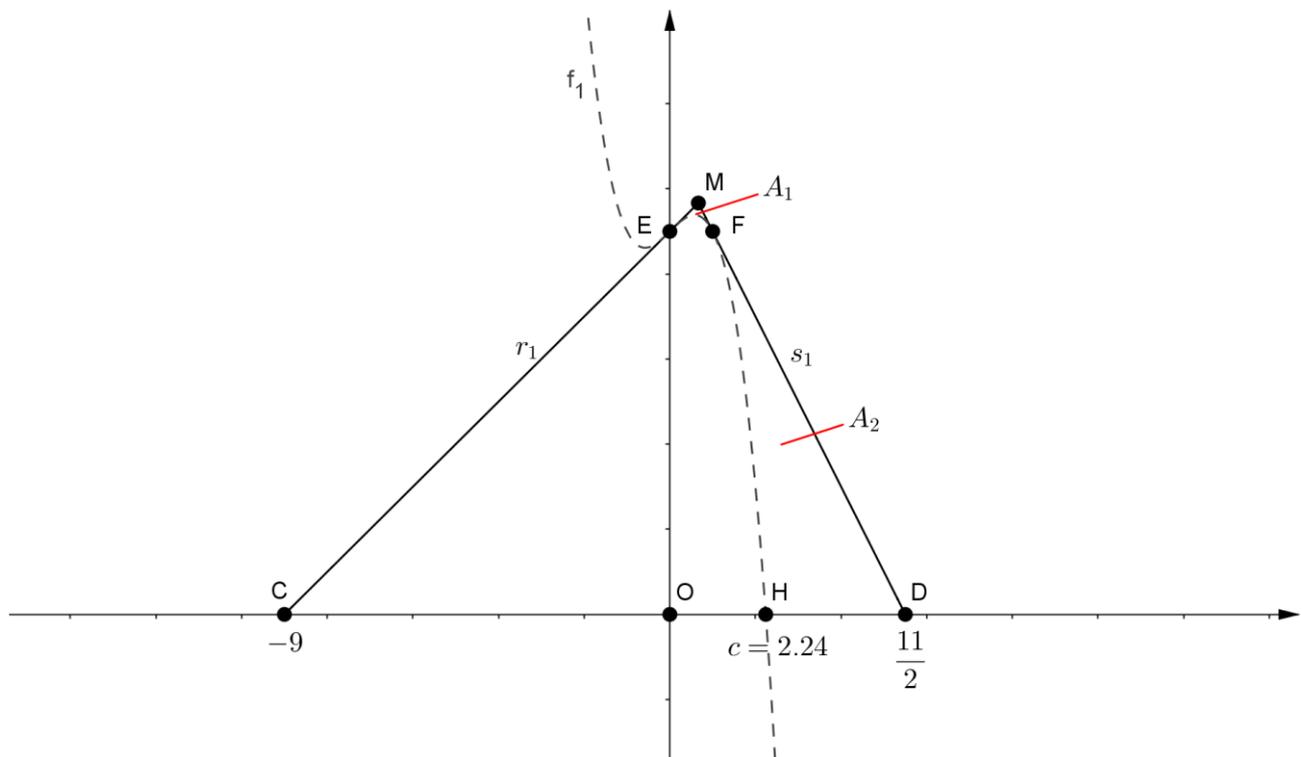
- **Intersezioni asse ordinate:** $x = 0 \rightarrow y = 9$;
- **Simmetria:** non è nè pari nè dispari;
- **Asintoti verticali:** non ve ne sono;
- **Asintoti orizzontali:** non ve ne sono in quanto $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_1(x) = \mp\infty$;
- **Asintoti verticali:** non ve ne sono;
- **Crescenza e decrescenza:** la derivata prima è $f_1'(x) = -3x^2 + 1$ pertanto la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ e strettamente decrescente in $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$;
- **Concavità e convessità:** la derivata seconda è $f_1''(x) = -6x$ pertanto la funzione volge concavità verso l'alto nell'intervallo $(0, +\infty)$ e verso il basso in $(-\infty, 0)$ di conseguenza il punto $F=(0,9)$ è un flesso a tangente obliqua; inoltre essendo $f_1''(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 2\sqrt{3}$ e $f_1''(\frac{\sqrt{3}}{3}) = -2\sqrt{3}$ si deduce che $A = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, 9 - \frac{2\sqrt{3}}{9})$ è un punto di minimo relativo e $B = (\frac{\sqrt{3}}{3}, 9 + \frac{2\sqrt{3}}{9})$ è un punto di massimo relativo.
- **Positività:** visto che la funzione è strettamente decrescente $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ e che l'ascissa di minimo è positiva, deduciamo che la funzione è positiva nell'intervallo $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$; analogamente visto che la funzione è strettamente crescente in $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ deduciamo che è positiva anche in $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$; inoltre visto che la funzione è strettamente decrescente in $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ e che $f(2.24) = 0$ deduciamo che la funzione è negativa per $x > 2.24$ e positiva di conseguenza in $(-\infty, 2.24)$.

Di seguito il grafico.



Punto 3

Consideriamo la figura seguente in cui sono rappresentate nello stesso riferimento cartesiano le rette $r_1: y = x + 9$, $s_1: y = -2x + 11$ e la cubica $f_1(x) = -x^3 + x + 9$.



La condizione $y_P > f_1(x)$ è soddisfatta dai punti che appartengono alle seguenti 2 regioni di piano:

- A_1 : triangolo mistilineo MEF
- A_2 : triangolo mistilineo HFD

Per calcolare la somma di tali 2 aree conviene calcolare l'area del triangolo MCD e sottrarre l'area del triangolo EOC e l'area sottesa da $f_1(x)$ con l'asse delle ascisse.

