Esame di stato di istruzione secondaria superiore
Indirizzi: Scientifico, Scientifico opzione scienze applicate e Scientifico ad indirizzo sportivo
Tema di matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario

PROBLEMA 1

Un produttore di candeline tea light vuole produrre un nuovo tipo di candela colorata che abbia una parte inferiore di forma cilindrica ed una parte superiore avente la forma riportata in figura 1, che si connetta perfettamente a quella inferiore, come mostrato in figura 2:

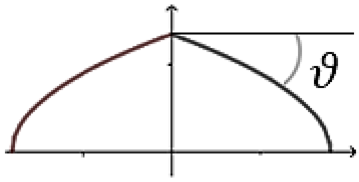


Figura 1

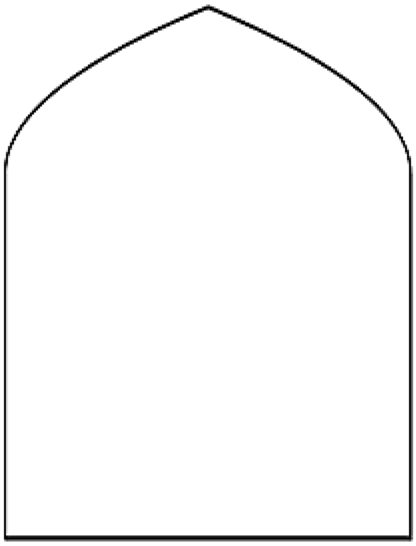


Figura 2

1) Stabilisci, motivando adeguatamente la risposta, quale delle seguenti funzioni può rappresentare adeguatamente il profilo della parte superiore della candela:
   1. $y = \begin{cases} \sqrt{a-x} \ \ se\ 0 \leq x \leq a \\ \sqrt{a+x}\ se -a \leq x < 0 \end{cases}$ con $a \in \mathbb{R}, a > 0$;
   2. $y = a - x^2$ in $\left[-\sqrt{a}, \sqrt{a}\right]$ con $a \in \mathbb{R}, a > 0$;
   3. $y = -\sqrt{|x|} + a$ in $[-a^2, a^2]$ con $a \in \mathbb{R}, a > 0$;

   Utilizzando l'espressione analitica trovata, studia eventuali punti di singolarità del profilo della parte superiore della candela.

2) Per consentire l'inserimento dello stoppino al vertice della candela, è necessario che l'angolo ϑ in figura 1 non sia maggiore di 30°. Determina di conseguenza i possibili valori del parametro a.

3) Attribuendo all’altezza e al raggio della parte cilindrica i valori rispettivamente di 8 e 2, in un’opportuna unità di misura, determina il volume totale della candela. Da questo dato dipenderanno il peso e il costo di produzione della candela stessa.

Il produttore deve inscatolare le candele in confezioni da 3 e da 4 candele, posizionando le candele in verticale, con le basi circolari disposte in modo da occupare il minor spazio possibile. Si prevedono due possibili configurazioni per posizionare le basi circolari delle candele all’interno delle scatole, rappresentate in figura 3:

Configurazione 1 Configurazione 2

Figura 3

4) Fornisci una valutazione numerica dell’efficienza dei due confezionamenti, calcolando il rapporto tra area occupata dalle basi circolari delle candele inserite nella scatola e area disponibile in ciascuna delle due configurazioni. Tale rapporto deve essere espresso in percentuale. Ai fini del calcolo, considera che le celle poligonali evidenziate in grigio sono rispettivamente un triangolo equilatero e un quadrato.

SVOLGIMENTO

Punto 1

Come si nota dalla figura il punto ad ascissa $x = 0$ è un punto angoloso di non derivabilità, di conseguenza l'equazione 2 è da scartare in quanto $y = a - x^2$ è un arco di parabola sempre continua e derivabile.

Inoltre, trattandosi di punto angoloso, in $x = 0$ i valori della derivata prima destra e sinistra sono diversi ma finiti; l'equazione 1 soddisfa tale condizione mentre l'equazione 3 non la soddisfa in quanto:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{d}{dx}\left(\sqrt{a-x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{2\sqrt{a-x}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{d}{dx}\left(\sqrt{a+x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{2\sqrt{a+x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{d}{dx}\left(-\sqrt{|x|}+a\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{d}{dx}\left(-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{d}{dx}\left(-\sqrt{|x|}+a\right) = \lim_{x\to 0^-} \frac{d}{dx}\left(-\sqrt{-x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{2\sqrt{-x}}\right) = +\infty$$

Di conseguenza l'equazione richiesta che rappresenta il profilo superiore della candela è:

$$y = \begin{cases} \sqrt{a-x} & se\ 0 \le x \le a \\ \sqrt{a+x} & se - a \le x < 0 \end{cases} \text{ con } a \in \mathbb{R}, a > 0$$

Oltre al punto angoloso $\left(0, \sqrt{a}\right)$, l'equazione soprastante presenta 2 cuspidi a tangente verticale nei punti $(-a, 0)$ ed $(a, 0)$ in quanto

$$\lim_{x\to a^-} \frac{d}{dx}\left(\sqrt{a-x}\right) = \lim_{x\to a^-}\left(-\frac{1}{2\sqrt{a-x}}\right) = -\infty$$

