Esame di stato di istruzione secondaria superiore
Indirizzi: Scientifico comunicazione opzione sportiva
Tema di matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario

PROBLEMA 1
Sia dato un sistema di assi cartesiani *Oxy* in cui l'unità corrisponde a 1 metro. Una particella puntiforme si muove lungo l'asse delle ascisse, nel verso positivo, partendo dall'origine, con una velocità di 2 metri al secondo. Quando la particella si trova in un generico punto $x = a$, costruisci un triangolo prendendo le tangenti alla curva di equazione $y = ax - x^2$ nei punti di ascissa 0 e a.

1. Determina l'area del triangolo in funzione di a; quanto vale l'area del triangolo dopo 5 secondi?

2. Dopo quanti secondi il triangolo diventa equilatero?

3. Esprimi in funzione di a l'angolo θ formato dalle due tangenti alla curva di equazione $y = ax - x^2$ nei punti di ascissa 0 e a; utilizzando l'espressione di θ in funzione di a, verifica la correttezza della risposta che hai fornito al punto precedente.

4. Quando la particella si trova nel generico punto $x = a$, determina l'area della superficie limitata superiormente dalle due rette tangenti e inferiormente dalla curva di equazione $y = ax - x^2$.

SVOLGIMENTO

Punto 1

Consideriamo i punti $O=(0,0), A=(a,0)$.

La tangente alla curva $y=ax-x^2$ in $O=(0,0)$ ha equazione:

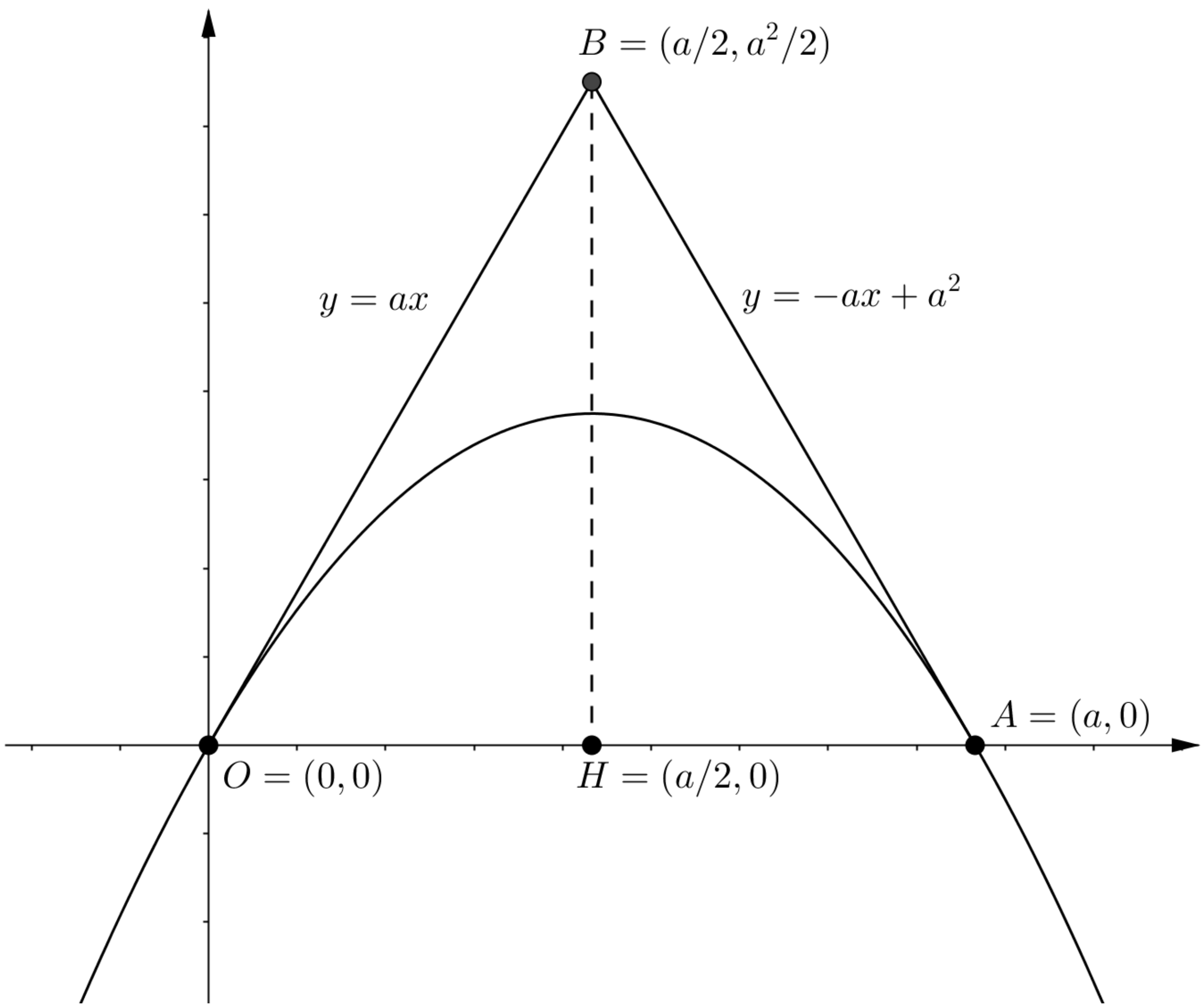
$$y=f'(0)\cdot x=[a-2x]_{x=0}\cdot x=a\cdot x$$

La tangente alla curva $y=ax-x^2$ in $A=(a,0)$ ha equazione:

$$y=f'(a)\cdot(x-a)=[a-2x]_{x=a}\cdot(x-a)=-a\cdot(x-a)=-ax+a^2$$

Le due tangenti si intersecano nel punto $B=\left(\frac{a}{2},\frac{a^2}{2}\right)$.

Di seguito la figura in cui è rappresentato il triangolo OBA di cui calcolare l'area.



Il triangolo OBA è isoscele e la sua area è:

$$S(OBA) = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{BH}}{2} = \frac{a \cdot \frac{a^2}{2}}{2} = \frac{a^3}{4}$$

Dopo 5 secondi sono stati percorsi $a = 10\ metri$ pertanto l’area del triangolo è:

$$S(10) = 250\ m^2$$

Punto 2

Il triangolo è equilatero se

$$\overline{OB} = \overline{OA}$$

Essendo $\overline{OB} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{a^2+1}$, il triangolo è equilatero se:

$$\frac{a}{2}\sqrt{a^2+1} = a \to \sqrt{a^2+1} = 2 \to a^2 + 1 = 4 \to a^2 = 3 \to a = \pm\sqrt{3}$$

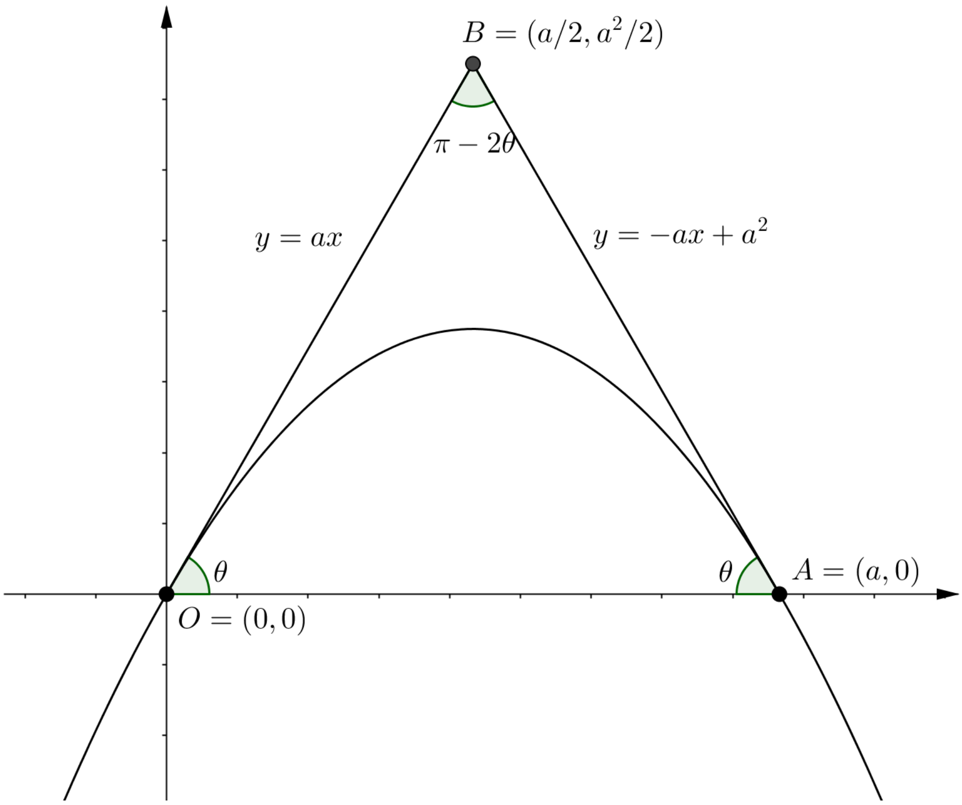
Scartando la soluzione negativa $a = -\sqrt{3}$, il triangolo è equilatero se $a = \sqrt{3}$ e lo diventa dopo $\frac{\sqrt{3}}{2}$ secondi.

