

Esame di stato di istruzione secondaria superiore
Indirizzi: Scientifico Comunicazione Opzione Sportiva
Tema di matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario

PROBLEMA 1

Due archi illimitati di due parabole (con assi paralleli all'asse y di un sistema di riferimento), ciascuno dei quali contenente il vertice della parabola, sono disposti in modo da passare per tutti e quattro i quadranti del piano e raccordarsi nell'origine, formando il grafico Γ di una funzione:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x < 0 \\ f_2(x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

che è derivabile in $\mathbb{R}$. La figura 1 sottostante ne fornisce un possibile esempio.

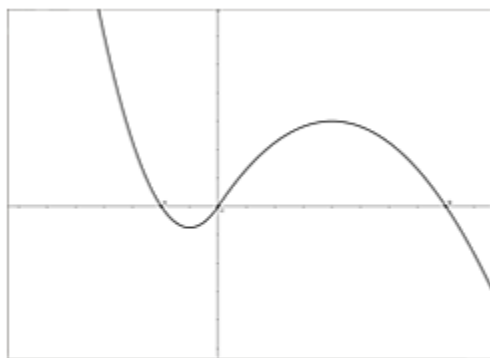


Figura 1

Il grafico Γ interseca l'asse x nell'origine O e nei punti A di ascissa $x_A < 0$ e B di ascissa $x_B > 0$.

1) Dimostra che, se la funzione f soddisfa le richieste precedenti, si ha:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^2 + bx \\ f_2(x) &= cx^2 + bx \end{aligned}$$

dove a, b, c sono opportuni coefficienti reali non nulli. Dimostra che le rette tangenti a Γ in A e in B sono parallele.

2) Considerando le funzioni

$$\begin{aligned} g(x) &= f'(x) \\ F(x) &= \int_0^x f(t)dt \end{aligned}$$

mostra, con le opportune argomentazioni, che il grafico di g è costituito da due semirette che intersecano l'asse x nei punti di ascisse $\frac{x_A}{2}$ e $\frac{x_B}{2}$ e che il grafico di F ha due punti stazionari di ascisse x_A e x_B e due punti di flesso di ascisse $\frac{x_A}{2}$ e $\frac{x_B}{2}$.

- 3) Determina le espressioni di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ in modo tale che la retta tangente a Γ nel punto A abbia equazione $y = -2x - 8$ e l'area della superficie limitata compresa tra Γ e l'asse x contenuta nel semipiano $x > 0$ sia pari a 9 volte quella dell'analogha superficie contenuta nel semipiano $x < 0$.
- 4) Dimostra che anche il rapporto tra le aree dei triangoli formati dalle rette tangenti al grafico Γ nei punti A , O e B e l'asse delle ascisse è pari a 9.

SVOLGIMENTO

Punto 1

Valgono le seguenti considerazioni:

- Poichè i grafici di entrambe le parabole passano per l'origine allora le relative equazioni quadratiche devono avere coefficiente noto nullo.
- Poichè l'arco parabolico di equazione $f_1(x)$ ha concavità verso l'alto allora il coefficiente di secondo grado è positivo; anche il coefficiente di primo grado deve essere positivo affinché l'arco intersechi l'asse delle ascisse nel punto ad ascissa $x_A < 0$.
- Poichè l'arco parabolico di equazione $f_2(x)$ ha concavità verso il basso allora il coefficiente di secondo grado è negativo; viceversa il coefficiente di primo grado deve essere positivo affinché l'arco intersechi l'asse delle ascisse nel punto ad ascissa $x_B > 0$.
- Dovendo essere la funzione derivabile in R, lo deve essere anche in $x = 0$; se chiamiamo con b_1 e b_2 i coefficienti di primo grado delle due equazioni paraboliche, la derivabilità in $x = 0$ impone che $f'_1(0) = [2ax + b_1]_{x=0} = f'_2(0) = [2cx + b_2]_{x=0}$ ovvero $b_1 = b_2 = b$.

Di conseguenza possiamo affermare che i due archi parabolici possono essere rappresentati dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^2 + bx, & \text{per } x < 0 \\ f_2(x) &= cx^2 + bx, & \text{per } x \geq 0 \end{aligned}$$

I punti A e B hanno coordinate rispettivamente

$$A = \left(-\frac{b}{a}, 0\right), B = \left(-\frac{b}{c}, 0\right)$$

Il coefficiente angolare della tangente in A è pari a:

$$m = f'_1\left(-\frac{b}{a}\right) = [2ax + b]_{x=-\frac{b}{a}} = -b$$

Il coefficiente angolare della tangente in B è pari a:

$$m = f'_2\left(-\frac{b}{c}\right) = [2cx + b]_{x=-\frac{b}{c}} = -b$$

Essendo uguali i coefficienti angolari deduciamo che le rette tangenti a Γ nei punti A e B sono parallele.

Punto 2

Si ha:

$$g'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{se } x < 0 \\ b & \text{se } x = 0 \\ 2cx + b & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

La semiretta $y = 2ax + b$ interseca l'asse delle ascisse in $x = -\frac{b}{2a} = \frac{x_A}{2}$, mentre la semiretta $y = 2cx + b$ interseca l'asse delle ascisse in $x = -\frac{b}{2c} = \frac{x_B}{2}$.

Analogamente si ha:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} \int_0^x (at^2 + bt)dt = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2}, & \text{per } x < 0 \\ \int_0^x (ct^2 + bt)dt = \frac{cx^3}{3} + \frac{bx^2}{2}, & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

Poichè $F'(x) = f(x)$ si deduce che i punti stazionari di $F(x)$ sono i punti in cui si annulla $f(x)$ ovvero $(x_A, 0)$ e $(x_B, 0)$.

Analogamente poichè $F''(x) = f'(x)$ le ascisse dei flessi di $F(x)$ sono le ascisse dei punti in cui si annulla $f'(x)$ ovvero $x = -\frac{b}{2a} = \frac{x_A}{2}$ e $x = -\frac{b}{2c} = \frac{x_B}{2}$.