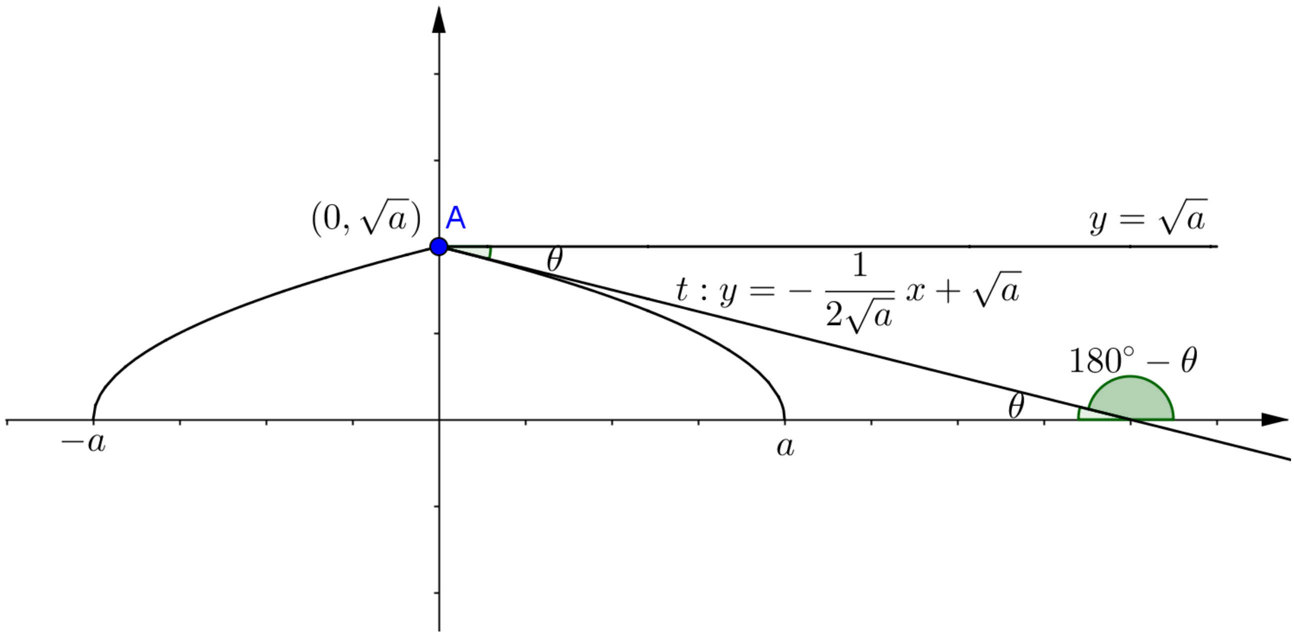
$$\lim_{x\to -a^+} \frac{d}{dx}\left(\sqrt{a+x}\right) = \lim_{x\to -a^+}\left(\frac{1}{2\sqrt{a+x}}\right) = +\infty$$

Punto 2

Consideriamo il ramo del profilo con $0 \le x \le a$.
L'equazione della retta tangente destra in $\left(0, \sqrt{a}\right)$ è:

$$t: y = -\frac{1}{2\sqrt{a}}x + \sqrt{a}$$

Consideriamo la figura seguente in cui è raffigurato il profilo della candela, la tangente *t* e la retta di equazione $y = \sqrt{a}$



Ricordando che il coefficiente angolare di una retta equivale alla tangente dell'angolo formato da essa con l'asse delle ascisse, si ha:

$$\tan(180° - \theta) = -\tan(\theta) = -\frac{1}{2\sqrt{a}} \rightarrow \tan(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Dire che $0° \leq \theta \leq 30°$ equivale a dire che $\tan(0°) \leq \tan(\theta) \leq \tan(30°)$ ovvero $0 \leq \tan(\theta) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, di conseguenza imponendo la disuguaglianza

$$0 \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

si ricava

$$\sqrt{a} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow a \geq \frac{3}{4}$$

Punto 3

Il volume richiesto è pari al volume V_1 del cilindro di raggio di base 2 ed altezza 8 e dal volume V_2 del solido ottenuto dalla rotazione intorno all'asse delle ordinate della regione di piano di equazione $y = \sqrt{2 - x}$ con $y \in [0, \sqrt{2}]$.

L'equazione $y = \sqrt{2 - x}$ può essere scritta in modo equivalente come $x = 2 - y^2$ pertanto il volume richiesto è pari a:

$$V = V_1 + V_2 = \pi \cdot 2^2 \cdot 8 + \pi \int_0^{\sqrt{2}} (2 - y^2)^2 dy = 32\pi + \int_0^{\sqrt{2}} (y^4 - 4y^2 + 4)^2 dy =$$

$$= 32\pi + \pi \left[\frac{y^5}{5} - \frac{4y^3}{3} + 4y\right]_0^{\sqrt{2}} = 32\pi + \pi \left(\frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{8\sqrt{2}}{3} + 4\sqrt{2}\right) = 32\pi + \frac{32\sqrt{2}}{15}\pi$$

Alternativamente possiamo applicare il teorema di Guldino per calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione intorno all'asse delle ordinate della regione di piano di equazione $y = \sqrt{2 - x}$, si ha:

$$V_2 = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{2-x}dx = 2\pi \int_0^2 \left[-(2-x)\sqrt{2-x} + 2\sqrt{2-x}\right]dx =$$
$$= 2\pi \int_0^2 \left[-(2-x)^{\frac{3}{2}} + 2(2-x)^{\frac{1}{2}}\right] dx = 2\pi \left[\frac{2}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 =$$
$$= 2\pi\left(-\frac{8}{5}\sqrt{2} + \frac{8}{3}\sqrt{2}\right) = \frac{32\sqrt{2}}{15}\pi$$

Punto 4
Indichiamo con *A* e *B* le misure della base e dell'altezza delle confezioni.