Alternativamente il triangolo è equilatero quando gli angoli sono di 60° ovvero quando l’angolo formato dalla retta OB con l’asse delle ascisse è pari a 60°. Considerando che, da un punto di vista geometrico, il coefficiente angolare a della retta OB di equazione $y = ax$ coincide con la tangente dell’angolo formato dalla retta OB con l’asse delle ascisse, deduciamo che il triangolo è equilatero se:

$$a = \tan(60°) = \sqrt{3}$$

Punto 3

Consideriamo la figura seguente in cui è raffigurato il triangolo con i relativi angoli.



La tangente dell'angolo formato dalle due tangenti è pari a:

$$\tan(\pi - 2\theta) = \frac{m_{OB} - m_{AB}}{1 + m_{OB} \cdot m_{AB}} = \frac{2a}{1 - a^2}$$

Se $0 < a < 1$ ovvero $0° < \theta < 45°$ si ha $\tan(\pi - 2\theta) < 0$

pertanto

$$\tan(\pi - 2\theta) = -\left|\frac{2a}{1 - a^2}\right| = \frac{2a}{a^2 - 1} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2a}{a^2 - 1}\right)$$

Se $a > 1$ ovvero $45° < \theta < 90°$ si ha $\tan(\pi - 2\theta) > 0$

pertanto

$$\tan(\pi - 2\theta) = \left|\frac{2a}{1 - a^2}\right| = \frac{2a}{a^2 - 1} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2a}{a^2 - 1}\right)$$

Quindi in conclusione:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2a}{a^2 - 1}\right)$$

ed il triangolo è equilatero se:

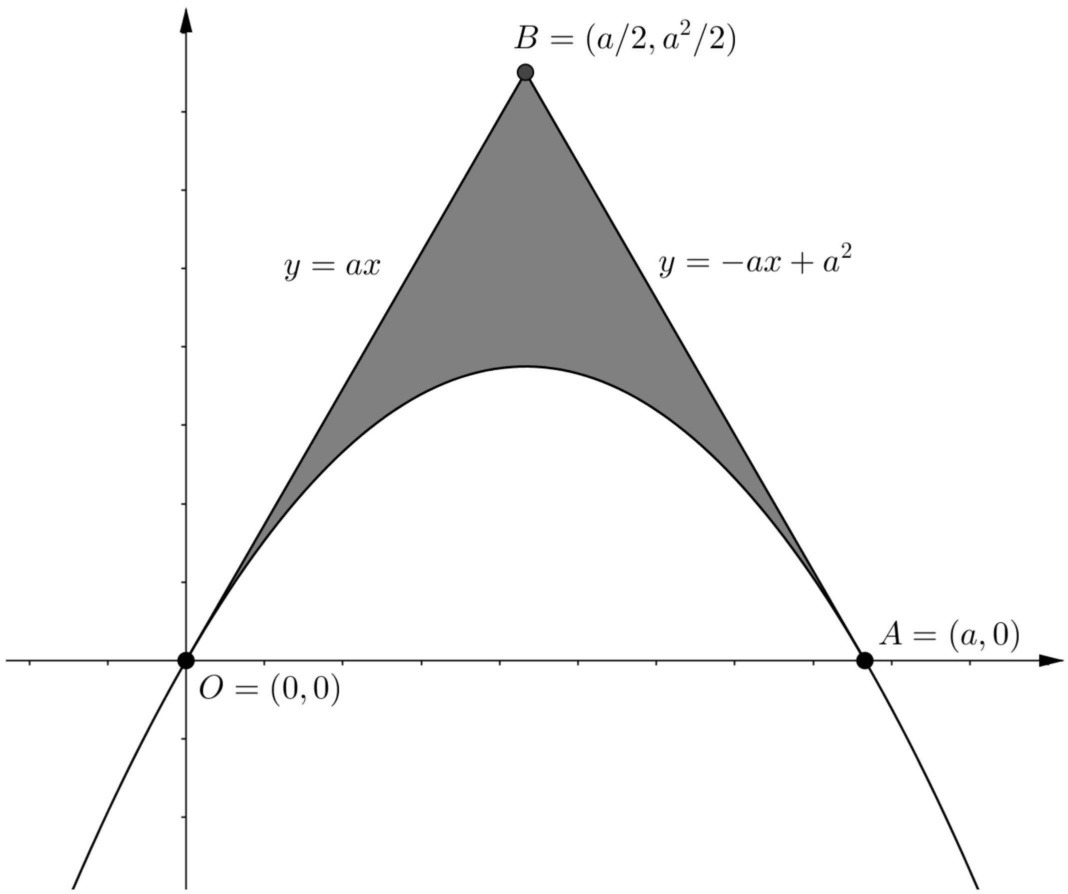
$$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2a}{a^2 - 1}\right) = \frac{\pi}{3} \rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2a}{a^2 - 1}\right) = \frac{\pi}{3} \rightarrow$$

$$\to \frac{2a}{a^2-1} = \sqrt{3} \to a^2\sqrt{3} - 2a - \sqrt{3} = 0 \to$$
$$\to a = \frac{1 \pm 2}{\sqrt{3}} \to a = -\frac{\sqrt{3}}{3}, a = \sqrt{3}$$

ed il valore accettabile è $a = \sqrt{3}$ come trovato in precedenza.

Punto 4

Di seguito la regione di piano *R* di cui calcolare l'area.



E' possibile calcolare tale area per differenza tra l'area del triangolo OBA e l'area sottesa dal segmento parabolico:

$$S(R) = \frac{a^3}{4} - \int_0^a (ax - x^2)\,dx = \frac{a^3}{4} - \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{4} - \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{12}$$

Alternativamente l'area del segmento parabolico, per il teorema di Archimede, è pari ai $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto.

Il rettangolo circoscritto ha base a ed altezza pari all'ordinata del vertice della parabola ovvero $\frac{a^2}{4}$, di conseguenza l'area del rettangolo sarà $\frac{a^3}{4}$ e l'area del segmento parabolico $\frac{2}{3} \cdot \frac{a^3}{4} = \frac{a^3}{6}$.

PROBLEMA 2

Fissato un numero reale $k > 0$, si definiscono le funzioni:

$$f_k(x) = k \cdot \ln(x) \text{ e } g_k(x) = e^{\frac{x}{k}}$$

i cui grafici sono indicati, rispettivamente, con F_k e G_k.

1. Verifica che, qualunque sia $k > 0$, le due funzioni f_k e g_k sono tra loro inverse; definite inoltre le funzioni:

   $$a(x) = f_k\big(g_k(x)\big) \text{ e } b(x) = g_k\big(f_k(x)\big)$$

   stabilisci se si verifica $a(x) = b(x), \forall x \in \Re$.