Punto 3

L'equazione della tangente in $A = \left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ è

$$y = -b\left(x + \frac{b}{a}\right) = -bx - \frac{b^2}{a}$$

Tale equazione coincide con $y = -2x - 8$ se:

$$\begin{cases} -b = -2 \\ -\frac{b^2}{a} = -8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

Quindi $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$, per $x < 0$.

L'area S_2 compresa tra Γ e l'asse x contenuta nel semipiano $x > 0$ per il teorema di Archimede è pari a $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto ovvero

$$S_2 = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{b}{c}\right) \cdot \left(-\frac{b^2}{c} - \frac{b^2}{c}\right) = \frac{4b^3}{3c^2} = \frac{32}{3c^2}$$

L'area S_1 compresa tra Γ e l'asse x contenuta nel semipiano $x < 0$ per il teorema di Archimede è pari a $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto ovvero

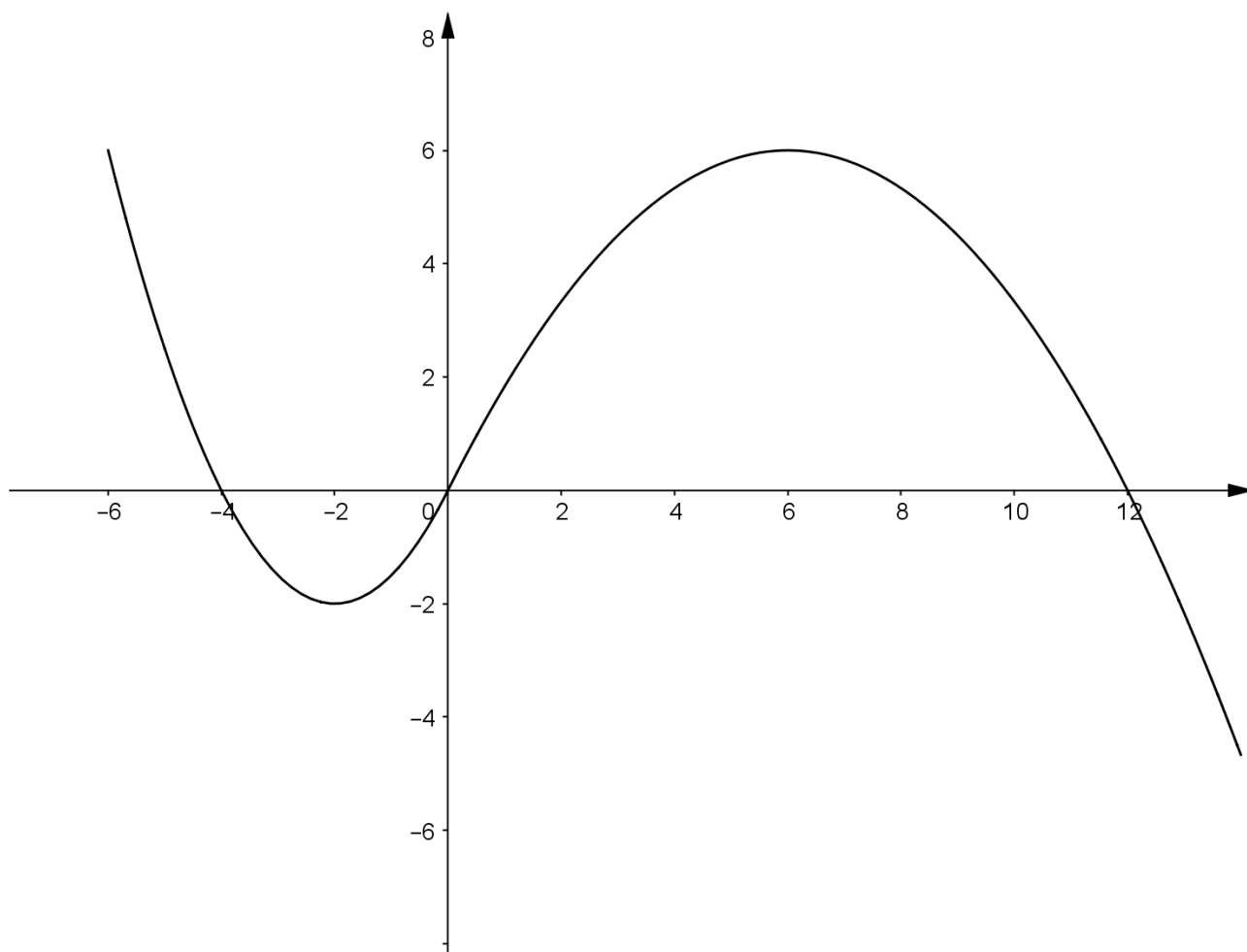
$$S_1 = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) \cdot \left(-\frac{b^2}{a} - \frac{b^2}{a}\right) = \frac{4b^3}{3a^2} = \frac{128}{3}$$

Imponendo la condizione $S_2 = 9S_1$ si ricava:

$$\frac{32}{3c^2} = 384 \rightarrow c^2 = \frac{1}{36} \rightarrow c = \pm \frac{1}{6}$$

Dovendo essere $c < 0$ si ha $c = -\frac{1}{6}$ ovvero $f_2(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 2x$, per $x \geq 0$

Di seguito il grafico che rappresenta entrambi gli archi di parabola nel medesimo sistema di riferimento cartesiano.