Nella configurazione 1 si ha:

- La base della confezione è pari al doppio del diametro della base della candela ovvero $A = 4r = 8$;
- L'altezza della confezione è pari alla somma di un diametro della base della candela e dell'altezza del triangolo equilatero ovvero $B = 2r + 2r\frac{\sqrt{3}}{2} = 4 + 2\sqrt{3}$

Di conseguenza il rapporto tra area coperta dalle basi delle candele ed area disponibile è:

$$R_1 = \frac{3\pi r^2}{A \cdot B} = \frac{12\pi}{8(4 + 2\sqrt{3})} = \frac{3\pi}{2(4 + 2\sqrt{3})} \cong 63.1\%$$

Nella configurazione 2 si ha:

- La base e l'altezza della confezione coincidono con il doppio del diametro della base della candela ovvero $A = B = 4r = 8$;

Di conseguenza il rapporto tra area coperta dalle basi delle candele ed area disponibile è:

$$R_2 = \frac{4\pi r^2}{A \cdot B} = \frac{16\pi}{64} = \frac{\pi}{4} \cong 78.5\%$$

Pertanto è più efficiente la configurazione 2.

PROBLEMA 2

Consideriamo una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, così definita:

$$f(x) = \ln(a \cdot e^{bx} + c)$$

al variare di a, b, c parametri reali positivi.

1) Verifica che, comunque si scelgano i parametri, si ha:

$$f'(x) > 0 \ \forall x \in \Re, f''(x) > 0 \ \forall x \in \Re$$

2) Verifica inoltre che, comunque si scelgano i parametri, la funzione f ha un asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$, e un asintoto obliquo, per $x \to +\infty$; determina a, b, c in modo che l'asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$, sia la retta di equazione $y = 0$ e l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$, sia la retta di equazione $y = x$.
3) Dimostra che ponendo $a = b = c = 1$ si ha:

$$x < f(x) < e^x \ \forall x \in \Re$$

4) Verifica inoltre che ponendo $a = b = c = 1$ e detta A l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione $h(x) = f(-|x|)$ e l'asse x del riferimento cartesiano, si ha

$$A < 2$$

Inoltre, a partire dalle caratteristiche del grafico della funzione $h(x)$, determina un numero reale S, quanto più grande possibile, tale che

$$A > S$$

SVOLGIMENTO

Punto 1

Le derivate prima e seconda sono rispettivamente:

$$f'(x)=\frac{a\cdot b\cdot e^{bx}}{a\cdot e^{bx}+c}=\frac{a\cdot b}{a+c\cdot e^{-bx}}$$

$$f''(x)=\frac{d}{dx}[a\cdot b\cdot(a+c\cdot e^{-bx})^{-1}]=\frac{a\cdot b\cdot(c\cdot b\cdot e^{-bx})}{(a+c\cdot e^{-bx})^2}=\frac{a\cdot b^2\cdot c\cdot e^{-bx}}{(a+c\cdot e^{-bx})^2}$$

Dalla formulazione analitica delle derivate prima e seconda deduciamo che sono sempre positive nel dominio R al variare di a, b, c parametri reali positivi.

Punto 2

Verifichiamo la presenza dell'asintoto orizzontale per $x\to-\infty$, si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln(a\cdot e^{bx}+c)=\ln(a\cdot e^{-\infty}+c)=\ln(a\cdot 0+c)=\ln(c)$$

Quindi la funzione presenta la retta $y=\ln(c)$ come asintoto orizzontale sinistro.

Verifichiamo la presenza dell'asintoto obliquo $y=mx+q$ per $x\to+\infty$, si ha:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(a\cdot e^{bx}+c)}{x}=\frac{\infty}{\infty}$$

Applicando il teorema di De L'Hospital si ha:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(a\cdot e^{bx}+c)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a\cdot b\cdot e^{bx}}{a\cdot e^{bx}+c}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a\cdot b}{a+c\cdot e^{-bx}}=\frac{a\cdot b}{a+c\cdot e^{-\infty}}=\frac{a\cdot b}{a+c\cdot 0}=b$$

$$q=\lim_{x\to+\infty}[\ln(a\cdot e^{bx}+c)-b\,x]=\lim_{x\to+\infty}[\ln(a\cdot e^{bx}+c)-\ln(e^{bx})]=$$
$$=\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a\cdot e^{bx}+c}{e^{bx}}\right)\right]=\ln(a)$$

Quindi la funzione presenta la retta $y=bx+\ln(a)$ come asintoto obliquo destro.

L'asintoto orizzontale è $y=0$ se

$$\ln(c)=0\to c=1$$

L'asintoto obliquo è $y=x$ se

$$\begin{cases} b=1\\ \ln(a)=0\end{cases}\to\begin{cases} b=1\\ a=1\end{cases}$$

Punto 3

Se $a=b=c=1$ si ha:

$$e^x < e^x + 1 \rightarrow \ln(e^x) < \ln(e^x + 1) \rightarrow x < f(x)$$

Per dimostrare che $f(x) < e^x$ consideriamo la funzione $g(x) = \ln(e^x + 1) - e^x$.

Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} [\ln(e^x + 1) - e^x] = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} [\ln(e^x + 1) - e^x] = \lim_{x\to+\infty} (-e^x) = -\infty$$

dove nel secondo limite si è tenuto conto che e^x è un infinito superiore rispetto a $\ln(e^x + 1)$.