2. Indicata con r la retta di equazione $y = x$, determina l'equazione della retta s_2, parallela a r e tangente al grafico F_2 della funzione $f_2(x) = 2 \cdot \ln(x)$. Determina inoltre l'equazione della retta t_2, parallela a r e tangente al grafico G_2 della funzione $g_2(x) = e^{\frac{x}{2}}$.
   Rappresenta i grafici F_2 e G_2 insieme alle rette s_2 e t_2 e stabilisci qual è la distanza minima tra un punto di F_2 e un punto di G_2.
3. Verifica che l'equazione $f_3(x) = g_3(x)$ possiede due soluzioni sapendo che, qualunque sia $k > 0$, gli eventuali punti d'intersezione tra il grafico F_k e il grafico G_k coincidono con i punti di intersezione tra uno qualsiasi di tali grafici e la retta di equazione $y = x$. Stabilisci inoltre per quali valori $k > 0$ i grafici F_k e G_k sono secanti, per quali valori sono disgiunti e per quale valore essi sono tangenti.
4. Sia A la regione limitata compresa tra i grafici F_e e G_e e gli assi cartesiani. Determina l'area di A ed il volume del solido generato ruotando A attorno a uno degli assi cartesiani.

SVOLGIMENTO

Punto 1

La funzione $f_k(x) = k \cdot \ln(x)$ ha come dominio $x > 0$ e la derivata prima $f_k'(x) = \frac{k}{x}$ è sempre positiva nel dominio, di conseguenza la funzione è strettamente crescente ed è quindi invertibile.

La sua inversa è:

$$y = k \cdot \ln(x) \rightarrow \ln(x) = \frac{y}{k} \rightarrow x = e^{\frac{y}{k}}$$

Invertendo le variabili *x* ed *y* otteniamo che la funzione inversa di $f_k(x) = k \cdot \ln(x)$ è $g_k(x) = e^{\frac{x}{k}}$.

La funzione $g_k(x) = e^{\frac{x}{k}}$ ha come dominio R e la derivata prima $g_k'(x) = \frac{1}{k} e^{\frac{x}{k}}$ è sempre positiva nel dominio, di conseguenza la funzione è strettamente crescente ed è quindi invertibile.

La sua inversa è:

$$y = e^{\frac{x}{k}} \rightarrow \frac{x}{k} = \ln(y) \rightarrow x = k \cdot \ln(y)$$

Invertendo le variabili *x* ed *y* otteniamo che la funzione inversa di $g_k(x) = e^{\frac{x}{k}}$ è $f_k(x) = k \cdot \ln(x)$.

Calcoliamo ora $a(x) = f_k(g_k(x))$ e $b(x) = g_k(f_k(x))$, si ha:

$$a(x) = k \cdot \ln\left(e^{\frac{x}{k}}\right) = k \cdot \frac{x}{k} = x, \forall x \in \Re$$
$$b(x) = e^{\frac{k \cdot \ln(x)}{k}} = e^{\ln(x)} = x, x > 0$$

Di conseguenza $a(x) = b(x)$ solo per $x > 0$ e non per $\forall x \in \Re$.

Punto 2

L'equazione della retta s_2, parallela a *r* e tangente al grafico F_2 è:

$$y = x + q$$

Detto $S = (a, a + q)$ il punto di tangenza, la condizione di tangenza a $f_2(x) = 2 \cdot \ln(x)$ è soddisfatta se

$$f_2'(a) = \frac{2}{a} = 1 \rightarrow a = 2$$

Imponendo l'uguaglianza tra $f_2(x)$ e s_2 nel passaggio per il punto di tangenza $S = (2, 2 + q)$ si ha:

$$2 \cdot \ln(2) = 2 + q \rightarrow q = 2 \cdot \ln(2) - 2$$

Quindi il punto di tangenza è $S = (2, 2 + 2 \cdot \ln(2))$ e la retta tangente è:

$$s_2: y = x + 2 \cdot \ln(2) - 2$$

L'equazione della retta t_2, parallela a r e tangente al grafico G_2 è:

$$y = x + q$$

Detto $T = (a, a+q)$ il punto di tangenza, la condizione di tangenza a $g_2(x) = e^{\frac{x}{2}}$ è soddisfatta se

$$g_2'(a) = \frac{1}{2}e^{\frac{a}{2}} = 1 \rightarrow e^{\frac{a}{2}} = 2 \rightarrow a = 2 \cdot \ln(2)$$

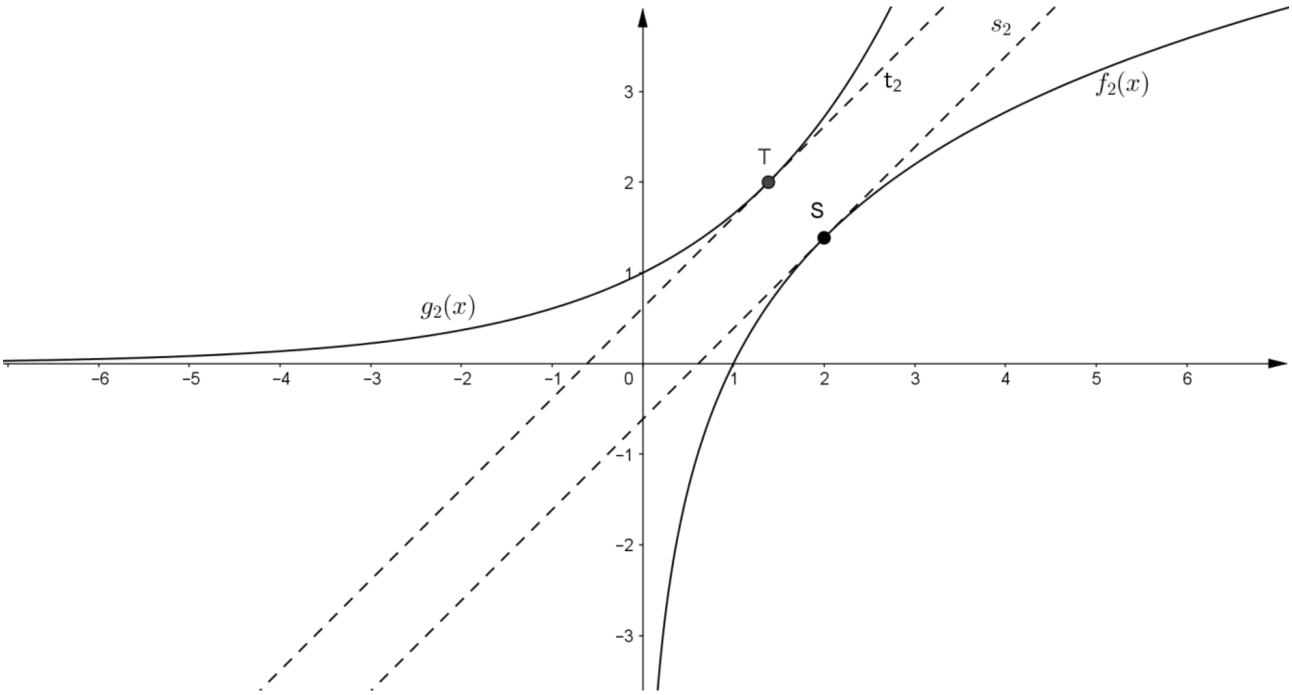
Imponendo l'uguaglianza tra $g_2(x)$ e t_2 nel passaggio per il punto di tangenza $T = (2 \cdot \ln(2), 2 \cdot \ln(2) + q)$ si ha:

$$2 = 2 \cdot \ln(2) + q \rightarrow q = 2 - 2 \cdot \ln(2)$$

Quindi il punto di tangenza è $T = (2 \cdot \ln(2), 2)$ e la retta tangente è:

$$t_2 \colon y = x + 2 - 2 \cdot \ln(2)$$

Di seguito il grafico.