**Punto 4**

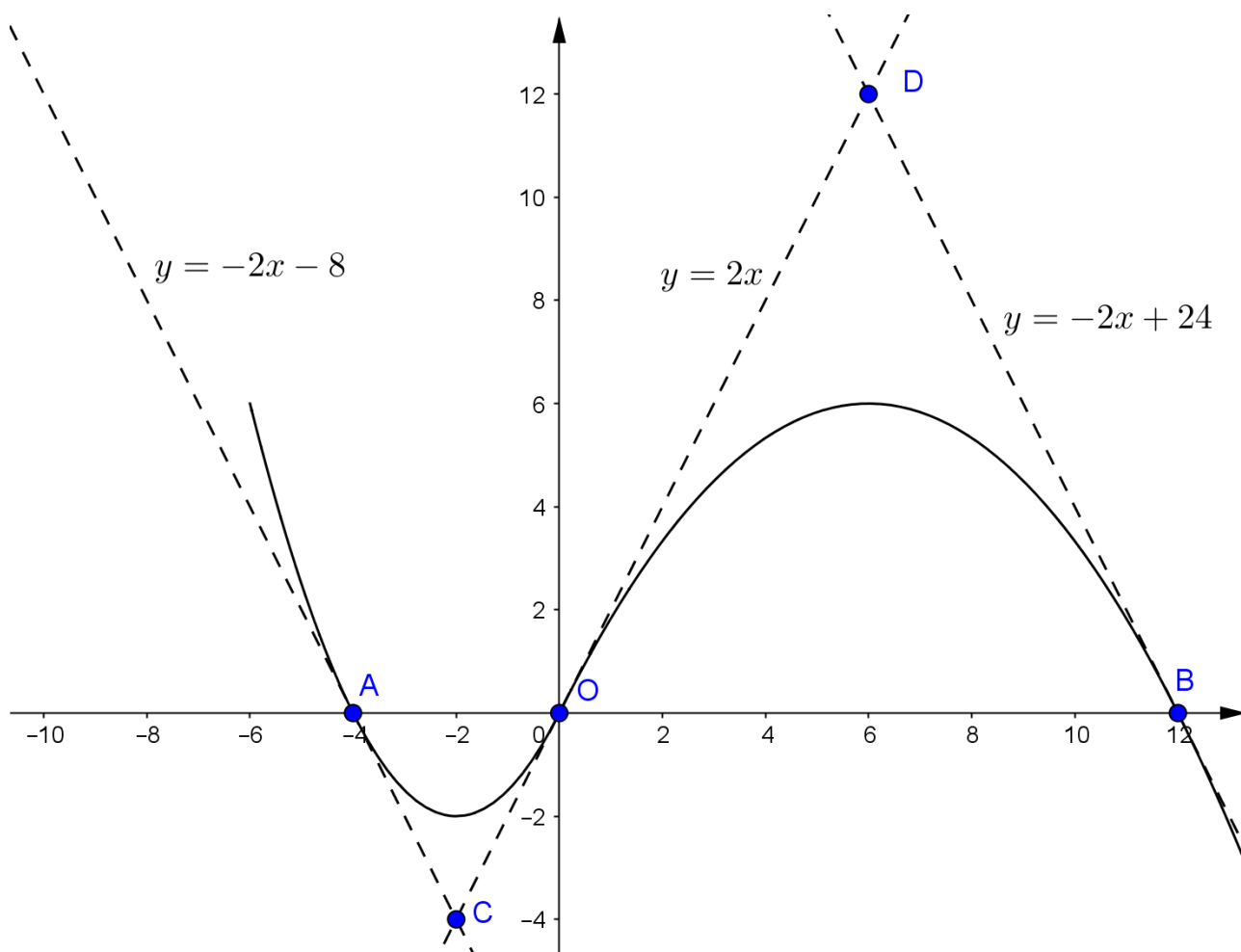
L'equazione della retta tangente a Γ in $B = (12,0)$ ha equazione:

$$y = -2(x - 12) = -2x + 24$$

L'equazione della retta tangente a Γ in $O = (0,0)$ ha equazione:

$$y = 2x$$

Consideriamo la figura seguente in cui sono rappresentati i grafici delle 2 parabole e le delle 3 tangenti in A, O e B.



Il punto C di intersezione tra le tangenti in A ed O è $C = (-2, -4)$ mentre il punto di intersezione tra le tangenti in O e B è $D = (6, 12)$

Il triangolo AOC ha area

$$S(AOC) = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

Il triangolo DOB ha area

$$S(DOB) = \frac{12 \cdot 12}{2} = 72$$

di conseguenza

$$\frac{S(DOB)}{S(AOC)} = \frac{72}{8} = 9$$

PROBLEMA 2

Consideriamo una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, così definita:

$$f(x) = \ln(a \cdot e^{bx} + c)$$

al variare di a, b, c parametri reali positivi.

- 1) Verifica che, comunque si scelgano i parametri, si ha:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- 2) Verifica inoltre che, comunque si scelgano i parametri, la funzione f ha un asintoto orizzontale, per $x \rightarrow -\infty$, e un asintoto obliquo, per $x \rightarrow +\infty$; determina a, b, c in modo che l'asintoto orizzontale, per $x \rightarrow -\infty$, sia la retta di equazione $y = 0$ e l'asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$, sia la retta di equazione $y = x$.
- 3) Dimostra che ponendo $a = b = c = 1$ si ha:

$$x < f(x) < e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- 4) Verifica inoltre che ponendo $a = b = c = 1$ e detta A l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione $h(x) = f(-|x|)$ e l'asse x del riferimento cartesiano, si ha

$$A < 2$$

Inoltre, a partire dalle caratteristiche del grafico della funzione $h(x)$, determina un numero reale S , quanto più grande possibile, tale che

$$A > S$$

SVOLGIMENTO

Punto 1

Le derivate prima e seconda sono rispettivamente:

$$f'(x) = \frac{a \cdot b \cdot e^{bx}}{a \cdot e^{bx} + c} = \frac{a \cdot b}{a + c \cdot e^{-bx}}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} [a \cdot b \cdot (a + c \cdot e^{-bx})^{-1}] = \frac{a \cdot b \cdot (c \cdot b \cdot e^{-bx})}{(a + c \cdot e^{-bx})^2} = \frac{a \cdot b^2 \cdot c \cdot e^{-bx}}{(a + c \cdot e^{-bx})^2}$$

Dalla formulazione analitica delle derivate prima e seconda deduciamo che sono sempre positive nel dominio $\mathbb{R}$ al variare di a, b, c parametri reali positivi.