Inoltre la derivata prima è:

$$g'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - e^x = -\frac{e^{2x}}{e^x + 1} < 0 \ \forall x \in \Re$$

Quindi la funzione $g(x) = \ln(e^x + 1) - e^x$ è strettamente decrescente ed assume valori negativi all'interno del dominio $\Re$, quindi è negativa in tutto il dominio $\Re$ ovvero

$$g(x) = \ln(e^x + 1) - e^x < 0 \rightarrow f(x) < e^x$$

In conclusione quindi

$$x < f(x) < e^x \ \forall x \in \Re$$

Punto 4

Studiamo la funzione

$$h(x) = \ln\left(e^{-|x|} + 1\right)$$

per $x \geq 0$ e successivamente per la simmetria pari ricaviamo il grafico per $x < 0$.

Consideriamo quindi

$$h_1(x) = \ln(e^{-x} + 1) \text{ con } x \geq 0$$

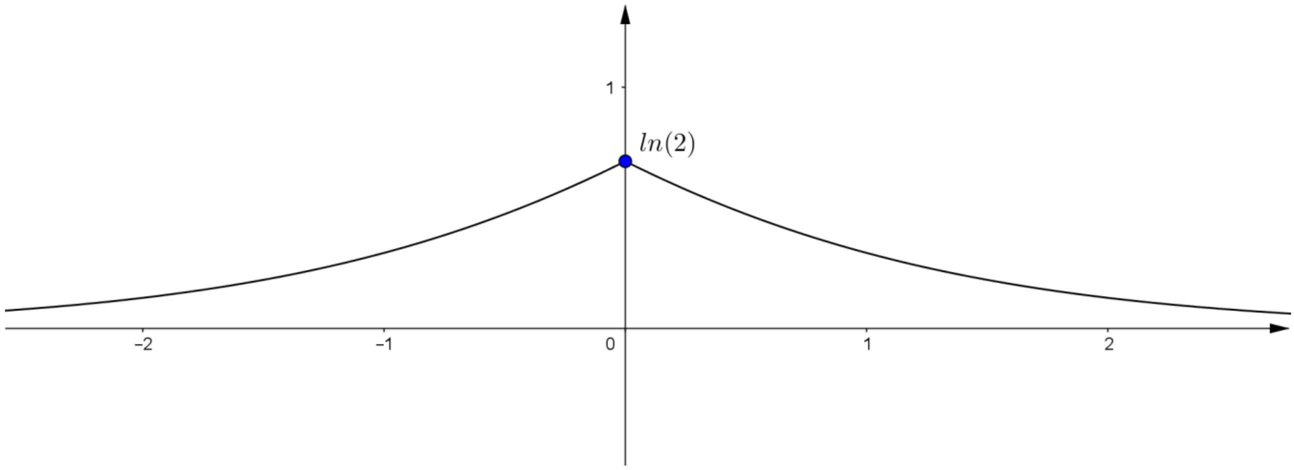
- **Dominio**: $x \in [0, +\infty[$;
- **Intersezione asse ascisse**: nessuna;
- **Intersezione asse ordinate**: $(0, \ln(2))$;
- **Positività**: $h_1(x) > 0 \ \forall x \geq 0$;
- **Asintoti verticali:** nessuno;
- **Asintoti orizzontali:** $y = 0$ visto che $\lim_{x\to+\infty} \ln(e^{-x} + 1) = \ln(1) = 0$;
- **Asintoti obliqui:** non ve ne sono in quanto $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{-x}+1)}{x} = 0$;
- **Crescenza e decrescenza:** la derivata prima è $h_1'(x) = \frac{-e^{-x}}{(e^{-x}+1)} = -(e^x + 1)^{-1}$ che è sempre negativa in tutto il dominio $[0, +\infty[$, pertanto la funzione $h_1(x)$ è strettamente decrescente in $[0, +\infty[$;
- **Concavità e convessità:** la derivata seconda è $h_1''(x) = e^x \cdot (e^x + 1)^{-2}$ che è sempre positiva in tutto il dominio $[0, +\infty[$, pertanto la funzione $h_1(x)$ volge sempre la concavità verso l'alto in $[0, +\infty[$;

Il grafico di

$$h_2(x) = \ln(e^x + 1) \text{ con } x < 0$$

si ricava da quello di $h_1(x)$ con una rotazione attorno all'asse delle ordinate.

Di seguito il grafico di $h(x) = \ln\left(e^{-|x|} + 1\right)$.



Avendo dimostrato che

$$f(x) < e^x$$

si ricava che

$$f(-|x|) < e^{-|x|}$$

di conseguenza l'area richiesta è pari a:

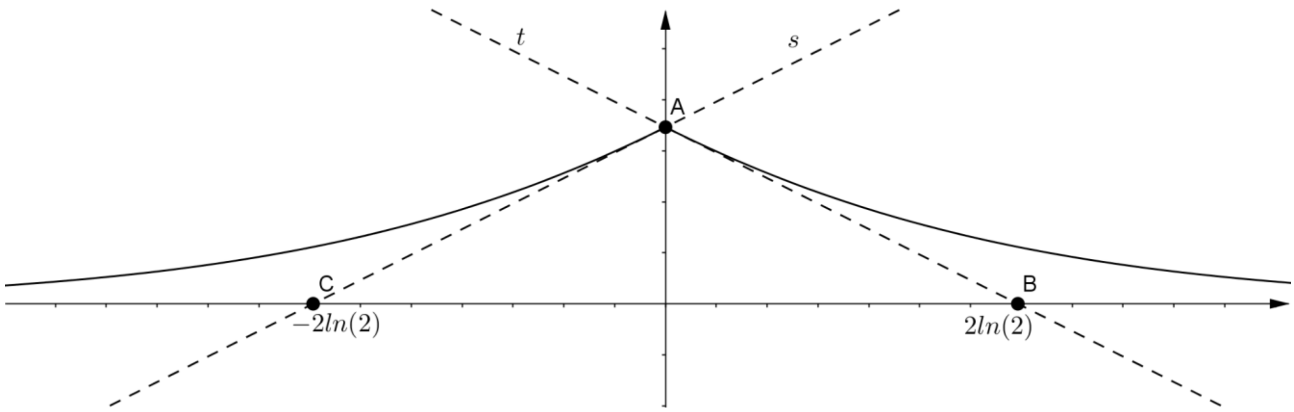
$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-|x|)dx < \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 2[-e^{-x}]_0^{+\infty} = 2$$