La distanza minima tra un punto di F_2 e un punto di G_2 è la distanza tra i punti di tangenza T ed S:

$$d = \sqrt{(2 - 2\ln 2)^2 + (2 - 2\ln 2)^2} = \sqrt{2}(2 - 2\ln 2) \cong 0.87$$

Punto 3

Consideriamo la funzione

$$h(x) = f_3(x) - g_3(x) = 3 \cdot \ln(x) - e^{\frac{x}{3}}, x > 0$$

Si ha:

$$h(1) = 3 \cdot \ln(1) - e^{\frac{1}{3}} = -e^{\frac{1}{3}} < 0$$

$$h(2) = 3 \cdot \ln(2) - e^{\frac{2}{3}} > 0$$

$$h(4) = 3 \cdot \ln(4) - e^{\frac{4}{3}} > 0$$

$$h(5) = 3 \cdot \ln(5) - e^{\frac{5}{3}} < 0$$

di conseguenza le funzioni $f_3(x)$ e $g_3(x)$ si intersecano in 2 punti ad ascisse:

$$\alpha \in (1,2)$$

$$\beta \in (4,5)$$

Per verificare che le intersezioni siano solo 2, verifichiamo che le intersezioni tra $f_k(x) = k \cdot \ln(x)$ e la retta $y = x$ siano al massimo 2 al variare di k.

Consideriamo la funzione

$$h_1(x) = f_k(x) - x = k \cdot \ln(x) - x, x > 0$$

La derivata prima è

$$h_1'(x) = \frac{k}{x} - 1$$

Se $k < 0$ la funzione $h_1(x)$ è strettamente decrescente e poichè

$$\lim_{x \to 0^+} h_1(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1} h_1(x) = -1$$

si deduce che $h_1(x)$ ha un'unica radice ed appartiene all'intervallo (0,1).

Se $k > 0$ si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} h_1(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} h_1(x) = \lim_{x \to +\infty} kx \overbrace{\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{k}\right)}^{\to -\frac{1}{k}} = \lim_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$$

Inoltre per $k > 0$ la funzione $h_1(x)$ è strettamente crescente in $(0, k)$ e strettamente decrescente in $(k, +\infty)$ pertanto $(k, k \cdot \ln k - k)$ è punto di massimo relativo; in particolare tale massimo relativo avrà ordinata positiva se

$$k \cdot \ln k - k > 0 \to \ln k > 1 \to k > e$$

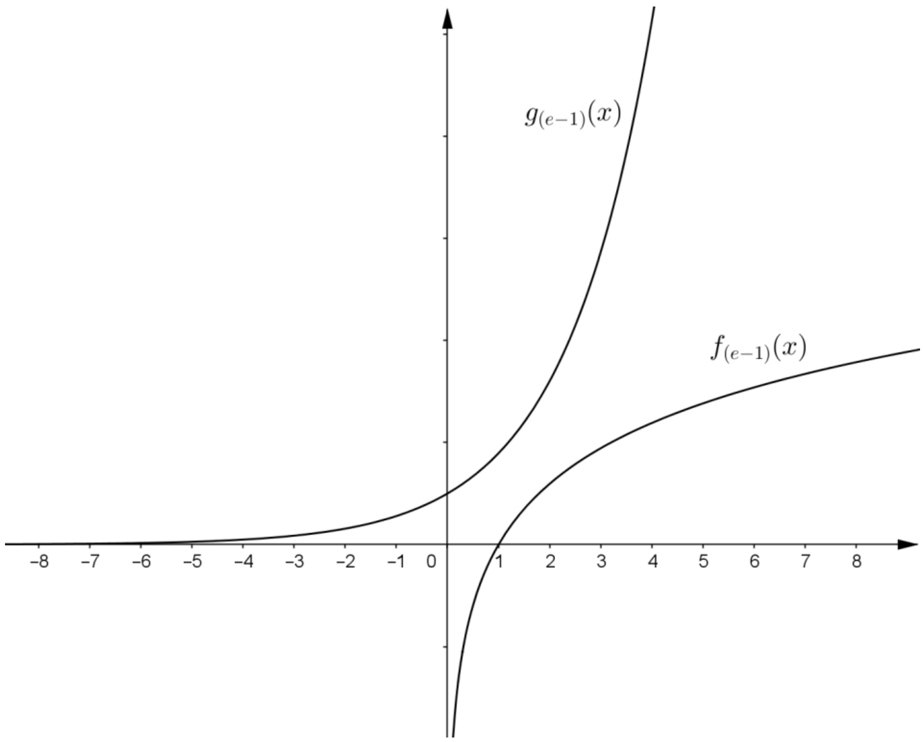
di conseguenza

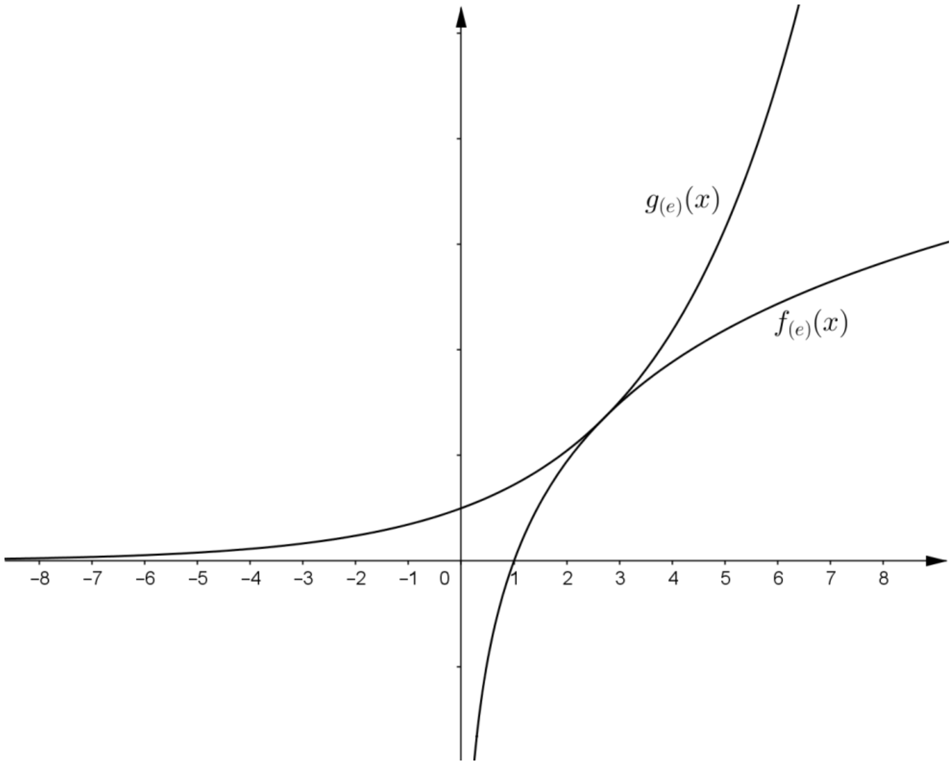
- se $k < e$, considerando il comportamento di $h_1(x)$ nell'intorno dello 0 e di $+\infty$, deduciamo che la funzione $h_1(x)$ non ha alcuna radice reale;
- se $k = e$, considerando il comportamento di $h_1(x)$ nell'intorno dello 0 e di $+\infty$, deduciamo che la funzione $h_1(x)$ ha una radice doppia $x = e$;
- se $k > e$, considerando il comportamento di $h_1(x)$ nell'intorno dello 0 e di $+\infty$, deduciamo che la funzione $h(x)$ ha 2 radici reali.