Punto 2

Verifichiamo la presenza dell'asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(a \cdot e^{bx} + c) = \ln(a \cdot e^{-\infty} + c) = \ln(a \cdot 0 + c) = \ln(c)$$

Quindi la funzione presenta la retta $y = \ln(c)$ come asintoto orizzontale sinistro.

Verifichiamo la presenza dell'asintoto obliquo $y = mx + q$ per $x \rightarrow +\infty$, si ha:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a \cdot e^{bx} + c)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Applicando il teorema di De L'Hospital si ha:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a \cdot e^{bx} + c)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a \cdot b \cdot e^{bx}}{a \cdot e^{bx} + c} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a \cdot b}{a + c \cdot e^{-bx}} = \frac{a \cdot b}{a + c \cdot e^{-\infty}} = \frac{a \cdot b}{a + c \cdot 0} = b$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(a \cdot e^{bx} + c) - bx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(a \cdot e^{bx} + c) - \ln(e^{bx})] = \\ &= \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a \cdot e^{bx} + c}{e^{bx}} \right) \right] = \ln(a) \end{aligned}$$

Quindi la funzione presenta la retta $y = bx + \ln(a)$ come asintoto obliquo destro.

L'asintoto orizzontale è $y = 0$ se

$$\ln(c) = 0 \rightarrow c = 1$$

L'asintoto obliquo è $y = x$ se

$$\begin{cases} b = 1 \\ \ln(a) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Punto 3

Se $a = b = c = 1$ si ha:

$$e^x < e^x + 1 \rightarrow \ln(e^x) < \ln(e^x + 1) \rightarrow x < f(x)$$

Per dimostrare che $f(x) < e^x$ consideriamo la funzione $g(x) = \ln(e^x + 1) - e^x$.

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(e^x + 1) - e^x] = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + 1) - e^x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^x) = -\infty$$

dove nel secondo limite si è tenuto conto che e^x è un infinito superiore rispetto a $\ln(e^x + 1)$.

Inoltre la derivata prima è:

$$g'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - e^x = -\frac{e^{2x}}{e^x + 1} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi la funzione $g(x) = \ln(e^x + 1) - e^x$ è strettamente decrescente ed assume valori negativi all'interno del dominio $\mathbb{R}$, quindi è negativa in tutto il dominio $\mathbb{R}$ ovvero

$$g(x) = \ln(e^x + 1) - e^x < 0 \rightarrow f(x) < e^x$$

In conclusione quindi

$$x < f(x) < e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Punto 4

Studiamo la funzione

$$h(x) = \ln(e^{-|x|} + 1)$$

per $x \geq 0$ e successivamente per la simmetria pari ricaviamo il grafico per $x < 0$.

Consideriamo quindi

$$h_1(x) = \ln(e^{-x} + 1) \text{ con } x \geq 0$$

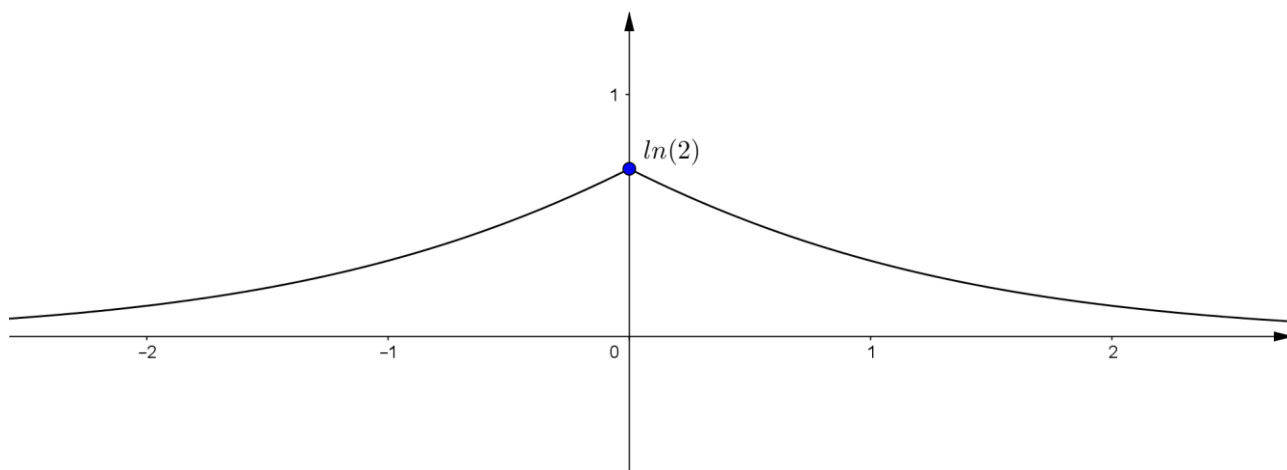
- **Dominio:** $x \in [0, +\infty[$;
- **Intersezione asse ascisse:** nessuna;
- **Intersezione asse ordinate:** $(0, \ln(2))$;
- **Positività:** $h_1(x) > 0 \quad \forall x \geq 0$;
- **Asintoti verticali:** nessuno;
- **Asintoti orizzontali:** $y = 0$ visto che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{-x} + 1) = \ln(1) = 0$;
- **Asintoti obliqui:** non ve ne sono in quanto $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{-x} + 1)}{x} = 0$;
- **Crescenza e decrescenza:** la derivata prima è $h_1'(x) = \frac{-e^{-x}}{(e^{-x} + 1)} = -(e^x + 1)^{-1}$ che è sempre negativa in tutto il dominio $[0, +\infty[$, pertanto la funzione $h_1(x)$ è strettamente decrescente in $[0, +\infty[$;
- **Concavità e convessità:** la derivata seconda è $h_1''(x) = e^x \cdot (e^x + 1)^{-2}$ che è sempre positiva in tutto il dominio $[0, +\infty[$, pertanto la funzione $h_1(x)$ volge sempre la concavità verso l'alto in $[0, +\infty[$;

Il grafico di

$$h_2(x) = \ln(e^x + 1) \text{ con } x < 0$$

si ricava da quello di $h_1(x)$ con una rotazione attorno all'asse delle ordinate.