Il punto $(0, \ln 2)$ è un punto angoloso, le equazioni delle tangenti a destra e sinistra sono rispettivamente:

$$s: y = [h_1'(x)]_{x=0} \cdot x + \ln 2 = \left[\frac{-e^{-x}}{(e^{-x}+1)}\right]_{x=0} \cdot x + \ln 2 = -\frac{x}{2} + \ln 2$$

$$t: y = [h_2'(x)]_{x=0} \cdot x + \ln 2 = \left[\frac{e^{x}}{(e^{x}+1)}\right]_{x=0} \cdot x + \ln 2 = \frac{x}{2} + \ln 2$$

Rappresentiamo in un unico sistema di riferimento la funzione $h(x)$ e le due tangenti suddette.



L’area sottesa dalla funzione $h(x)$ è certamente maggiore dell’area del triangolo rettangolo ABC, pertanto il valore richiesto *S* è dato dall’area del triangolo ABC ovvero:

$$S = \frac{\ln 2 \cdot 4 \ln 2}{2} = 2 \ln^2 2 \cong 0.96$$

QUESTIONARIO

1. Si dispone di due dadi uguali non bilanciati. Lanciando ciascuno dei due dadi, le probabilità di uscita dei numeri 1, 2, 3 e 4 sono pari a k, mentre le probabilità di uscita dei numeri 5 e 6 sono pari a $k/2$. Determinare il valore di k e stabilire qual è la probabilità che, lanciando i due dadi contemporaneamente, escano due numeri uguali tra loro.
2. Determinare il raggio della sfera di centro $C(2, 2, 2)$ tangente al piano di equazione:
$$x + 2y + z = 12.$$
3. Considerando la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come:
$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{4} + 2x, per\ x < 4 \\ e^{4-x} + 3, per\ x \geq 4 \end{cases}$$
determinare l'angolo formato dalle tangenti nel punto angoloso del grafico della funzione.
4. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x \cdot sen(x)$, adoperando la definizione di derivata
5. Determinare l'area della superficie compresa tra il grafico della funzione:
$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$
le rette $y = 2, x = 5$ e l'asse y.
6. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione:
$$f(x) = x \cdot e^{-x}$$
nel suo punto di flesso.
7. La variabile casuale x, ha densità di probabilità data dalla funzione
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & per\ x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ \dfrac{7}{12}, & per\ x \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right] \\ \dfrac{1}{12}, & per\ x \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right] \end{cases}$$
Determinare la media e la mediana della variabile casuale x.
8. Determinare le coordinate dei punti nello spazio che giacciono sulla retta perpendicolare nel punto [1, 1, 1] al piano di equazione $2x - y - z = 0$, a distanza 6 da tale piano.
9. Considerando la funzione:
$$f(x) = \frac{ax + 1}{x}$$
definita in $\mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R}$, mostrare che le tangenti al suo grafico nei punti di ascissa -1 e 1 sono parallele alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante, indipendentemente dal valore del parametro a . Individuare inoltre il valore minimo del parametro a per cui la tangente al grafico nel punto di ascissa 1 forma con gli assi cartesiani un triangolo di area maggiore di 3.
10. Dimostrare che la derivata della funzione:
$$f(x) = e^{ax}$$
è la funzione
$$f'(x) = a \cdot e^{ax}$$

SVOLGIMENTO

1. La somma delle probabilità deve essere 1 pertanto si ha:

$$k + k + k + k + \frac{k}{2} + \frac{k}{2} = 1 \to 5k = 1 \to k = \frac{1}{5}$$

La probabilità che escano 2 numeri uguali lanciando i due dadi è pari a:

$$p = p^2(1) + p^2(2) + p^2(3) + p^2(4) + p^2(5) + p^2(6) = 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{4}{25} + \frac{1}{50} = \frac{9}{50}$$

---

2. Il raggio è pari alla distanza del punto C(2,2,2) dal piano di equazione $x + 2y + z - 12 = 0$:

$$R = \frac{|2 + 4 + 2 - 12|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

---

3. La funzione ha un punto angoloso in $x = 4$ in quanto è ivi continua ma non derivabile con limiti destro e sinistro della derivata prima in $x = 4$ differenti ma finiti.
La derivata prima è:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + 2, per\ x < 4 \\ -e^{4-x}, per\ x \geq 4 \end{cases}$$