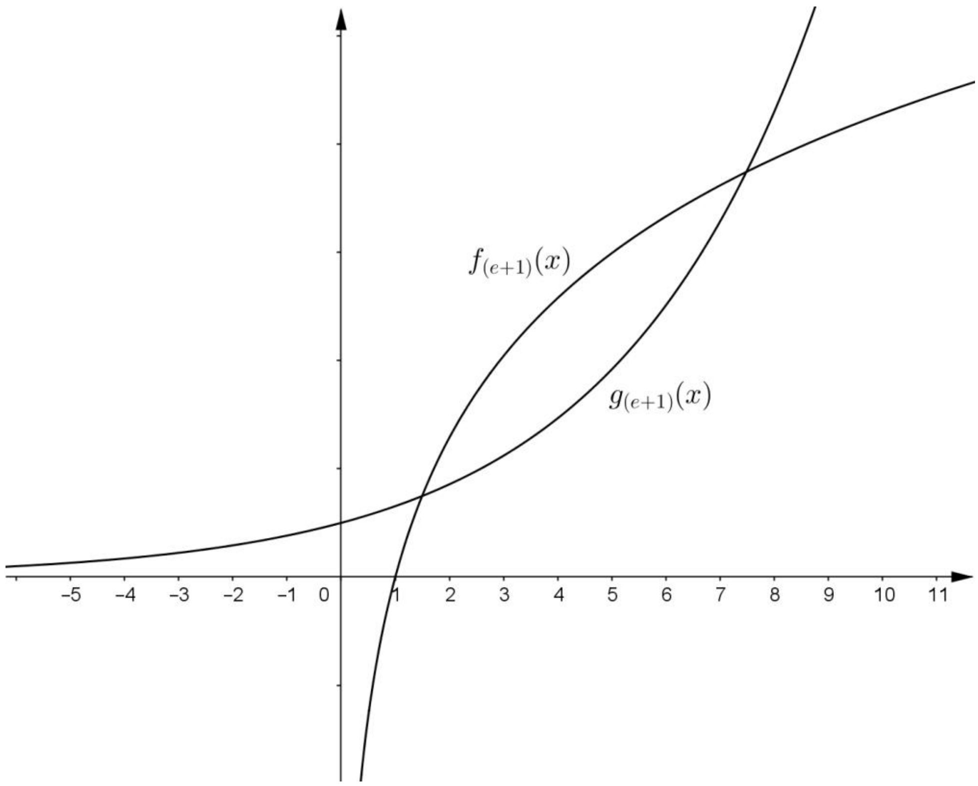
Quindi:

- se $k < e$ i grafici F_k e G_k sono disgiunti;
- se $k = e$ i grafici F_k e G_k sono tangenti;
- se $k > e$ i grafici F_k e G_k sono secanti.

Di seguito 3 grafici relativi alle 3 differenti situazioni: $k = e - 1, k = e, k = e + 1$.

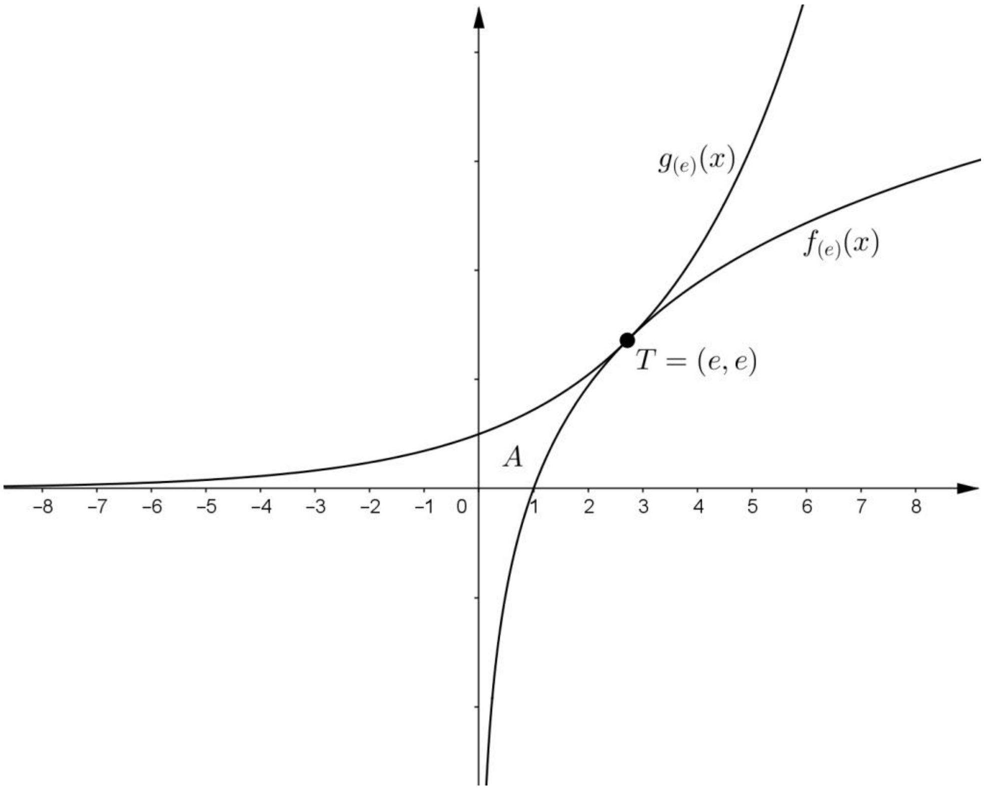






Punto 4

Consideriamo la figura seguente in cui è raffigurata la regione A:



L'area richiesta è pari a:

$$S(A)=\int_0^e e^{\frac{x}{e}}\,dx-\int_1^e e\cdot\ln x\,dx=\left[e\cdot e^{\frac{x}{e}}\right]_0^e-e\cdot[x(\ln x-1)]_1^e=$$

$$=(e^2-e)-e(0+1)=e^2-2e$$

Il volume dato dalla rotazione di A intorno all'asse delle ascisse è:

$$V(A)=\pi\int_0^e e^{\frac{2x}{e}}\,dx-\pi\int_1^e (e\cdot\ln x)^2\,dx=\pi\left[\frac{e}{2}\cdot e^{\frac{2x}{e}}\right]_0^e-\pi e^2\cdot[x(\ln^2 x-2\ln x+2)]_1^e=$$

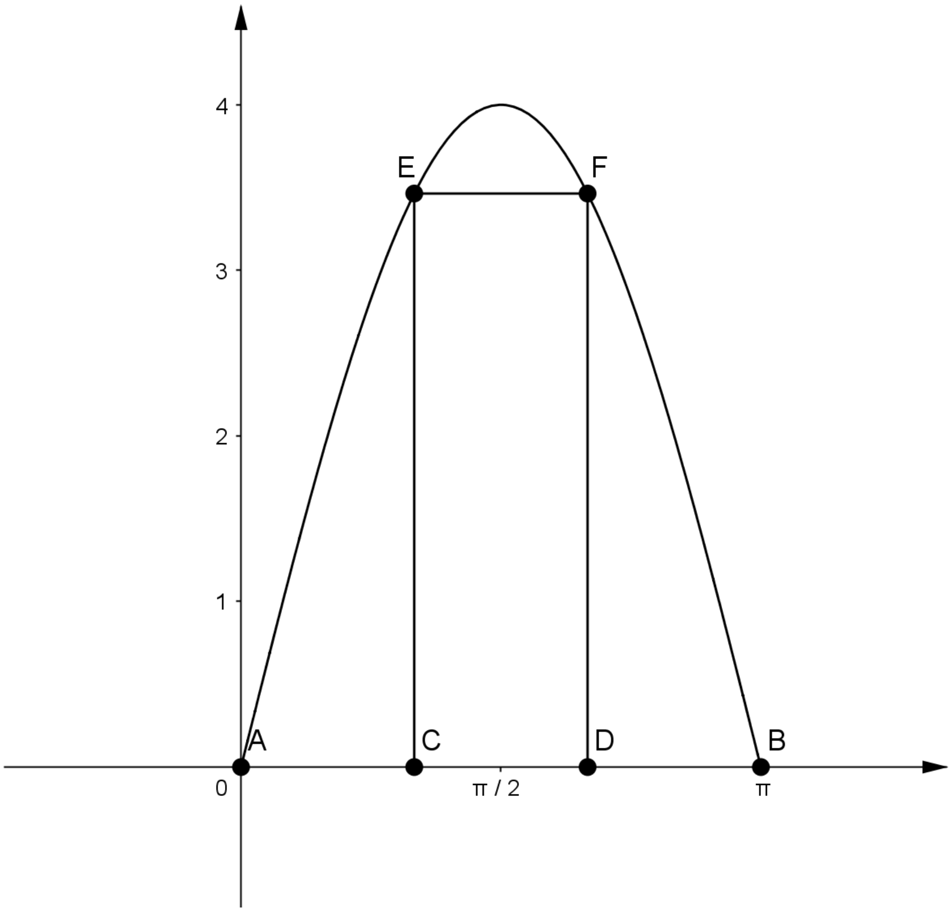
$$=\pi\left(\frac{e^3}{2}-\frac{e}{2}\right)-\pi e^2(e-2)=\pi\left(-\frac{e^3}{2}+2e^2-\frac{e}{2}\right)=\pi\left(\frac{-e^3+4e^2-e}{2}\right)$$

