

Esame di stato di istruzione secondaria superiore
Indirizzi: Scientifico, Scientifico opzione scienze applicate e Scientifico ad
indirizzo sportivo
Tema di matematica

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 quesiti del questionario

PROBLEMA 1

Un artigiano deve realizzare una cornice in cui inscrivere uno specchio di forma circolare. A partire da una tavola quadrata di lato 3π decimetri (approssimato alla seconda cifra decimale), adoperando una macchina a controllo numerico (CNC), incide su ciascun lato una decorazione che rappresenta una porzione di curva goniometrica come si vede in figura 1.

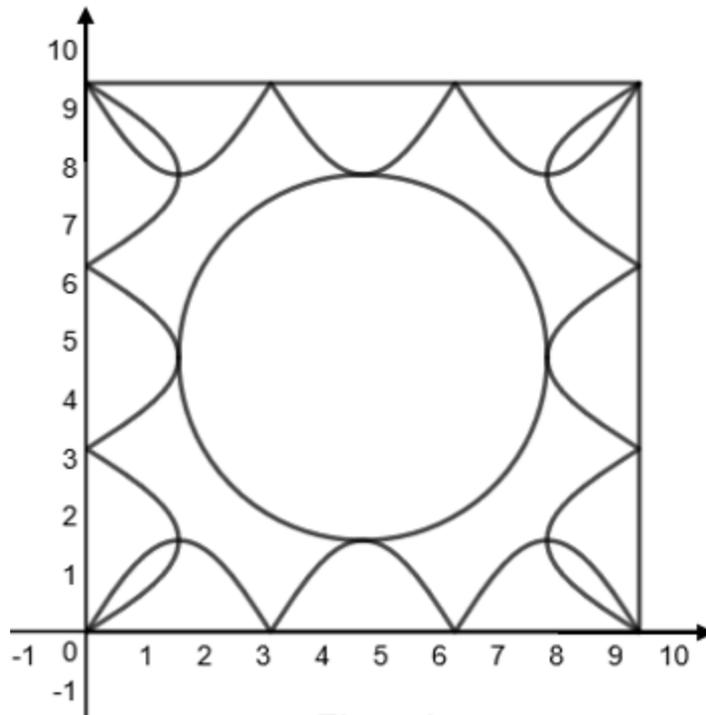


Figura 1

La macchina traccia sul lato giacente sull'asse delle ascisse la curva descritta dalla funzione $y = k|\sin(x)|$ con $x \in [0, 3\pi]$ e k parametro reale positivo. La cornice viene ruotata per realizzare la decorazione su ciascun lato. (La precisione della macchina è di $10^{-4}m$, quindi al di sopra della precisione richiesta dalle misure della cornice)

1. Per ottenere la decorazione, occorre che le curve su due lati consecutivi si intersechino nel loro punto di massimo più vicino al vertice della cornice. Verifica che tale richiesta è soddisfatta per $k = \frac{\pi}{2}$. La decorazione presenta delle "foglie" (colorate in grigio in figura 2) in corrispondenza dei quattro vertici. L'artigiano vuole rivestire queste quattro regioni con una polvere ceramica. Determina l'area, espressa in dm^2 , della superficie da ricoprire.

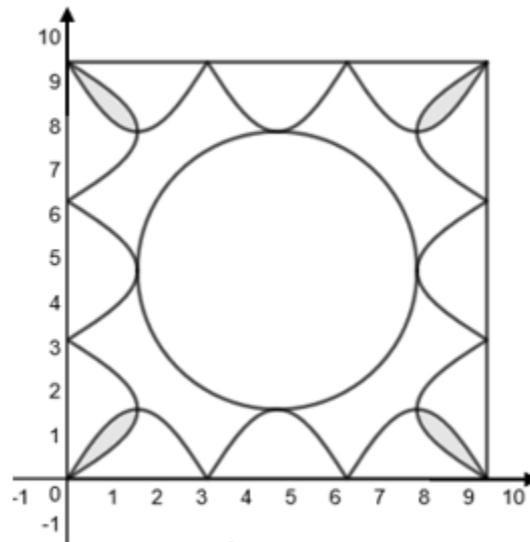


Figura 2

Volendo offrire ai clienti la possibilità di inserire nella cornice uno specchio di dimensioni maggiori, l'artigiano ne realizza un'altra con il lato delle stesse misure della precedente, ma con le quattro curve goniometriche che hanno in comune solo i vertici della cornice, così come in figura 3.