Di seguito il grafico di $h(x) = \ln(e^{-|x|} + 1)$.



Avendo dimostrato che

$$f(x) < e^x$$

si ricava che

$$f(-|x|) < e^{-|x|}$$

di conseguenza l'area richiesta è pari a:

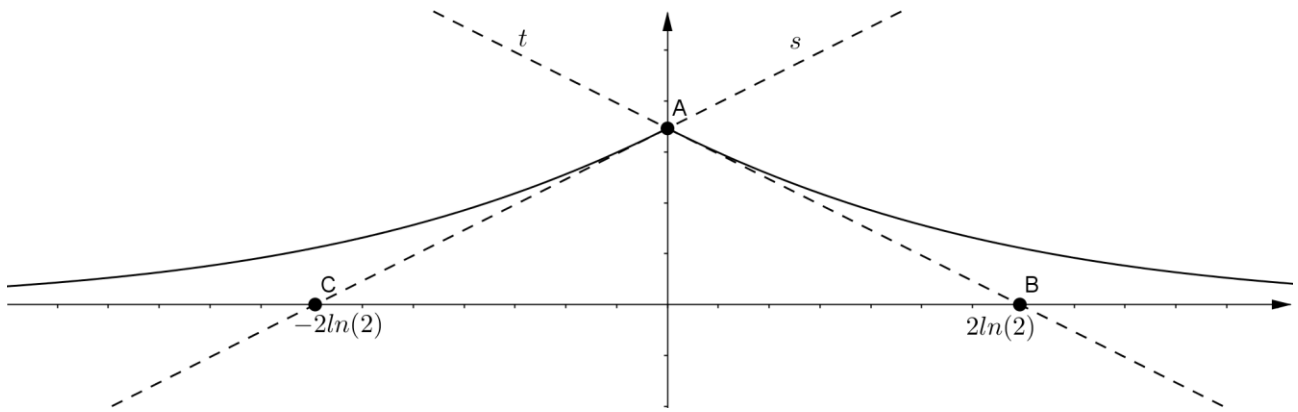
$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-|x|) dx < \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 2[-e^{-x}]_0^{+\infty} = 2$$

Il punto $(0, \ln 2)$ è un punto angoloso, le equazioni delle tangenti a destra e sinistra sono rispettivamente:

$$s: y = [h'_1(x)]_{x=0} \cdot x + \ln 2 = \left[\frac{-e^{-x}}{(e^{-x} + 1)} \right]_{x=0} \cdot x + \ln 2 = -\frac{x}{2} + \ln 2$$

$$t: y = [h'_2(x)]_{x=0} \cdot x + \ln 2 = \left[\frac{e^x}{(e^x + 1)} \right]_{x=0} \cdot x + \ln 2 = \frac{x}{2} + \ln 2$$

Rappresentiamo in un unico sistema di riferimento la funzione $h(x)$ e le due tangenti suddette.



L'area sottesa dalla funzione $h(x)$ è certamente maggiore dell'area del triangolo rettangolo ABC , pertanto il valore richiesto S è dato dall'area del triangolo ABC ovvero:

$$S = \frac{\ln 2 \cdot 4 \ln 2}{2} = 2 \ln^2 2 \cong 0.96$$

QUESTIONARIO

1. Si dispone di due dadi uguali non bilanciati. Lanciando ciascuno dei due dadi, le probabilità di uscita dei numeri 1, 2, 3 e 4 sono pari a k , mentre le probabilità di uscita dei numeri 5 e 6 sono pari a $k/2$. Determinare il valore di k e stabilire qual è la probabilità che, lanciando i due dadi contemporaneamente, escano due numeri uguali tra loro.

2. Determinare il raggio della sfera di centro $C(2, 2, 2)$ tangente al piano di equazione:

$$x + 2y + z = 12.$$

3. Considerando la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{4} + 2x, & \text{per } x < 4 \\ e^{4-x} + 3, & \text{per } x \geq 4 \end{cases}$$

determinare l'angolo formato dalle tangenti nel punto angoloso del grafico della funzione.

4. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x \cdot \sin(x)$, adoperando la definizione di derivata

5. Determinare l'area della superficie compresa tra il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

le rette $y = 2$, $x = 5$ e l'asse y .

6. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione:

$$f(x) = x \cdot e^{-x}$$

nel suo punto di flesso.

7. La variabile casuale x , ha densità di probabilità data dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{per } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{7}{12}, & \text{per } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \\ \frac{1}{12}, & \text{per } x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \end{cases}$$

Determinare la media e la mediana della variabile casuale x .

8. Determinare le coordinate dei punti nello spazio che giacciono sulla retta perpendicolare nel punto $[1, 1, 1]$ al piano di equazione $2x - y - z = 0$, a distanza 6 da tale piano.

9. Considerando la funzione:

$$f(x) = \frac{ax + 1}{x}$$

definita in $\mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R}$, mostrare che le tangenti al suo grafico nei punti di ascissa -1 e 1 sono parallele alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante, indipendentemente dal valore del parametro a . Individuare inoltre il valore minimo del parametro a per cui la tangente al grafico nel punto di ascissa 1 forma con gli assi cartesiani un triangolo di area maggiore di 3.