QUESTIONARIO

1. Considerati nel piano cartesiano i punti $A(0,0)$ e $B(\pi, 0)$, sia *R* la regione piana delimitata dal segmento *AB* e dall'arco di curva avente equazione $y = 4\sin x$, con $0 \leq x \leq \pi$. Calcolare il massimo perimetro che può avere un rettangolo inscritto in *R* avente un lato contenuto nel segmento *AB*.
2. Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ nell'intervallo $[p, 2p]$ e, detto Γ il suo grafico, sia *t* la retta tangente a Γ nel suo punto di ascissa *p*. Determinare, al variare di *p*, le aree delle due parti in cui la retta *t* divide la regione finita di piano compresa fra Γ e l'asse delle ascisse.
3. Determinare l'equazione della superficie sferica di centro $C(1, -1,2)$ tangente al piano di equazione $x - y - z = 10$ e le coordinate del punto di contatto tra la superficie sferica e il piano.
4. Verificare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)\, dx$ per $n > 1$ e usare questo risultato per calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\, dx$.
5. Si lancia *n* volte un dado regolare a sei facce. Qual è il più piccolo valore di *n* tale che la probabilità che non esca mai il numero 3 sia minore dello 0,01%?
6. Data la funzione $y = x|ax^2 + b| - 3$, determinare i valori dei coefficienti *a* e *b* per i quali il grafico della funzione è tangente nel punto di ascissa $x = 1$ alla retta di equazione $y = 7x - 9$.
7. Date le curve γ_1 e γ_2 di equazione rispettivamente $y = x^2 + 1$ e $y = x^2 - 8x + 9$, sia *t* la retta che è tangente a entrambe. Stabilire l'area della regione di piano di area finita che è delimitata da γ_1, γ_2 e *t*.
8. Una variabile casuale, a valori nell'intervallo [0, 10], è distribuita secondo la densità di probabilità data dalla funzione
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}x^2, 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{12}, \qquad 1 < x \leq 10 \end{cases}$$
Stabilire il valore medio e il valore mediano di questa variabile casuale.
9. Determinare il luogo geometrico dei punti $P(x, y, z)$ equidistante dai punti ti $A(0,1,2)$ e $B(-3,2,0)$.
10. Verificare che la funzione $y(x) = e^{-x} \sin x$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + 2y = 0$.

SVOLGIMENTO

1. Consideriamo la figura seguente.



Il rettangolo R ha vertici:

$$C = (x, 0), D = (\pi - x, 0), E = (x, 4\sin x), F = (\pi - x, 4\sin x)$$

Il perimetro del rettangolo è pari a:

$$2p(x) = 2 \cdot (\pi - 2x) + 2 \cdot 4\sin x = 2 \cdot (\pi - 2x + 4\sin x)$$

La derivata prima della funzione perimetro è:

$$2p'(x) = 2 \cdot (-2 + 4\cos x)$$

ed è positiva se

$$\cos x > \frac{1}{2} \to 0 \leq x < \frac{\pi}{3}$$

Di conseguenza la funzione perimentro è strettamente crescente per $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$ e strettamente decrescente per $\frac{\pi}{3} < x \leq \pi$ pertanto il perimetro è massimo per $x = \frac{\pi}{3}$ e misura

$$2p\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \left(\pi - \frac{2\pi}{3} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + 4\sqrt{3}$$

2. La retta *t* ha equazione:

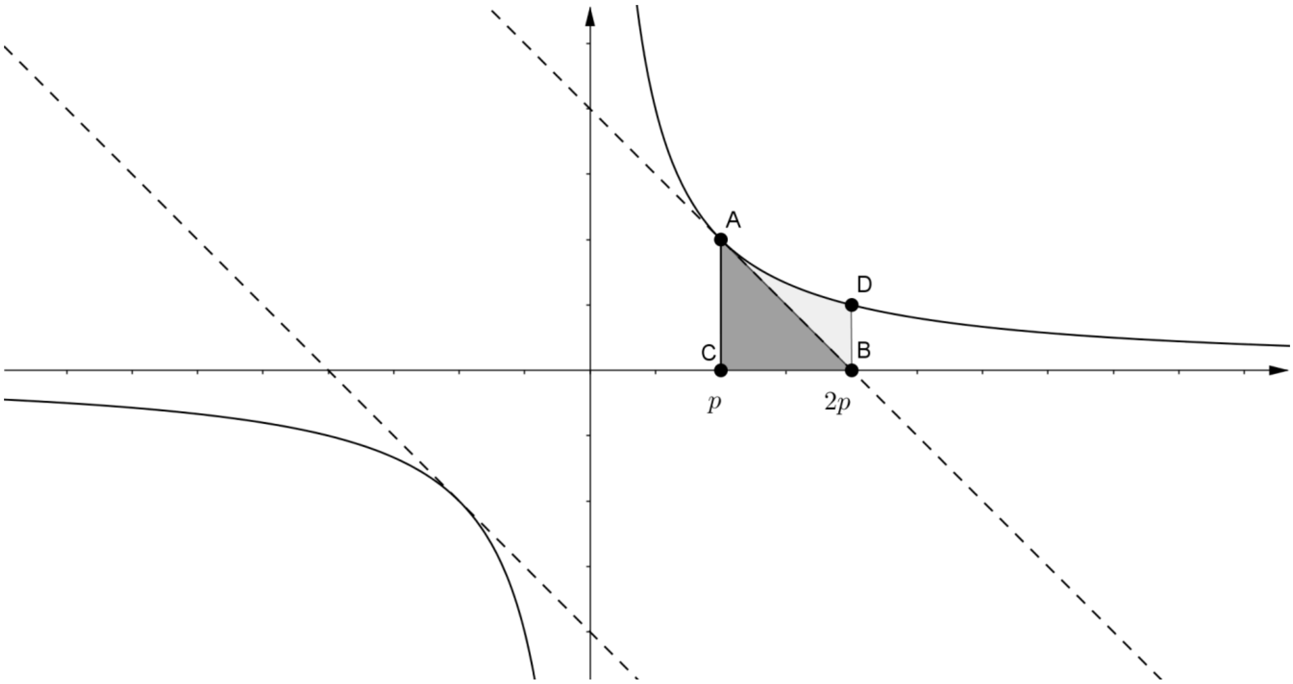
$$t\colon y = f'(p)(x-p) - \frac{1}{p}$$

dove $f'(p) = -\frac{1}{p^2}$ pertanto la retta diventa:

$$t\colon y = -\frac{1}{p^2}\,(x-p) - \frac{1}{p} = -\frac{x}{p^2} - \frac{2}{p}$$

La retta tantente interseca l'asse delle ascisse in $(2p, 0)$.

Consideriamo la figura seguente in cui, considerando $p > 0$, sono rappresentate le 2 regioni di piano in cui la tangente *t* divide la regione finita di piano compresa fra Γ e l'asse delle ascisse.



I punti A, B e C hanno coordinate $A = \left(p, \frac{1}{p}\right), B = (2p, 0), C = (p, 0)$.