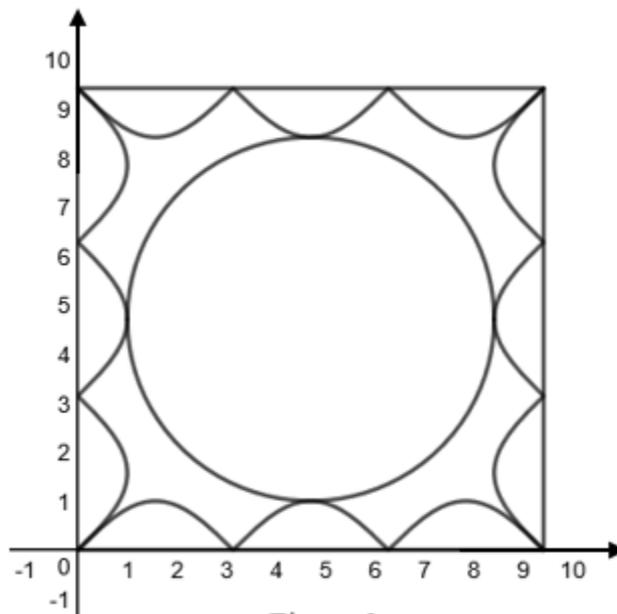


Figura 3

2. Verifica che per ottenere una decorazione di questo tipo occorre impostare nella macchina CNC un valore di k compreso tra 0 e 1 e che per $k = 1$ due decorazioni consecutive sono tangenti nel vertice della cornice. Determina inoltre, in funzione di $k \in [0,1]$, l'area della parte di cornice compresa tra i lati e le quattro curve goniometriche, esprimendola in dm^2 .
3. L'artigiano ha ovviamente l'esigenza di offrire la cornice a clienti che hanno specchi circolari di dimensioni diverse. Determina in funzione del parametro k l'area dello specchio tangente alle quattro curve goniometriche e stabilisci quindi l'area minima e massima possibile dello specchio.

Un cliente, per cui è stata realizzata una cornice con $k = 1$, chiede che la regione compresa tra lo specchio e le quattro curve venga dipinta con una vernice di cui l'artigiano possiede un flacone da 125 ml .

4. Dal momento che con 1 litro di vernice è possibile coprire 6 m^2 di superficie, la quantità a disposizione è sufficiente per passare due mani di vernice? Per quale valore di k la quantità di vernice richiesta è massima?

SVOLGIMENTO

Punto 1

Consideriamo l'intervallo $[0, \pi]$.

In tale intervallo si ha $y = k|\sin(x)| = k \sin(x)$.

La rotazione della funzione $y = k \sin(x)$ nell'intervallo $[0, \pi]$ che dà origine alla decorazione lungo l'asse delle ordinate può essere rappresentata dalla funzione seguente:

$$\begin{cases} \sin^{-1}\left(\frac{x}{k}\right) & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - \sin^{-1}\left(\frac{x}{k}\right) & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

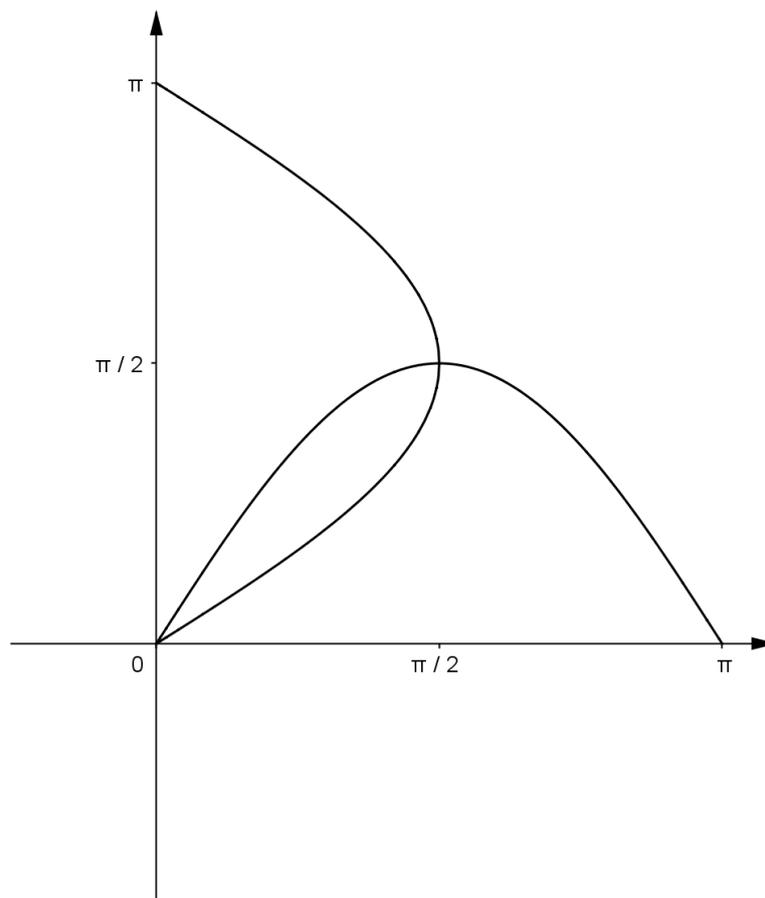
La funzione $y = k \sin(x)$ assume il suo massimo quando $\sin(x) = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$.