L'area del triangolo MCD è pari a:

$$S(MCD) = \frac{\overline{CD} \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{29}{2}\right) \cdot \left(\frac{29}{3}\right) = \frac{841}{12}$$

L'area del triangolo EOC è pari a:

$$S(EOC) = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{EO}}{2} = \frac{1}{2} \cdot (9) \cdot (9) = \frac{81}{2}$$

Detta c l'ascissa di intersezione di $f_1(x)$ con l'asse delle ascisse, l'area sottesa da $f_1(x)$ con l'asse delle ascisse è pari a:

$$\int_0^c f_1(x) dx = \int_0^c (-x^3 + x + 9) dx = -\frac{c^4}{4} + \frac{c^2}{2} + 9c$$

Il valore di c calcolato con il metodo di Cardano è $c = 2.24$ di conseguenza

$$\int_0^c f_1(x) dx = -\frac{c^4}{4} + \frac{c^2}{2} + 9c \cong 16.38$$

La probabilità richiesta è quindi pari a:

$$p = \frac{\frac{841}{12} - \frac{81}{2} - 16.38}{\frac{841}{12}} \cong 0.189 = 18.9\%$$

Punto 4

Sia $P_n(x)$ un polinomio di grado n .

La normale a tale polinomio in un punto (x_0, y_0) ha equazione:

$$y = -\frac{1}{P'_n(x_0)}(x - x_0) + P_n(x_0)$$

Tale retta passa per l'origine se

$$-\frac{1}{P'_n(x_0)}(0 - x_0) + P_n(x_0) = 0 \rightarrow P'_n(x_0) \cdot P_n(x_0) + x_0 = 0$$

Se $P_n(x)$ ha grado n , la sua derivata prima ha grado $(n - 1)$ pertanto $P'_n(x_0) \cdot P_n(x_0)$ ha grado $(2n - 1)$ e di conseguenza, per il teorema fondamentale dell'Algebra, l'equazione

$$P'_n(x_0) \cdot P_n(x_0) + x_0 = 0$$

ha al più $(2n - 1)$ radici e quindi non esistono più di $(2n - 1)$ punti in cui la normale passa per l'origine.

PROBLEMA 2

Siano $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $g: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ rispettivamente le funzioni *parte intera* e *parte frazionaria* (o *mantissa*) di un numero $x \in \mathfrak{R}$. Tali funzioni sono così definite:

$$f(x) = \max\{m \in \mathbb{Z} | m \leq x\} \text{ e } g(x) = x - f(x)$$

Pertanto, ad esempio, $f(\pi) = 3, g(4,79) = 0,79$.

1. A partire dalle definizioni delle funzioni f e g , mostra che per ogni $x \in \mathfrak{R}$ si ha $0 \leq g(x) < 1$. Disegna i grafici delle funzioni f e g determinando esplicitamente i loro punti di discontinuità e, eventualmente, i relativi salti.
2. Dopo aver verificato che la funzione g è periodica di periodo 1, calcola la media di g nell'intervallo $[0, n]$ qualsiasi sia $n \in \mathbb{N}, n > 0$. Calcola inoltre la media di g nell'intervallo $\left[0, n + \frac{1}{2}\right]$, e determina il limite a cui tale media tende per $n \rightarrow \infty$.
3. Calcola il volume del solido ottenuto dalla rotazione di $\frac{\pi}{6}$ radianti intorno all'asse x della regione di piano delimitata dai grafici di f e g nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
4. Stabilisci per quali valori dei parametri reali a, b, c, d la funzione $h: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ definita dalla legge:

$$h(x) = a + b \cdot \sin(cx + d)$$

verifica le seguenti condizioni¹

$$\min g = \min h, \sup g = \max h, 2h'' + 2h - 1 = 0$$

Quante sono le funzioni siffatte?