L'area del triangolo ABC è:

$$S(ABC) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CB}}{2} = \frac{\frac{1}{p} \cdot p}{2} = \frac{1}{2}$$

L'area della regione in grigio chiaro è:

$$S(ABD) = \int_p^{2p} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} = [\ln x]_p^{2p} - \frac{1}{2} = \ln(2p) - \ln(p) - \frac{1}{2} = \ln(2) - \frac{1}{2}$$

Quindi al variare di *p* le aree in cui la tangente *t* divide la regione finita di piano compresa fra Γ e l'asse delle ascisse misurano rispettivamente $\frac{1}{2}$ e $\ln(2) - \frac{1}{2}$.

3. La retta perpendicolare al piano di eqauzione $x - y + z - 10 = 0$ e passante per il centro $C(1, -1, 2)$ ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Sostituendo tale equazione parametrica nell'equazione del piano, troviamo il punto di intersezione tra la retta ed il piano:

$$x - y + z - 10 = 0 \rightarrow 1 + t + 1 + t + 2 + t - 10 = 0 \rightarrow 3t = 6 \rightarrow t = 2$$

pertanto il punto di intersezione è $P(3, -3, 4)$.

Il raggio della superficie sferica è:

$$\overline{RC} = \sqrt{(3-1)^2 + (-3+1)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{3}$$

Quindi l'equazione della sfera è:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 12$$

---

4. Si ha:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \cos^{n-1}(x)\, dx$$

ed applicando l'integrazione per parti si ricava:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cdot\cos^{n-1}(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\left[\sin(x)\cdot\cos^{n-1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cdot\cos^{n-2}(x)\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cdot\cos^{n-2}(x)\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1-\cos^2(x)]\cdot\cos^{n-2}(x)\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)\,dx \rightarrow$$

$$\rightarrow n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)\,dx \rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx = \frac{(n-1)}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)\,dx$$

Applicando il risultato a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\,dx$ si ricava:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\,dx = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{3\pi}{16}$$

---

5. La probabilità che, lanciando una volta un dado regolare a 6 facce, non esca 3 è pari a $p = \frac{5}{6}$.
Lanciando *n* volte il dado, la probabilità che non esca mai 3 è $p^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
Imponendo che tale probabilità sia minore di 0,0001 si ha:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}0001 \rightarrow \ln\left[\left(\frac{5}{6}\right)^n\right] < \ln(10^{-4}) \rightarrow n\ln\left(\frac{5}{6}\right) < -4\ln 10 \rightarrow n > -\frac{4\ln 10}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \cong 50.5$$

Quindi con $n = 51$ si ottiene una probabilità inferiore a 0,01%.

---

6. Il valore assoluto nella funzione $y = x|ax^2+b| - 3$ ha senso solo se i coefficienti *a* e *b* sono di segno discorde. Assumiamo quindi che *a* e *b* siano di segno discorde.
E' possibile scrivere la funzione $y = x|ax^2+b| - 3$ nel seguente modo:

$$y=\begin{cases} ax^3+bx-3 & se\ \ x\le -\sqrt{-\frac{b}{a}}\ ,x\ge\sqrt{-\frac{b}{a}} \\ -ax^3-bx-3 & se -\sqrt{-\frac{b}{a}}<\ x<\sqrt{-\frac{b}{a}} \end{cases}$$

La derivata prima della funzione è:

$$y'=\begin{cases} 3ax^2+b & se\ \ x\le -\sqrt{-\frac{b}{a}}\ ,x\ge\sqrt{-\frac{b}{a}} \\ -3ax^2-b & se -\sqrt{-\frac{b}{a}}<\ x<\sqrt{-\frac{b}{a}} \end{cases}$$

Il passaggio per il punto $(1,-2)$ implica che:

$$|a+b|-3=-2\rightarrow|a+b|=1$$

Il grafico di y è tangente alla retta $y=7x-9$ nel punto $(1,-2)$ se

$$y'(1)=7$$

ovvero se

$$3a+b=7\ \text{ se } 1\ge\sqrt{-\tfrac{b}{a}}\leftrightarrow a+b\ge 0$$

oppure

$$3a+b=-7\text{ se }1<\sqrt{-\tfrac{b}{a}}\leftrightarrow a+b<0$$

Consideriamo ora $a+b\ge 0\rightarrow a\ge -b$.

I coefficienti a e b deve soddisfare il seguente sistema:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 3a+b=7 \end{cases}$$

la cui soluzione è:

$$\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$$

ed è accettabile in quanto soddisfa la condizione $a+b\ge 0$.

In questo caso l'equazione della funzione è

$$y = x|3x^2 - 2| - 3 = x(3x^2 - 2) - 3 = 3x^3 - 2x - 3$$

Consideriamo ora $a + b < 0 \rightarrow a < -b$.
I coefficienti a e b devono soddisfare i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = -7 \end{cases}$$

la cui soluzione è:

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

ed è accettabile $a + b < 0$ e corrisponde alla precedente con il segno invertito.

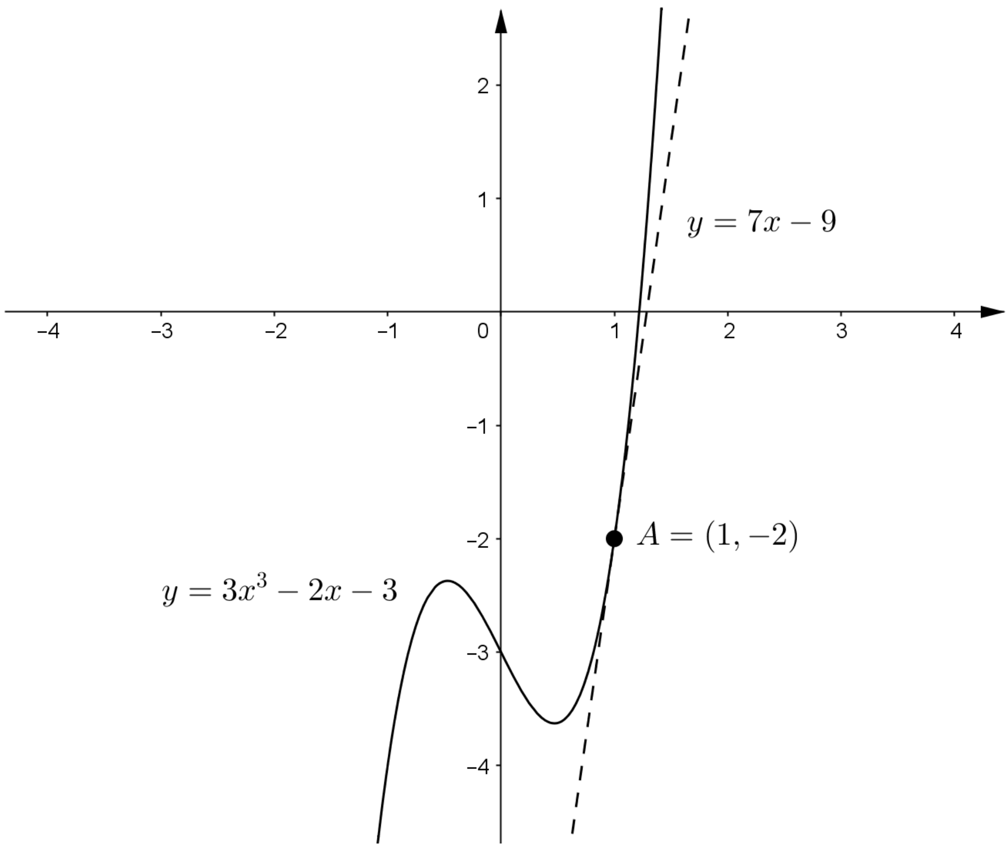
In questo caso l'equazione della funzione è

$$y = x|-3x^2 + 2| - 3 = x(3x^2 - 2) - 3 = 3x^3 - 2x - 3$$

Quindi i coefficienti a e b sono

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

e la funzione richiesta in ambo i casi è $y = 3x^3 - 2x - 3$.