Le due decorazioni si intersecano nel punto di massimo ad ascissa $x = \frac{\pi}{2}$ se:

$$\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2k}\right) = k$$

e tale equazione è soddisfatta se e solo se $k = \frac{\pi}{2}$.

Di seguito l'intersezione delle due decorazioni con $x \in [0, \pi]$ e $k = \frac{\pi}{2}$.



Alternativamente, sapendo che la funzione seno e la sua inversa sono simmetriche rispetto alla retta $y = x$, le intersezioni tra le due decorazioni coincidono con le intersezioni di una di esse con la retta $y = x$, di conseguenza le intersezioni si ricavano risolvendo l'equazione:

$$k \sin x = x$$

Le due decorazioni si intersecano nel punto di massimo ad ascissa $x = \frac{\pi}{2}$ se

$$k \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \rightarrow k = \frac{\pi}{2}$$

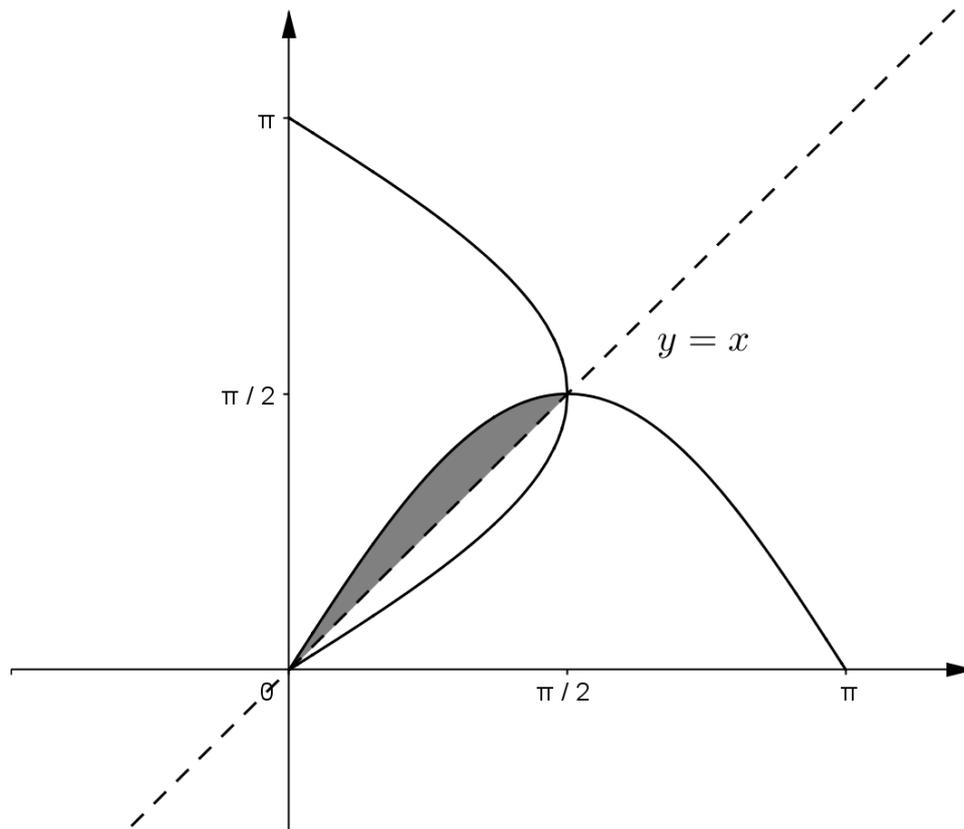
L'area della superficie da ricoprire con polvere ceramica è pari a:

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \sin(x) dx - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-1}\left(\frac{2x}{\pi}\right) dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx - 2\pi \int_0^1 \sin^{-1}(t) dt = \\ &= [-2\pi \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\pi \left[t \cdot \sin^{-1}(t) + \sqrt{1-t^2} \right]_0^1 = \\ &= (0 + 2\pi) - 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 4\pi - \pi^2 \cong 0.67 dm^2 \end{aligned}$$

dove si è sfruttato:

- l'integrale per sostituzione che, con la sostituzione $t = \frac{2x}{\pi}$, ha consentito di scrivere $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-1}\left(\frac{2x}{\pi}\right) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sin^{-1}(t) dt$;
- l'integrale per parti per cui $\int \sin^{-1}(t) dt = t \cdot \sin^{-1}(t) - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = t \cdot \sin^{-1}(t) + \sqrt{1-t^2} + C, C \in R$

Alternativamente, sapendo che la funzione seno e la sua inversa sono simmetriche rispetto alla retta $y = x$, l'area della singola foglia è il doppio dell'area della regione rappresentata in grigio nella figura sottostante.