¹ $\min g$ = minimo della funzione g ,

$\sup g$ = estremo superiore della funzione g ,

$\max h$ = massimo della funzione h

SVOLGIMENTO

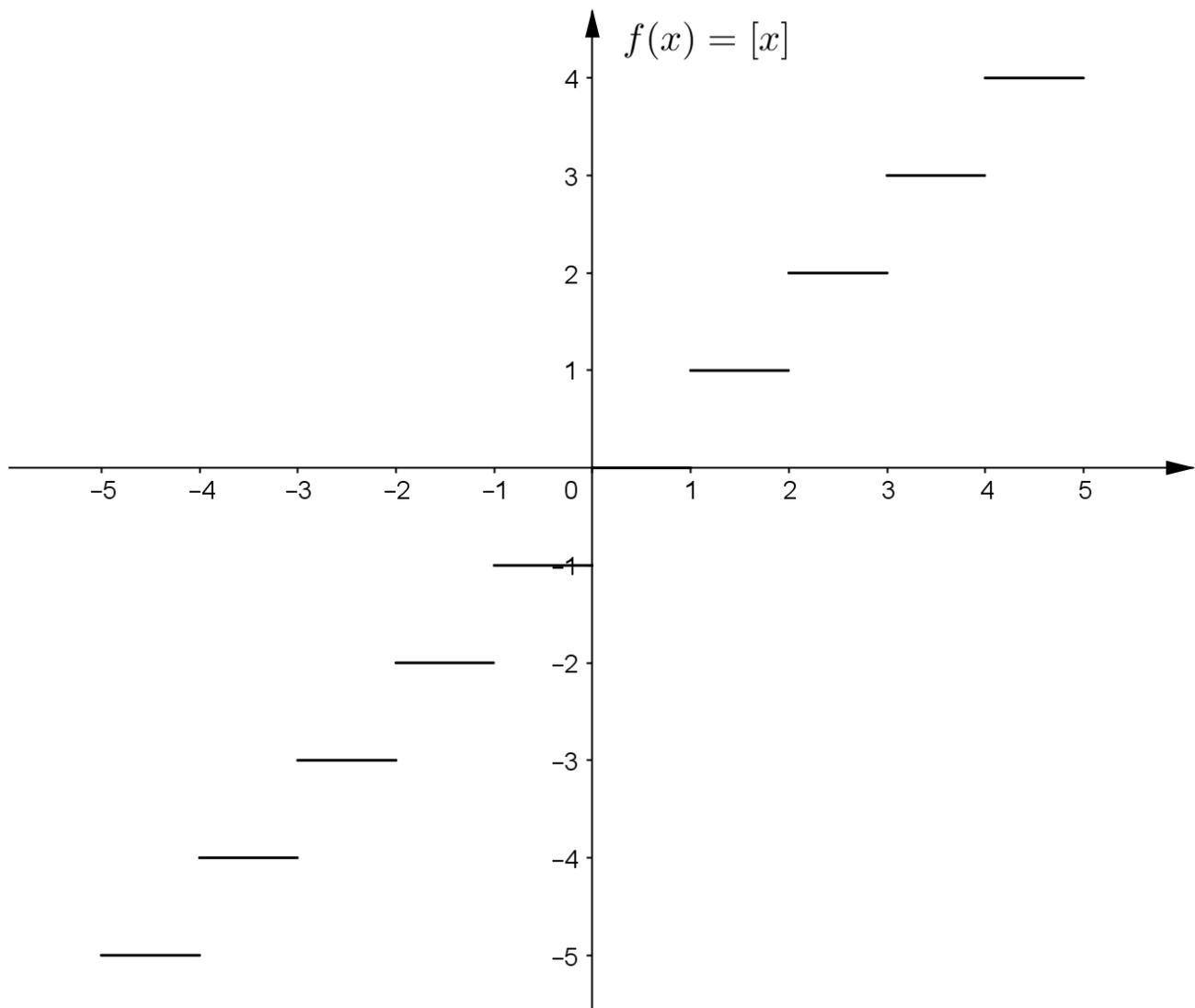
Punto 1

Per ogni x , essendo $f(x) = \max\{m \in \mathbb{Z} | m \leq x\}$, si ha che:

$$x - 1 < f(x) \leq x \rightarrow -1 < f(x) - x \leq 0 \rightarrow 0 \leq x - f(x) < 1$$

ovvero $0 \leq g(x) < 1$.

Di seguito il grafico della funzione $y = [x]$ ovvero la parte intera di x .

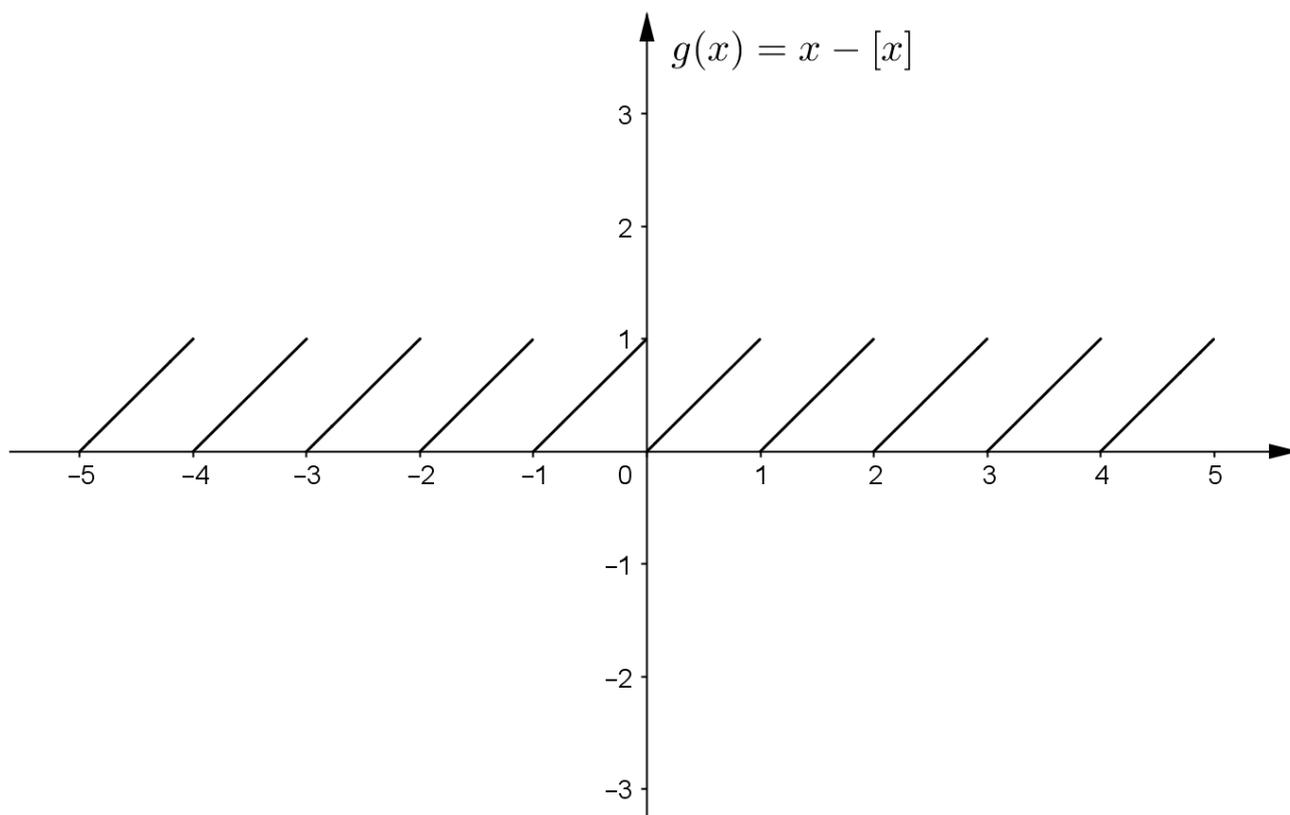


I punti di discontinuità di $f(x)$ sono infiniti, di prima specie e situati alle ascisse $x = k, k \in \mathbb{Z}$.