10. Dimostrare che la derivata della funzione:

$$f(x) = e^{ax}$$

è la funzione

$$f'(x) = a \cdot e^{ax}$$

SVOLGIMENTO

1. La somma delle probabilità deve essere 1 pertanto si ha:

$$k + k + k + k + \frac{k}{2} + \frac{k}{2} = 1 \rightarrow 5k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{5}$$

La probabilità che escano 2 numeri uguali lanciando i due dadi è pari a:

$$p = p^2(1) + p^2(2) + p^2(3) + p^2(4) + p^2(5) + p^2(6) = 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{4}{25} + \frac{1}{50} = \frac{9}{50}$$

2. Il raggio è pari alla distanza del punto C(2,2,2) dal piano di equazione $x + 2y + z - 12 = 0$:

$$R = \frac{|2 + 4 + 2 - 12|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

3. La funzione ha un punto angoloso in $x = 4$ in quanto è ivi continua ma non derivabile con limiti destro e sinistro della derivata prima in $x = 4$ differenti ma finiti.

La derivata prima è:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + 2, & \text{per } x < 4 \\ -e^{4-x}, & \text{per } x \geq 4 \end{cases}$$

per cui

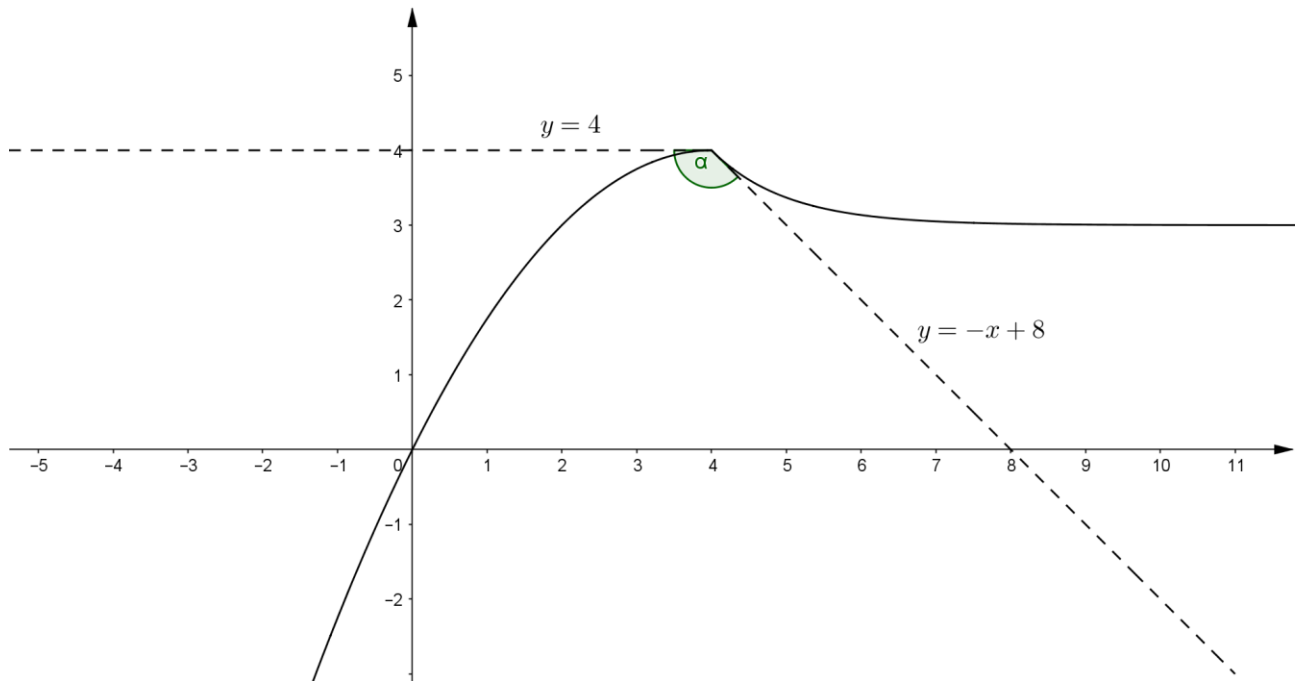
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(-\frac{x}{2} + 2\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} (-e^{4-x}) = -1 \end{aligned}$$

Le rette tangenti in $x = 4$ hanno rispettivamente equazioni:

$$y = 4$$

$$y = -x + 8$$

Consideriamo la figura seguente in cui sono raffigurate la funzione e le tangenti nel punto angoloso.



L'angolo tra le due tangenti deve soddisfare l'equazione seguente:

$$\tan \alpha = \frac{m_1 + m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1 \rightarrow \alpha = 135^\circ$$

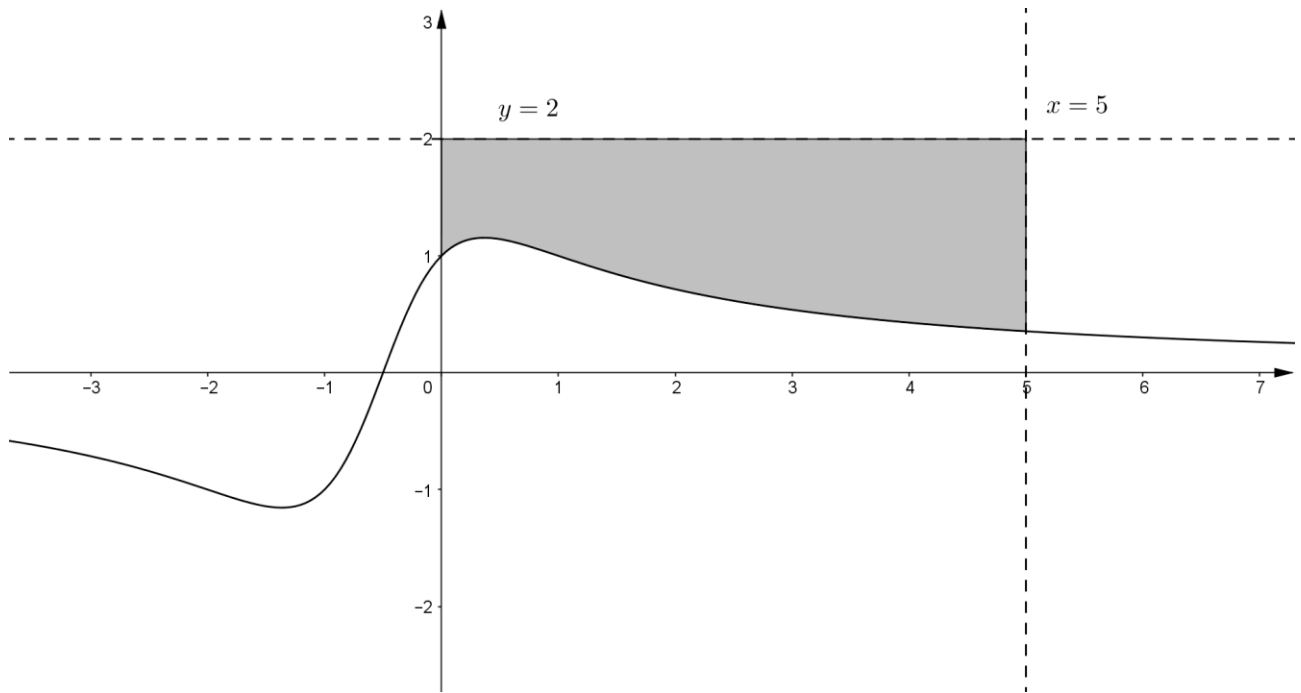
4. Applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale si ha:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) \sin(x+h) - x \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x[\sin(x+h) - \sin(x)] + h \sin(x+h)}{h}$$