7. Sia $T = (a, b)$ il punto di tangenza di t con γ_1 e $S = (c, d)$ il punto di tangenza di t con γ_2.
Il coefficiente angolare della tangente a γ_1 è:

$$m = f'(a) = 2a$$

mentre il coefficiente angolare della tangente a γ_2 è:

$$m = f'(c) = 2c - 8$$

Imponendo l'uguaglianza si ricava:

$$2a = 2c - 8 \to c = a + 4$$

La retta tangente a γ_1 ha equazione:

$$y = 2a(x - a) + a^2 + 1$$

La retta tangente a γ_2 ha equazione:

$$y = 2a(x - a - 4) + (a + 4)^2 - 8(a + 4) + 9$$

Imponendone l'uguaglianza si ricava:

$$2a(x - a) + a^2 + 1 = 2a(x - a - 4) + (a + 4)^2 - 8(a + 4) + 9 \to$$
$$\to 2ax - a^2 + 1 = 2ax - 2a^2 - 8a + a^2 + 8a + 16 - 8a - 32 + 9 \to$$
$$\to -a^2 + 1 = -a^2 - 8a - 7 \to 8a = -8 \to a = -1$$

L'equazione della tangente è quindi:

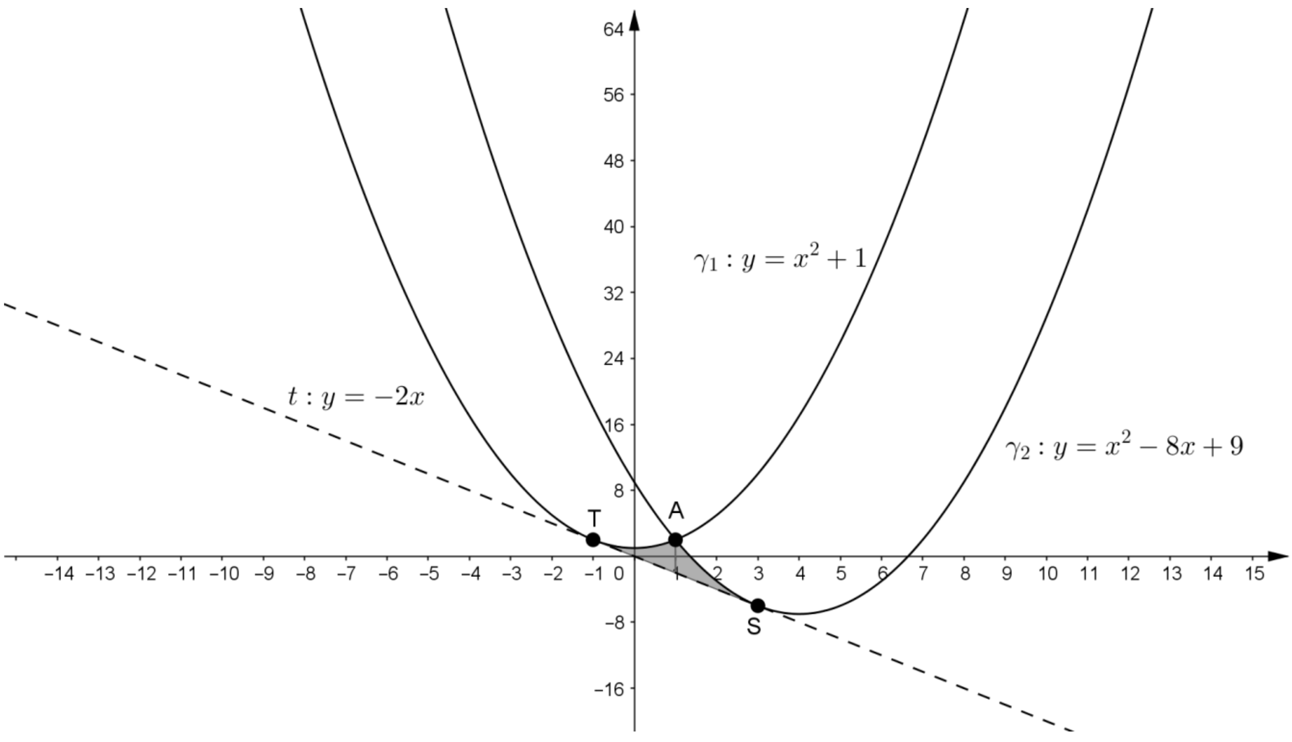
$$y = -2(x + 1) + 1 + 1 = -2x$$

ed i punti di tangenza sono rispettivamente:

$$T = (-1,2), S = (3, -6)$$

Di seguito la figura in cui viene raffigurata in grigio la regione di piano delimitata da γ_1, γ_2 e t.

.



Le due curve si intersecano nel pinto $A = (1,2)$.
L'area richiesta è pari a:

$$S=\int_{-1}^{1}(x^2+1+2x)\,dx+\int_{1}^{3}(x^2-8x+9+2x)\,dx=$$
$$=\int_{-1}^{1}(x+1)^2\,dx+\int_{1}^{3}(x-3)^2\,dx=$$
$$=\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_{1}^{3}=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

---

8. Verifichiamo innanzitutto che $f(x)$ è una densità di probabilità ovvero che

$$\int_{0}^{10}f(x)\,dx=1$$

Si ha:

$$\int_{0}^{10}f(x)\,dx=\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x^2\right)dx+\int_{1}^{10}\left(\frac{1}{12}\right)dx=\left[\frac{x}{3}-\frac{x^3}{12}\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x}{12}\right]_{1}^{10}=$$
$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{10}{12}-\frac{1}{12}\right)=\frac{3}{12}+\frac{9}{12}=1$$

Il valore medio è pari a:

$$E[X]=\int_{0}^{10}xf(x)\,dx=\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x^3\right)dx+\int_{1}^{10}\left(\frac{1}{12}x\right)dx=\left[\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{16}\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x^2}{24}\right]_{1}^{10}=$$
$$=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{25}{6}-\frac{1}{24}\right)=\frac{5}{48}+\frac{33}{8}=\frac{203}{48}$$

Poichè

$$p(0\le X\le 1)=\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x^2\right)dx=\left[\frac{x}{3}-\frac{x^3}{12}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{4}$$
$$p(1\le X\le 10)=\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{12}\right)dx=\left[\frac{x}{12}\right]_{1}^{10}=\frac{3}{4}$$

deduciamo che il valore mediano appartiene all'intervallo [1,10].

Indichiamo con *y* il valore mediano, per definizione di valore mediano si ha:

$$\int_{-\infty}^{y}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\text{ e }\int_{y}^{+\infty}f(x)\,dx=\frac{1}{2}$$

Nel caso in esame, ricordando che il valore mediano appartiane all'intervallo [1,10], *y* è valore mediano se:

$$\int_y^{10} \frac{1}{12}dx = \frac{1}{2} \to \frac{10-y}{12} = \frac{1}{2} \to \frac{y}{12} = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} \to \frac{y}{12} = \frac{1}{3} \to y = 4$$

---

9. Imponendo $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ si ha:

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2 \to$$
$$\to x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + z^2 \to$$
$$\to 6x - 2y + 4z + 8 = 0 \to 3x - y + 2z + 4 = 0$$

Quindi il luogo dei punti equidistanti è il piano di equazione $3x - y + 2z + 4 = 0$.

Alternativamente il luogo geometrico dei punti equidistanti è il piano perpendicolare ad AB passante per il punto medio di AB.
Il punto medio di AB è $M = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$ ed il piano ha parametri direttori $a = -3 - 0 = -3, b = 2 - 1 = 1, c = 0 - 2 = -2$, di conseguenza il piano perpendicolare ad AB e passante per M ha equazione:

$$-3\left(x + \frac{3}{2}\right) + \left(y - \frac{3}{2}\right) - 2(z-1) = 0 \to 3x - y + 2z + 4 = 0$$

---

10. Le derivate prima e seconda della funzione soluzione sono:

$$y'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$$

$$y''(x) = e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x = -2e^{-x}\cos x$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ricava:

$$-2e^{-x}\cos x + 2(-e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x) + 2e^{-x}\sin x =$$

$$= -2e^{-x}\cos x - 2e^{-x}\sin x + 2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}\sin x = 0$$

Avendo dimostrato l'identità deduciamo che $y(x) = e^{-x}\sin x$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + 2y = 0$.