Il salto è pari a:

$$f(x_k^+) - f(x_k^-) = k - (k - 1) = 1$$

Di seguito il grafico della funzione parte frazionaria di x :



I punti di discontinuità di $g(x)$ sono infiniti, di prima specie e situati alle ascisse $x = k, k \in \mathbb{Z}$.
Il salto è pari a:

$$g(x_k^+) - g(x_k^-) = 0 - 1 = -1$$

Punto 2

Come si nota dal grafico, $g(x)$ è periodica di periodo 1.

La media di $g(x)$ nell'intervallo $[0, n]$ qualsiasi sia $n \in \mathbb{N}, n > 0$ è pari a:

$$M(g) = \frac{1}{n} \int_0^n g(x) dx = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Alternativamente basta notare che nell'intervallo $[0, n]$ ci sono n triangoli rettangoli isoscele di area $\frac{1}{2}$ pertanto la media in $[0, n]$ coincide con l'area di ogni triangolo.

La media di $g(x)$ nell'intervallo $[0, n + \frac{1}{2}]$ qualsiasi sia $n \in \mathbb{N}, n > 0$ è pari a:

$$\begin{aligned} M(g) &= \frac{1}{(n + \frac{1}{2})} \int_n^{n+\frac{1}{2}} g(x) dx = \frac{1}{(n + \frac{1}{2})} \left[\int_0^n g(x) dx + \int_n^{n+\frac{1}{2}} g(x) dx \right] = \\ &= \frac{1}{(n + \frac{1}{2})} \left[n \cdot \int_0^1 g(x) dx + \int_n^{n+\frac{1}{2}} (x - n) dx \right] = \\ &= \frac{1}{(n + \frac{1}{2})} \left\{ \frac{n}{2} + \left[\frac{(x - n)^2}{2} \right]_n^{n+\frac{1}{2}} \right\} = \frac{1}{(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{8} \right) = \frac{4n + 1}{4(2n + 1)} \end{aligned}$$

Il limite per $n \rightarrow \infty$ è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 1}{4(2n + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 1}{8n + 4} = \frac{1}{2}$$

Punto 3

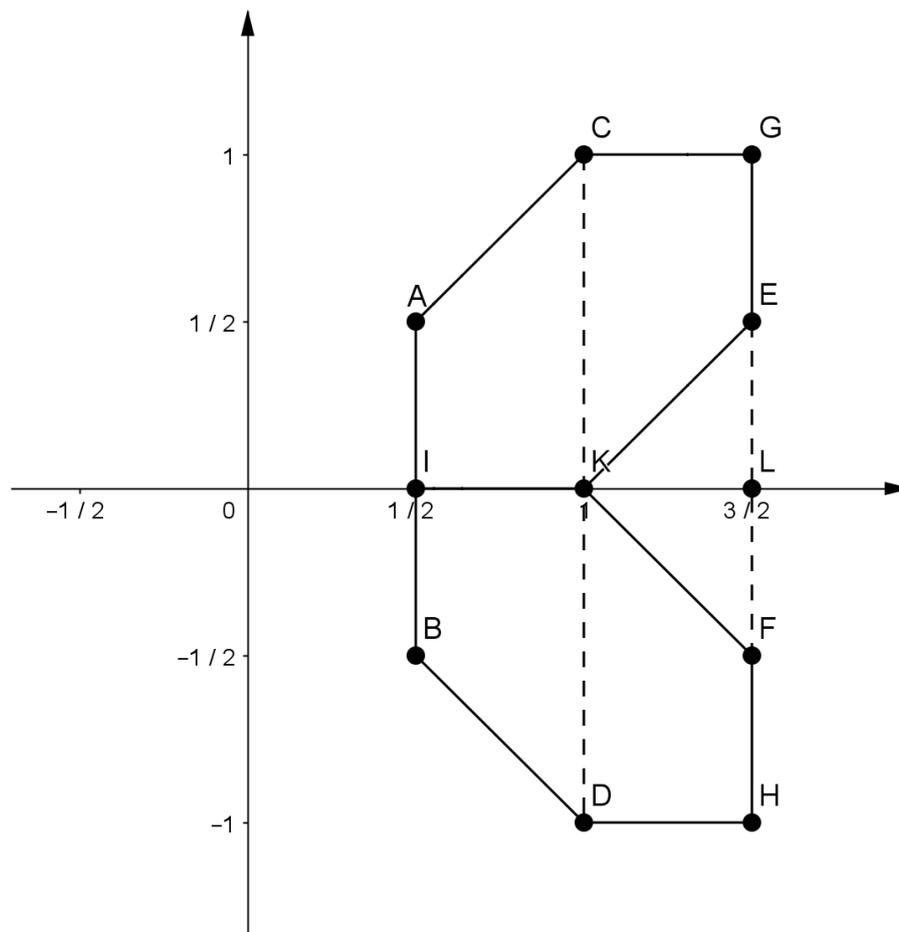
Sia $V_{2\pi}$ il volume ottenuto dalla rotazione completa intorno all'asse delle ascisse della regione di piano tra f e g nell'intervallo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ e V_α il volume ottenuto dalla rotazione di un angolo α . Vale la proporzione seguente:

$$V_{2\pi} : 2\pi = V_\alpha : \alpha$$

da cui si deduce

$$V_{\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi} V_{2\pi} = \frac{1}{12} V_{2\pi}$$

Consideriamo la figura seguente che rappresenta, in sezione, la rotazione di un giro intero attorno all'asse delle ascisse della regione di piano tra f e g nell'intervallo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.