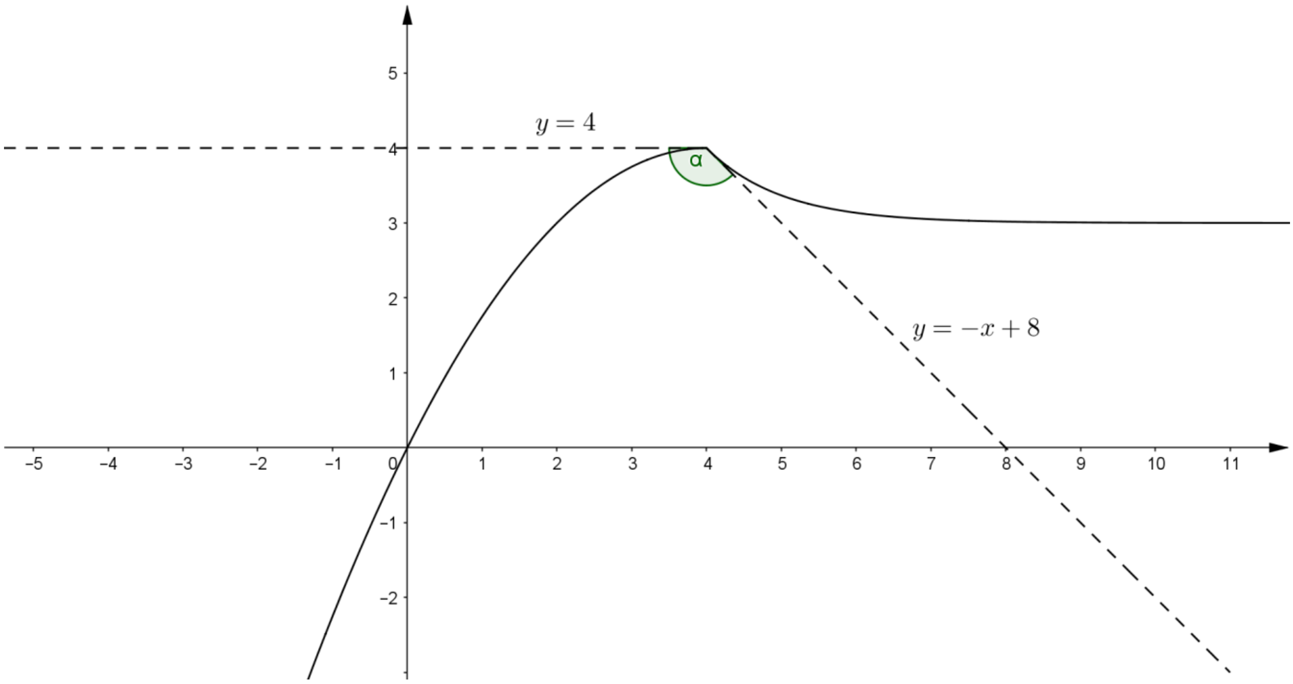
per cui

$$\lim_{x\to 4^-} f'(x) = \lim_{x\to 4^-} \left(-\frac{x}{2} + 2\right) = 0$$
$$\lim_{x\to 4^+} f'(x) = \lim_{x\to 4^+} (-e^{4-x}) = -1$$

Le rette tangenti in $x = 4$ hanno rispettivamente equazioni:

$$y = 4$$
$$y = -x + 8$$

Consideriamo la figura seguente in cui sono raffigurate la funzione e le tangenti nel punto angoloso.



L'angolo tra le due tangenti deve soddisfare l'equazione seguente:

$$\tan\alpha = \frac{m_1 + m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{0-1}{1+0} = -1 \rightarrow \alpha = 135°$$

---

4. Applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale si ha:

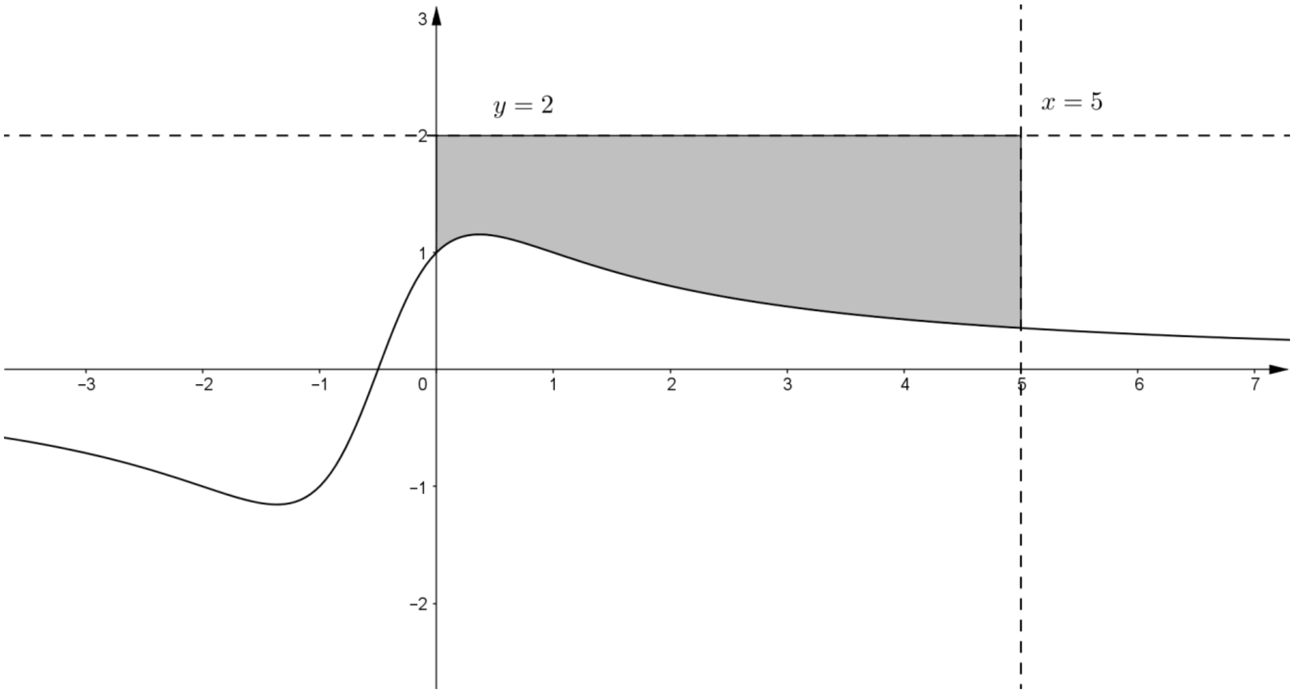
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\sin(x+h) - x\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x[\sin(x+h) - \sin(x)] + h\sin(x+h)}{h}$$