Di conseguenza l'area delle 4 foglie è pari a:

$$S = 4 \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\pi}{2} \sin(x) - x \right] dx = 8 \left[-\frac{\pi}{2} \cos(x) - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi - \pi^2$$

Punto 2

Consideriamo l'intervallo $[0, \pi]$ e la funzione

$$h(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x}{k}\right) - k \sin(x)$$

Tale funzione si annulla per $x = 0$ come da ispezione diretta.

La derivata di tale funzione è:

$$h'(x) = \frac{\left(\frac{1}{k}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{k}\right)^2}} - k \cos(x)$$

Notiamo subito che se $k \in (0,1)$, all'interno del dominio $x \in (-k, k)$ il termine $\frac{\left(\frac{1}{k}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{k}\right)^2}}$ è maggiore

di 1 in quanto il numeratore è maggiore di 1 ed il denominatore è minore di 1, mentre il termine $k \cos(x)$ assume valore massimo k minore di 1; di conseguenza deduciamo che la funzione $h(x)$ è strettamente crescente nel dominio $x \in (-k, k)$ per $k \in (0,1)$ e che l'unica radice dell'equazione $h(x) = 0$ è $x = 0$.

Per $k = 1$ le due decorazioni sono anche tangenti nel vertice della cornice in quanto il valore della derivata prima per $x = 0$ coincide, infatti:

$$\left[\frac{d}{dx} \sin(x) \right]_{x=0} = [\cos(x)]_{x=0} = 1$$

$$\left[\frac{d}{dx} \sin^{-1}(x) \right]_{x=0} = \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right]_{x=0} = 1$$

L'area della parte di cornice compresa tra i lati e le quattro curve goniometriche per $k \in [0,1]$ è pari a:

$$S = 12 \int_0^\pi k \sin(x) dx = [-12k \cos(x)]_0^\pi = 24k \text{ dm}^2$$

Punto 3

Lo specchio circolare ha un raggio pari a

$$r = \frac{3\pi}{2} - k$$

pertanto la sua area è pari a

$$S_C(k) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{3\pi}{2} - k \right)^2$$

Tale area nell'intervallo $k \in [0,1]$:

- è massima se $k = 0$ in quanto in questo caso la lunghezza del diametro dello specchio coincide con la lunghezza del lato della cornice; di conseguenza l'area massima è $S_C(k = 0) = \frac{9\pi^3}{4} \cong 69.76 \text{ dm}^2$;
- è minima se $k = 1$ di conseguenza l'area minima è $S_C(k = 1) = \pi \left(\frac{3\pi}{2} - 1 \right)^2 \cong 43.3 \text{ dm}^2$.

Punto 4

Per $k = 1$ la superficie da verniciare è pari all'area del quadrato cui vanno sottratte l'area dello specchio e l'area della regione compresa tra le 4 curve ed i lati del quadrato, ovvero:

$$S_{\text{Verniciare}}(k = 1) = (3\pi)^2 - \pi \left(\frac{3\pi}{2} - 1 \right)^2 - 24 \cong 21.53 \text{ dm}^2$$

pertanto, volendo fare 2 passate di vernice, bisognerebbe coprire $21.53 \cdot 2 = 43.06 \text{ dm}^2$ di superficie.

Con un flacone da 125 ml si riesce a verniciare $\frac{3}{4} \text{ m}^2 = 75 \text{ dm}^2$ di superficie di conseguenza un flacone da 125 ml di vernice risulterebbe sufficiente per fare una doppia passata di vernice.

L'area da verniciare in funzione di k è:

$$S_{\text{verniciare}}(k) = (3\pi)^2 - \pi \left(\frac{3\pi}{2} - k \right)^2 - 24k = -\pi k^2 + (3\pi^2 - 24)k + \left(9\pi^2 - \frac{9\pi^3}{4} \right)$$

Tale area è una funzione parabolica il cui massimo viene raggiunto all'ascissa del vertice ovvero quando

$$k = \frac{(3\pi^2 - 24)}{2\pi} \cong 0.89$$

accettabile perchè appartenente all'intervallo $[0,1]$.