Utilizzando le formule di Prostaferesi si ha:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x \left[2 \cos \left(\frac{x+h+x}{2} \right) \sin \left(\frac{x+h-x}{2} \right) \right] + h \sin(x+h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x \left[2 \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \sin \left(\frac{h}{2} \right) \right] + h \sin(x+h)}{h} = \\ &= 2x \cos(x) \left[\underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{h}{2} \right)}{\frac{h}{2}}}_{= \frac{1}{2}} \right] + \sin(x) = x \cos(x) + \sin(x) \end{aligned}$$

5. Consideriamo la figura seguente che raffigura la regione di cui calcolare l'area.



L'area è pari a:

$$S = 2 \cdot 5 - \int_0^5 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = 10 - [\ln(x^2+x+1)]_0^5 = 10 - \ln(31) \cong 6.57$$

6. La derivata seconda è pari a:

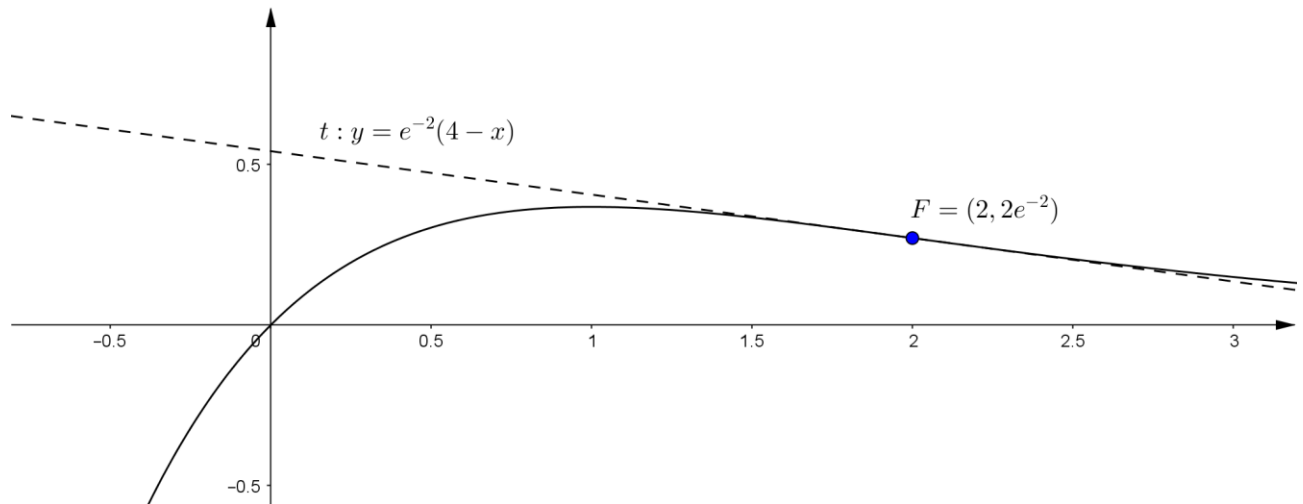
$$\frac{d^2}{dx^2} [f(x)] = \frac{d}{dx} [f'(x)] = \frac{d}{dx} (-xe^{-x} + e^{-x}) = xe^{-x} - e^{-x} - e^{-x} = e^{-x}(x-2)$$

di conseguenza il punto $(2, 2e^{-2})$ è punto di flesso.

La retta tangente al grafico nel punto di flesso è:

$$y = m(x-2) + 2e^{-2} = f'(2)(x-2) + 2e^{-2} = -e^{-2}(x-2) + 2e^{-2} = e^{-2}(4-x)$$

Di seguito il grafico in cui sono raffigurate la funzione e la tangente nel suo punto di flesso.



7. Verifichiamo innanzitutto che $f(x)$ è una densità di probabilità ovvero che

$$\int_0^2 f(x) dx = 1$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{7}{12}\right) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \left(\frac{1}{2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{12} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(2 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6} + \frac{7}{12} + \frac{1}{4} = 1 \end{aligned}$$

Il valore medio è pari a:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^2 x f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{3}\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{7x}{12}\right) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \left(\frac{x}{2}\right) dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{6}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{7x^2}{24}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{x^2}{4}\right]_{\frac{3}{2}}^2 = \frac{1}{24} + \left(\frac{21}{32} - \frac{7}{96}\right) + \left(1 - \frac{9}{16}\right) = \frac{1}{24} + \frac{7}{12} + \frac{7}{16} = \frac{17}{16} \end{aligned}$$