Il volume $V_{2\pi}$ è dato da:

$$V_{2\pi} = V_{\text{TRONCO DI CONO}}(ABDC) + V_{\text{CILINDRO}}(CDHG) - V_{\text{CONO}}(EKF)$$

Si ha:

$$V_{\text{TRONCO DI CONO}}(ABDC) = \frac{\pi}{3} \cdot \overline{IK} \cdot (\overline{CK}^2 + \overline{AI}^2 + \overline{CK} \cdot \overline{AI}) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7\pi}{24}$$

$$V_{\text{CILINDRO}}(CDHG) = \pi \cdot \overline{KL} \cdot \overline{CK}^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$V_{\text{CONO}}(EKF) = \frac{\pi}{3} \cdot \overline{KL} \cdot \overline{EL}^2 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{24}$$

di conseguenza

$$V_{2\pi} = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24} = \frac{3\pi}{4}$$

$$V_{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{12} V_{2\pi} = \frac{\pi}{16}$$

Alternativamente, notando che la retta AC ha equazione $y = x$ e la retta EK ha equazione $y = x - 1$ il volume $V_{2\pi}$ è pari a:

$$\begin{aligned} V_{2\pi} &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (x^2 - 0^2) dx + \pi \int_1^{\frac{3}{2}} [1^2 - (x-1)^2] dx = \\ &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx + \pi \int_1^{\frac{3}{2}} (2x - x^2) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \pi \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^{\frac{3}{2}} = \\ &= \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24} \right) + \pi \left[\left(\frac{9}{4} - \frac{27}{24} \right) - \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{7}{24} \pi + \frac{11}{24} \pi = \frac{3}{4} \pi \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$V_{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{12} V_{2\pi} = \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{4} \pi = \frac{\pi}{16}$$

Punto 4

Come si evince dal grafico di $g(x)$ si ha:

$$\min(g) = 0, \sup(g) = 1$$

La funzione $h(x) = a + b \cdot \sin(cx + d)$ è massima se $\sin(cx + d) = 1$ pertanto

$$\max(h) = a + |b|$$

La funzione $h(x) = a + b \cdot \sin(cx + d)$ è minima se $\sin(cx + d) = -1$ pertanto

$$\min(h) = a - |b|$$

Quindi imponendo le due condizioni seguenti si ha:

$$\begin{cases} \min(g) = \min(h) \\ \sup(g) = \max(h) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - |b| = 0 \\ a + |b| = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi le funzione $h(x)$ sono:

$$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(cx + d)$$

$$h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin(cx + d)$$

Consideriamo ora $h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(cx + d)$.

Calcoliamo ora la derivata seconda di $h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(cx + d)$, si ha:

$$h''(x) = -\frac{c^2}{2} \cdot \sin(cx + d)$$

Imponendo la condizione $2h'' + 2h - 1 = 0$ si ricava:

$$-c^2 \cdot \sin(cx + d) + 1 + \sin(cx + d) - 1 = 0 \rightarrow \sin(cx + d) \cdot (1 - c^2) = 0 \rightarrow c = \pm 1$$

Quindi le funzioni che soddisfano le condizioni indicate sono infinite, periodiche di 2π e del tipo

$$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(\pm x + d), d \in \mathbb{R}$$

Consideriamo ora $h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin(cx + d)$.

Calcoliamo ora la derivata seconda di $h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin(cx + d)$, si ha:

$$h''(x) = +\frac{c^2}{2} \cdot \sin(cx + d)$$

Imponendo la condizione $2h'' + 2h - 1 = 0$ si ricava:

$$c^2 \cdot \sin(cx + d) + 1 - \sin(cx + d) - 1 = 0 \rightarrow \sin(cx + d) \cdot (c^2 - 1) = 0 \rightarrow c = \pm 1$$

Quindi le funzioni che soddisfano le condizioni indicate sono infinite, periodiche di 2π e del tipo

$$h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin(\pm x + d), d \in \mathbb{R}$$

In conclusione le funzioni richieste sono infinite, periodiche di 2π e del tipo

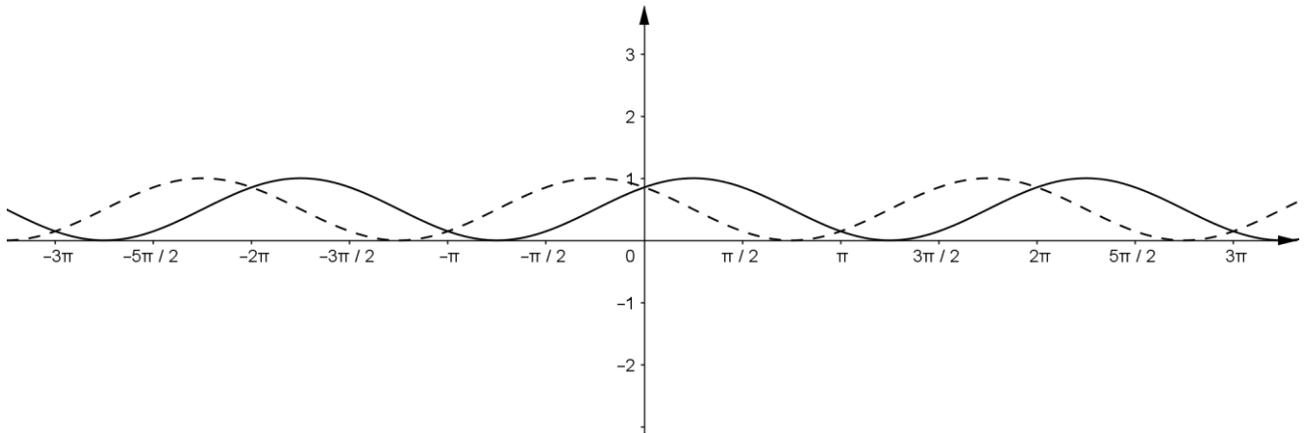
$$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(\pm x + d), d \in \mathbb{R}$$

$$h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin(\pm x + d), d \in \mathbb{R}$$