Utilizzando le formule di Prostaferesi si ha:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{x\left[2\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)\right] + h\sin(x+h)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x\left[2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)\right] + h\sin(x+h)}{h} =$$
$$= 2x\cos(x)\left[\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}}_{=\frac{1}{2}}\right] + \sin(x) = x\cos(x) + \sin(x)$$

---

5. Consideriamo la figura seguente che raffigura la regione di cui calcolare l'area.



L'area è pari a:

$$S = 2 \cdot 5 - \int_0^5 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = 10 - [\ln(x^2+x+1)]_0^5 = 10 - \ln(31) \cong 6.57$$

---

6. La derivata seconda è pari a:

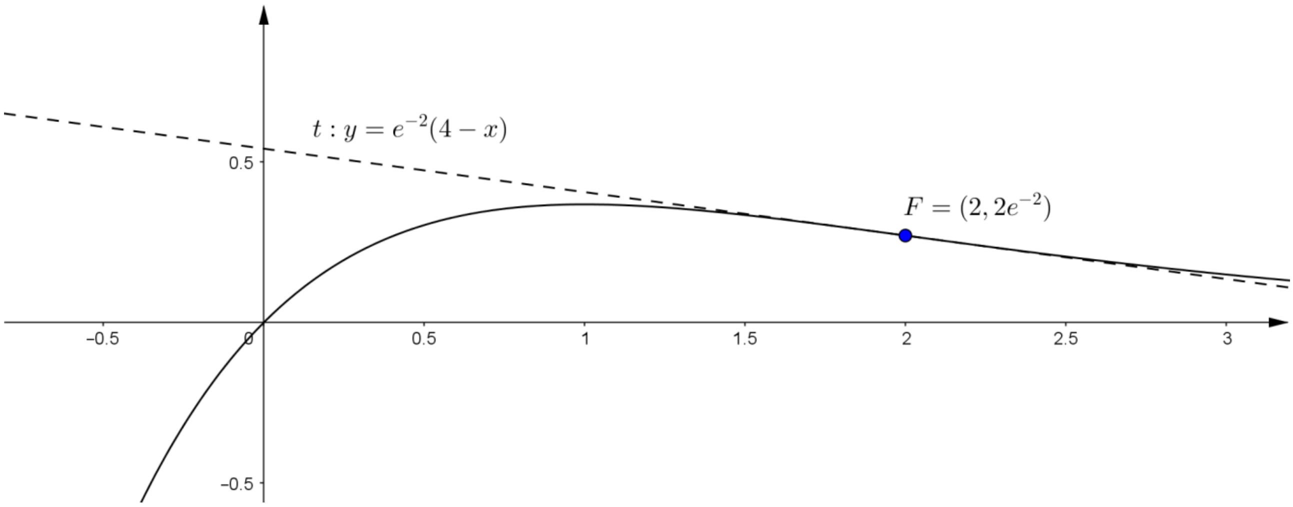
$$\frac{d^2}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[f'(x)] = \frac{d}{dx}(-xe^{-x} + e^{-x}) = xe^{-x} - e^{-x} - e^{-x} = e^{-x}(x-2)$$

di conseguenza il punto $(2{,}2e^{-2})$ è punto di flesso.

La retta tangente al grafico nel punto di flesso è:

$$y = m(x-2) + 2e^{-2} = f'^{(2)(x-2)} + 2e^{-2} = -e^{-2}(x-2) + 2e^{-2} = e^{-2}(4-x)$$

Di seguito il grafico in cui sono raffigurate la funzione e la tangente nel suo punto di flesso.



---

7. Verifichiamo innanzitutto che $f(x)$ è una densità di probabilità ovvero che

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 1$$

Si ha:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{7}{12}\right)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} \left(\frac{1}{2}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{7}{12}\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6} + \frac{7}{12} + \frac{1}{4} = 1$$

Il valore medio è pari a:

$$E[X] = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{3}\right)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{7x}{12}\right)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} \left(\frac{x}{2}\right)dx =$$
$$= \left[\frac{x^2}{6}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{7x^2}{24}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{x^2}{4}\right]_{\frac{3}{2}}^{2} = \frac{1}{24} + \left(\frac{21}{32}-\frac{7}{96}\right) + \left(1-\frac{9}{16}\right) = \frac{1}{24} + \frac{7}{12} + \frac{7}{16} = \frac{17}{16}$$

Poichè

$$p\left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} < \frac{1}{2}$$
$$p\left(0 \le x \le \frac{3}{2}\right) = p\left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right) + p\left(\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6} + \frac{7}{12} = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$$

deduciamo che il valore mediano appartiene all’intervallo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

Indichiamo con y il valore mediano, per definizione di valore mediano si ha:

$$\int_{-\infty}^{y} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \text{ e } \int_{y}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