Poichè

$$\begin{aligned} p\left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{6} < \frac{1}{2} \\ p\left(0 \leq x \leq \frac{3}{2}\right) &= p\left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right) + p\left(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6} + \frac{7}{12} = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

deduciamo che il valore mediano appartiene all'intervallo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Indichiamo con y il valore mediano, per definizione di valore mediano si ha:

$$\int_{-\infty}^y f(x) dx = \frac{1}{2} \text{ e } \int_y^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}$$

Nel caso in esame, ricordando che il valore mediano appartiene all'intervallo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, y è valore mediano se:

$$\begin{aligned} \int_0^y f(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^y f(x) dx = \frac{1}{2} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{6} + \frac{7}{12} \left(y - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{7}{12} \left(y - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{7}{12} \left(y - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \rightarrow \left(y - \frac{1}{2} \right) = \frac{4}{7} \rightarrow y = \frac{4}{7} + \frac{1}{2} = \frac{15}{14} \end{aligned}$$

8. I parametri direttori del piano $2x - y - z = 0$ sono $(2, -1, -1)$, pertanto la retta perpendicolare ad esso e passante per il punto $(1, 1, 1)$ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

La distanza dal piano di equazione è:

$$d = \frac{|2 + 4t - 1 + t - 1 + t|}{\sqrt{6}} = \frac{|6t|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}|t|$$

Tale distanza è pari a 6 se:

$$\sqrt{6}|t| = 6 \rightarrow t = \pm\sqrt{6}$$

I punti quindi a distanza 6 dal piano sono:

$$(1 + 2\sqrt{6}, 1 - \sqrt{6}, 1 - \sqrt{6}), (1 - 2\sqrt{6}, 1 + \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$$

9. La derivata prima della funzione $f(x) = \frac{ax+1}{x}$ è

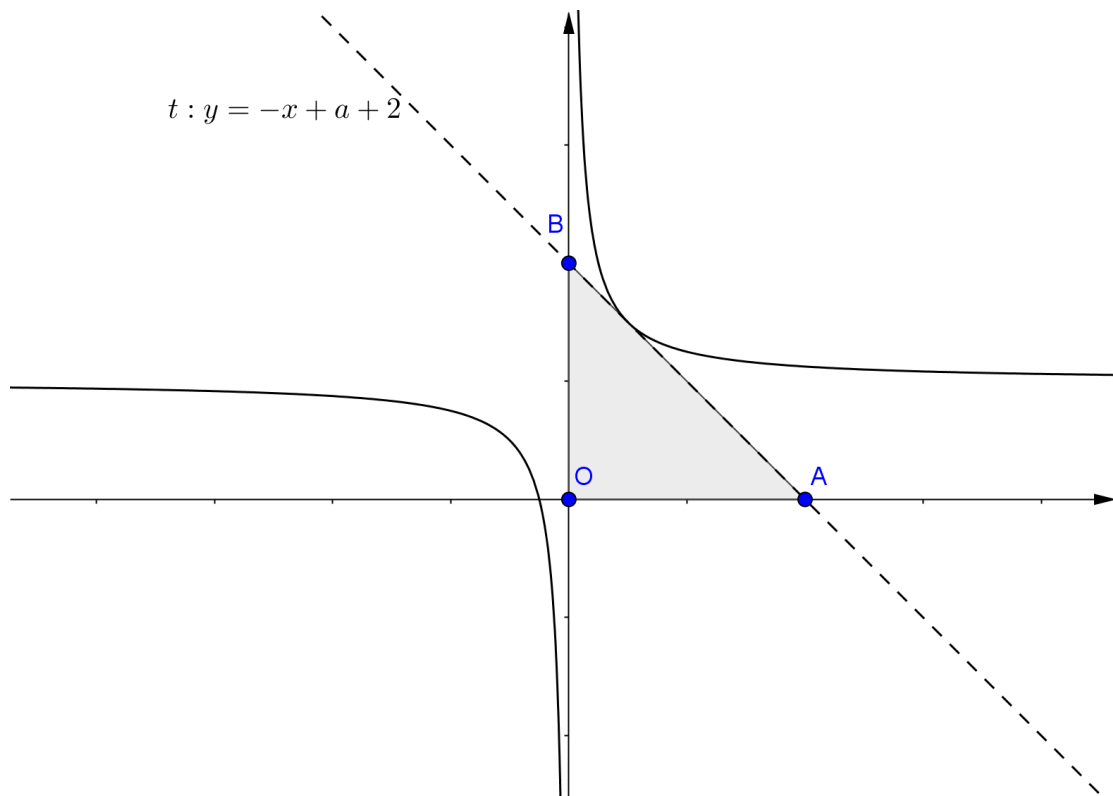
$$f'(x) = \frac{ax - ax - 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Poichè $f'(1) = f'(-1) = -1$ deduciamo che le tangenti alla curva nei punti di ascissa -1 ed 1 hanno entrambe coefficiente angolare -1 e pertanto sono parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

La tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(1, a + 1)$ ha equazione

$$y = -(x - 1) + a + 1 = -x + a + 2$$

Consideriamo la seguente figura.



Tale tangente incontra gli assi cartesiani nei punti $A = (0, a + 2)$, $B = (a + 2, 0)$, di conseguenza l'area del triangolo formato da tale tangente con gli assi cartesiani è rettangolo isoscele di area

$$S(AOB) = \frac{(a + 2)^2}{2}$$

Tale area è maggiore di 3 se

$$\frac{(a + 2)^2}{2} > 3 \rightarrow (a + 2)^2 > 6 \rightarrow (a + 2) > \sqrt{6} \rightarrow a < -\sqrt{6} - 2 \vee a > \sqrt{6} - 2$$

Quindi non esiste il valore minimo di a tale per cui l'area del triangolo è pari a 3; si può certamente dire, invece, che il valore minimo di a tale per cui l'area del triangolo è 3 è $a = -\sqrt{6} - 2$.

10. Applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale si ha:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{a(x+h)} - e^{ax}}{h} = e^{ax} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ah} - 1}{h} = e^{ax} \cdot a \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ah} - 1}{ah}}_{=1} = a \cdot e^{ax}$$