Di seguito vengono mostrati i grafici:

$$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ in linea continua}$$

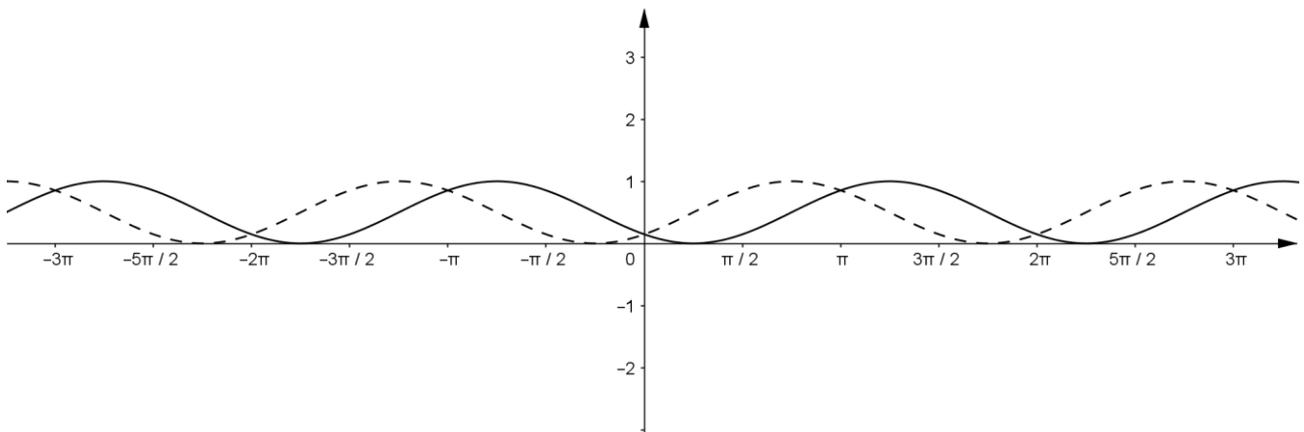
$$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ in linea tratteggiata}$$



Di seguito vengono mostrati i grafici:

$$h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ in linea continua}$$

$$h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ in linea tratteggiata}$$



QUESTIONARIO

1. Dimostrare che il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono.
2. Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?
3. Determinare i valori di k tali che la retta di equazione $y = -4x + k$ sia tangente alla curva di equazione $y = x^3 - 4x^2 + 5$.
4. Considerata la funzione $f(x) = \frac{3x - e^{\sin x}}{(5 + e^{-x} - \cos x)}$, determinare, se esistono, i valori di $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, giustificando adeguatamente le risposte fornite.
5. Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come in figura:



Determinare le dimensioni dei lati del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.

6. Determinare a in modo che:

$$\int_a^{a+1} (3x^2 + 3) dx$$

Sia uguale a 10.

7. Trovare l'area R della regione di spazio racchiusa dalla curva

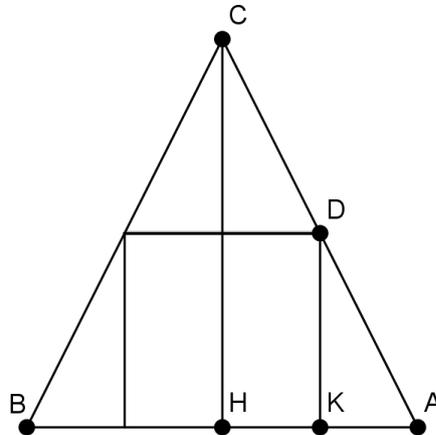
$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \text{per } 4 \leq x \leq 9$$

Sapendo inoltre che la retta di equazione $x = k$ divide R in due figure di egual area, determinare il valore di k .

8. Verificare che, qualunque siano le costanti reali φ e k , la funzione $y = ke^{-x} \sin(x + \varphi)$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + 2y = 0$. Trovare φ e k tali che questa funzione abbia un punto di massimo di coordinate $(0,1)$.

SVOLGIMENTO

1. Consideriamo la figura seguente.



Supponiamo che l'altezza del cono sia pari ad H ed il raggio di base R e che l'altezza del cilindro sia h con $0 < h < H$ ed il raggio di base r con $0 < r < R$.

I triangoli CHA e DKA sono simili pertanto si ha:

$$H:R = h:(R-r) \rightarrow h = \frac{H}{R}(R-r) = H\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

Il volume del cono è:

$$V_{CONO} = \frac{1}{3}\pi HR^2$$

mentre il volume del cilindro è

$$V_{CILINDRO} = \pi hr^2 = \pi r^2 H \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

Il rapporto tra il volume del cilindro e quello del cono è:

$$f(r) = \frac{V_{CILINDRO}}{V_{CONO}} = \frac{\pi r^2 H \left(1 - \frac{r}{R}\right)}{\frac{1}{3}\pi HR^2} = \frac{3}{R^3}(Rr^2 - r^3)$$

Calcoliamo il valore del raggio r in corrispondenza del quale il rapporto tra i volumi raggiunge il valore massimo. Tale valore è da ricercare tra i valori che annullano la derivata prima di $f(r)$:

$$f'(r) = \frac{3}{R^3}(2Rr - 3r^2)$$

La derivata prima si annulla per $r = 0$, $r = \frac{2R}{3}$ ed è positiva se $r \in \left(0, \frac{2R}{3}\right)$ pertanto il valore massimo del rapporto lo si raggiunge per $r = \frac{2R}{3}$ ed è quindi pari a

$$f\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{3}{R^3} \left[R \left(\frac{2R}{3}\right)^2 - \left(\frac{2R}{3}\right)^3 \right] = \frac{4}{9}$$

Essendo tale rapporto inferiore ad $\frac{1}{2}$ si deduce che il cilindro inscritto ha un volume che è sempre minore della metà del volume del cono circoscritto.