Nel caso in esame, ricordando che il valore mediano appartiane all'intervallo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, y è valore mediano se:

$$\int_0^y f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{y} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{1}{6} + \frac{7}{12}\left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{7}{12}\left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{7}{12}\left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \rightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{7} \rightarrow y = \frac{4}{7} + \frac{1}{2} = \frac{15}{14}$$

---

8. I parametri direttori del piano $2x - y - z = 0$ sono (2, -1, -1), pertanto la retta perpendicolare ad esso e passante per il punto (1, 1, 1) ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

La distanza dal piano di equazione è:

$$d = \frac{|2 + 4t - 1 + t - 1 + t|}{\sqrt{6}} = \frac{|6t|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}|t|$$

Tale distanza è pari a 6 se:

$$\sqrt{6}|t| = 6 \rightarrow t = \pm\sqrt{6}$$

I punti quindi a distanza 6 dal piano sono:

$$\left(1 + 2\sqrt{6}, 1 - \sqrt{6}, 1 - \sqrt{6}\right), \left(1 - 2\sqrt{6}, 1 + \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6}\right)$$

---

9. La derivata prima della funzione $f(x) = \frac{ax+1}{x}$ è

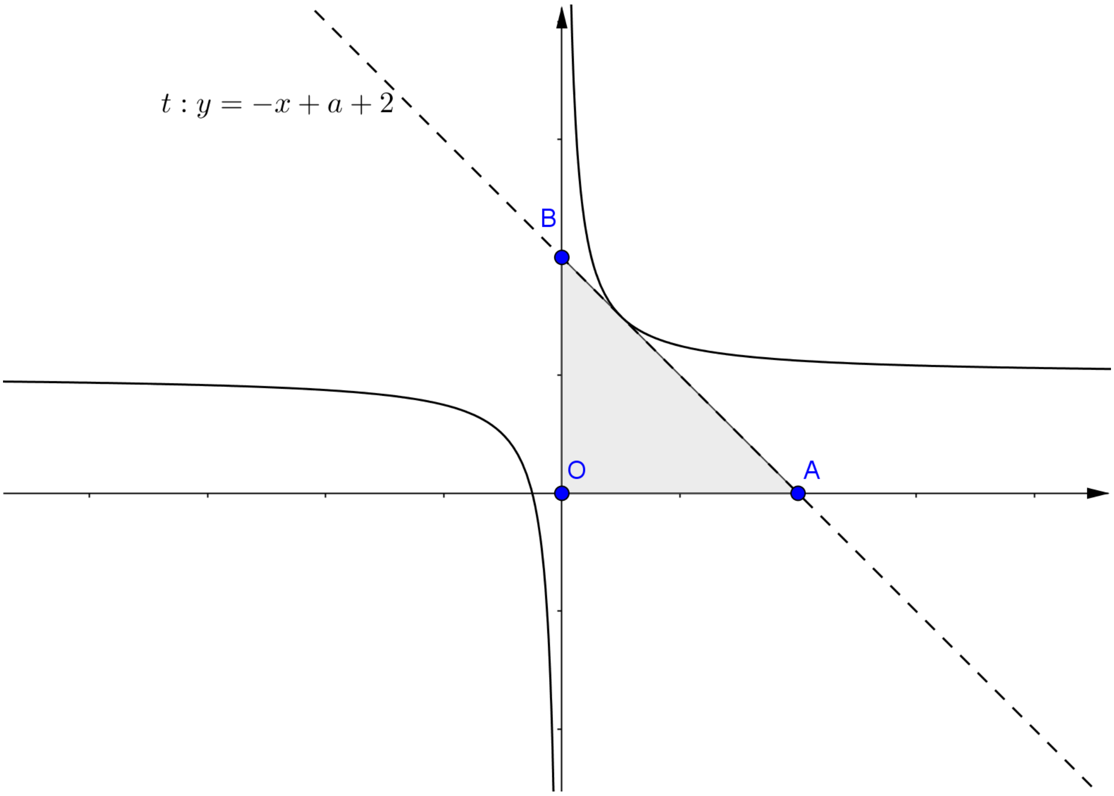
$$f'(x) = \frac{ax - ax - 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Poichè $f'(1) = f'(-1) = -1$ deduciamo che le tangenti alla curva nei punti di ascissa -1 ed 1 hanno entrambe coefficiente angolare -1 e pertanto sono parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

La tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(1, a + 1)$ ha equazione

$$y = -(x-1) + a + 1 = -x + a + 2$$

Consideriamo la seguente figura.



Tale tangente incontra gli assi cartesiani nei punti $A = (0, a+2)$, $\mathrm{B} = (a+2{,}0)$, di conseguenza l'area del triangolo formato da tale tangente con gli assi cartesiani è rettangolo isoscele di area

$$S(AOB) = \frac{(a+2)^2}{2}$$

Tale area è maggiore di 3 se

$$\frac{(a+2)^2}{2} > 3 \to (a+2)^2 > 6 \to (a+2) > \sqrt{6} \to a < -\sqrt{6} - 2 \vee a > \sqrt{6} - 2$$

Quindi non esiste il valore minimo di a tale per cui l'area del triangolo è pari a 3; si può certamente dire, invece, che il valore minimo di a tale per cui l'area del triangolo è 3 è $a = -\sqrt{6} - 2$.

---

10. Applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale si ha:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{a(x+h)} - e^{ax}}{h} = e^{ax} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^{ah} - 1}{h} = e^{ax} \cdot a \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{e^{ah} - 1}{ah}}_{=1} = a \cdot e^{ax}$$