2. Sia x la probabilità che esca 1, si ha:

$$p(1) = x, p(2) = \frac{x}{2}, p(3) = \frac{x}{4}, p(4) = \frac{x}{8}$$

sommando tali probabilità e facendo in modo che la somma sia 1, si ricava:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = 1 \rightarrow x = \frac{8}{15}$$

per cui

$$p(1) = \frac{8}{15}, p(2) = \frac{4}{15}, p(3) = \frac{2}{15}, p(4) = \frac{1}{15}$$

La probabilità che, lanciando i due dadi, escono 2 numeri uguali è:

$$p = p^2(1) + p^2(2) + p^2(3) + p^2(4) = \frac{64}{225} + \frac{16}{225} + \frac{4}{225} + \frac{1}{225} = \frac{17}{45}$$

3. La retta e la curva sono tangenti nel punto in cui il coefficiente angolare della retta coincide con il valore della derivata prima della curva nell'ascissa del punto di tangenza; detto (a, b) il punto di tangenza si deve imporre la seguente uguaglianza:

$$y'(a) = 3a^2 - 8a = -4 \rightarrow 3a^2 - 8a + 4 = 0 \rightarrow a = \frac{4 \pm 2}{3} \rightarrow a = 2, a = \frac{2}{3}$$

Per $a = 2$ il punto di tangenza è $(2, -3)$ pertanto imponendo il passaggio di tale punto per la retta si ottiene $k = 5$.

Per $a = \frac{2}{3}$ il punto di tangenza è $\left(\frac{2}{3}, \frac{95}{27}\right)$ pertanto imponendo il passaggio di tale punto per la retta si ottiene $k = \frac{167}{27}$.

4. Ricordiamo che le funzioni seno e coseno sono limitate in $[-1, 1]$, pertanto in un intorno di $+\infty$ sia $e^{\sin x}$ che $(5 + e^{-x} - \cos x)$ sono valori limitati, di conseguenza

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - e^{\sin x}}{(5 + e^{-x} - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$$

In un intorno di $-\infty$ sia $e^{\sin x}$ che $(5 - \cos x)$ sono valori limitati, mentre e^{-x} diverge di conseguenza

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - e^{\sin x}}{(5 + e^{-x} - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{e^{-x}}$$

ed applicando il teorema di de l'Hospital si ricava che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-e^{-x}} = 0$$

5. Sia a la base del rettangolo e b la sua altezza.

Sapendo che il recinto è pari a 2 metri si ha:

$$a + 2b + \pi \cdot \frac{a}{2} = 2 \rightarrow 2b = 2 - \frac{a(2 + \pi)}{2} \rightarrow b = 1 - \frac{a(2 + \pi)}{4}$$

L'area del recinto è pertanto pari a:

$$S_R(a) = a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a \cdot \left[1 - \frac{a(2 + \pi)}{4}\right] + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Tale area è massima nei punti in cui si annulla la derivata prima ovvero:

$$S'_R(a) = 1 - \frac{a(2 + \pi)}{2} + \pi \cdot \frac{a}{4} = 1 - a - \pi \cdot \frac{a}{2} + \pi \cdot \frac{a}{4} = 1 - a \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

L'area è quindi massima per

$$S'_R(a) = 0 \rightarrow a = \frac{4}{\pi + 4}$$

Quindi le dimensioni del rettangolo sono:

$$a = \frac{4}{\pi + 4}, b = 1 - \frac{(2 + \pi)}{\pi + 4} = \frac{2}{\pi + 4}$$

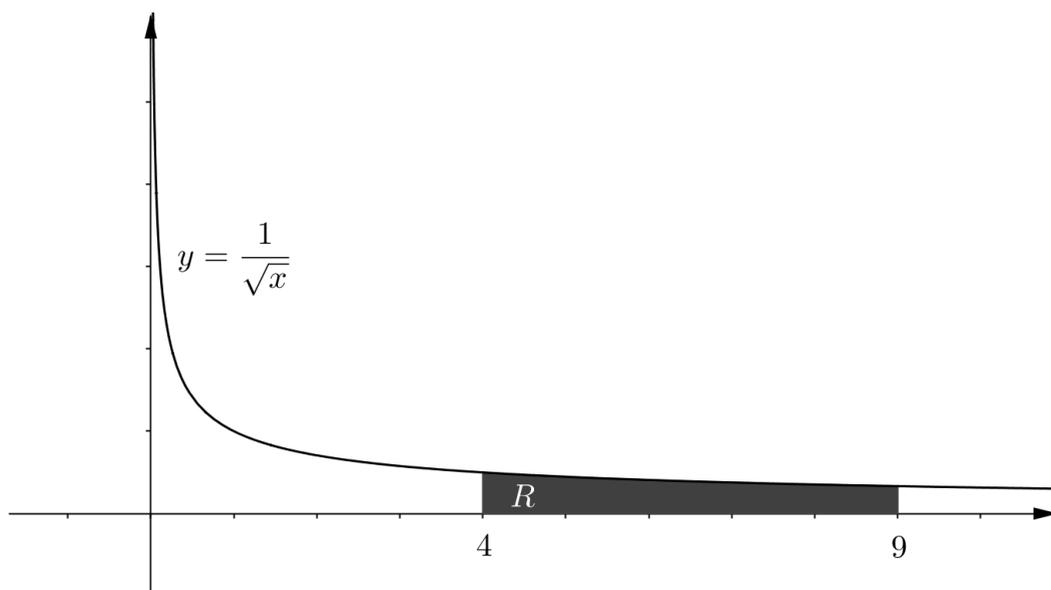
6. Si ha:

$$\int_a^{a+1} (3x^2 + 3)dx = [x^3 + 3x]_a^{a+1} = (a+1)^3 + 3(a+1) - a^3 - 3a = 3a^2 + 3a + 4$$

Imponendo che tale valore sia pari a 10 si ha:

$$3a^2 + 3a + 4 = 10 \rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \rightarrow a = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow a = -2, a = 1$$

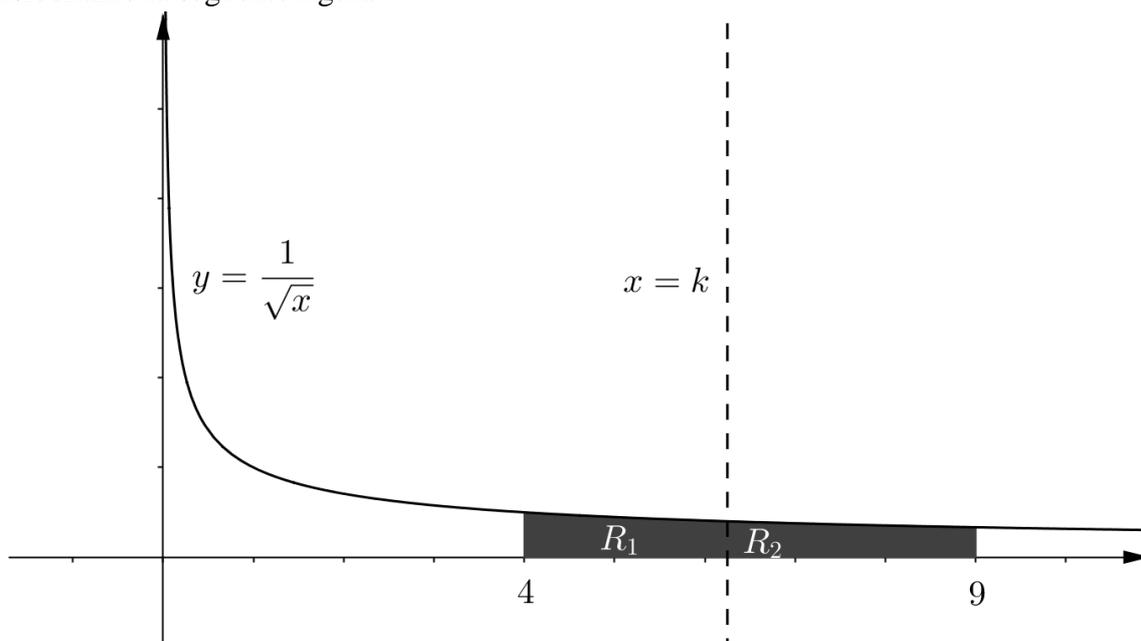
7. Consideriamo la seguente figura:



L'area richiesta è pari a:

$$S(R) = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_4^9 x^{-\frac{1}{2}} dx = [2\sqrt{x}]_4^9 = 6 - 4 = 2$$

Consideriamo la seguente figura.



Si ha:

$$\begin{aligned} S(R_1) = S(R_2) &\rightarrow \int_4^k \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_4^k \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_k^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \rightarrow [2\sqrt{x}]_4^k = [2\sqrt{x}]_k^9 \rightarrow \\ &\rightarrow 2\sqrt{k} - 4 = 6 - 2\sqrt{k} \rightarrow 4\sqrt{k} = 10 \rightarrow \sqrt{k} = \frac{5}{2} \rightarrow k = \frac{25}{4} \end{aligned}$$

8. L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale di secondo grado è:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda = -1 \pm i$$

Di conseguenza la generica soluzione di una tale equazione differenziale è

$$y = e^{-x}[A \sin(x) + B \cos(x)]$$

Riscriviamo la soluzione indicata nella traccia $y = ke^{-x} \sin(x + \varphi)$ sfruttando le proprietà della funzione seno:

$$y = ke^{-x} \sin(x + \varphi) = ke^{-x}[\sin(x) \cos(\varphi) + \cos(x) \sin(\varphi)]$$

Quindi ponendo

$$\begin{cases} A = k \cos(\varphi) \\ B = k \sin(\varphi) \end{cases}$$

le due equazioni diventano identiche.

Calcoliamo ora φ e k in funzione di A e B , si ha:

$$\begin{cases} \tan(\varphi) = \frac{B}{A} \\ k^2 = A^2 + B^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) \\ k = \sqrt{A^2 + B^2} \end{cases}$$

Di conseguenza, avendo dimostrato l'identità tra le due soluzioni, deduciamo che $y = ke^{-x} \sin(x + \varphi)$ è soluzione dell'equazione differenziale qualsiasi φ e k .

La soluzione $y = ke^{-x} \sin(x + \varphi)$ passa per $(0,1)$ se

$$k \sin(\varphi) = 1$$

ed ha un massimo in $(0,1)$ se la sua derivata prima

$$y' = -ke^{-x} \sin(x + \varphi) + ke^{-x} \cos(x + \varphi)$$

si annulla in $x = 0$ ovvero

$$-k \sin(\varphi) + k \cos(\varphi) = 0 \rightarrow \sin(\varphi) = \cos(\varphi) \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Di conseguenza

$$k \sin(\varphi) = 1 \rightarrow k \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \rightarrow k = \sqrt{2}$$

$$k \sin(\varphi) = 1 \rightarrow k \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow k \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \rightarrow k = -\sqrt{2}$$

e le funzioni richieste sono

$$y = \sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = -\sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4} + \pi\right) = \sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Di conseguenza la funzione richiesta è univoca e pari a

$$y = \sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$