PROBLEMA 2

Fissato un numero reale $k > 0$, si definiscono le funzioni:

$$f_k(x) = k \cdot \ln(x) \text{ e } g_k(x) = e^{\frac{x}{k}}$$

i cui grafici sono indicati, rispettivamente, con F_k e G_k .

1. Verifica che, qualunque sia $k > 0$, le due funzioni f_k e g_k sono tra loro inverse; definite inoltre le funzioni:

$$a(x) = f_k(g_k(x)) \text{ e } b(x) = g_k(f_k(x))$$

stabilisci se si verifica $a(x) = b(x), \forall x \in \mathfrak{R}$.

2. Indicata con r la retta di equazione $y = x$, determina l'equazione della retta s_2 , parallela a r e tangente al grafico F_2 della funzione $f_2(x) = 2 \cdot \ln(x)$. Determina inoltre l'equazione della retta t_2 , parallela a r e tangente al grafico G_2 della funzione $g_2(x) = e^{\frac{x}{2}}$. Rappresenta i grafici F_2 e G_2 insieme alle rette s_2 e t_2 e stabilisci qual è la distanza minima tra un punto di F_2 e un punto di G_2 .
3. Verifica che l'equazione $f_3(x) = g_3(x)$ possiede due soluzioni sapendo che, qualunque sia $k > 0$, gli eventuali punti d'intersezione tra il grafico F_k e il grafico G_k coincidono con i punti di intersezione tra uno qualsiasi di tali grafici e la retta di equazione $y = x$. Stabilisci inoltre per quali valori $k > 0$ i grafici F_k e G_k sono secanti, per quali valori sono disgiunti e per quale valore essi sono tangenti.
4. Sia A la regione limitata compresa tra i grafici F_e e G_e e gli assi cartesiani. Determina l'area di A ed il volume del solido generato ruotando A attorno a uno degli assi cartesiani.

SVOLGIMENTO

Punto 1

La funzione $f_k(x) = k \cdot \ln(x)$ ha come dominio $x > 0$ e la derivata prima $f'_k(x) = \frac{k}{x}$ è sempre positiva nel dominio, di conseguenza la funzione è strettamente crescente ed è quindi invertibile.

La sua inversa è:

$$y = k \cdot \ln(x) \rightarrow \ln(x) = \frac{y}{k} \rightarrow x = e^{\frac{y}{k}}$$

Invertendo le variabili x ed y otteniamo che la funzione inversa di $f_k(x) = k \cdot \ln(x)$ è $g_k(x) = e^{\frac{x}{k}}$.

La funzione $g_k(x) = e^{\frac{x}{k}}$ ha come dominio \mathbb{R} e la derivata prima $g'_k(x) = \frac{1}{k} e^{\frac{x}{k}}$ è sempre positiva nel dominio, di conseguenza la funzione è strettamente crescente ed è quindi invertibile.

La sua inversa è:

$$y = e^{\frac{x}{k}} \rightarrow \frac{x}{k} = \ln(y) \rightarrow x = k \cdot \ln(y)$$

Invertendo le variabili x ed y otteniamo che la funzione inversa di $g_k(x) = e^{\frac{x}{k}}$ è $f_k(x) = k \cdot \ln(x)$.

Calcoliamo ora $a(x) = f_k(g_k(x))$ e $b(x) = g_k(f_k(x))$, si ha:

$$\begin{aligned} a(x) &= k \cdot \ln\left(e^{\frac{x}{k}}\right) = k \cdot \frac{x}{k} = x, \forall x \in \mathfrak{R} \\ b(x) &= e^{\frac{k \cdot \ln(x)}{k}} = e^{\ln(x)} = x, x > 0 \end{aligned}$$

Di conseguenza $a(x) = b(x)$ solo per $x > 0$ e non per $\forall x \in \mathfrak{R}$.

Punto 2

L'equazione della retta s_2 , parallela a r e tangente al grafico F_2 è:

$$y = x + q$$

Detto $S = (a, a + q)$ il punto di tangenza, la condizione di tangenza a $f_2(x) = 2 \cdot \ln(x)$ è soddisfatta se

$$f'_2(a) = \frac{2}{a} = 1 \rightarrow a = 2$$

Imponendo l'uguaglianza tra $f_2(x)$ e s_2 nel passaggio per il punto di tangenza $S = (2, 2 + q)$ si ha:

$$2 \cdot \ln(2) = 2 + q \rightarrow q = 2 \cdot \ln(2) - 2$$

Quindi il punto di tangenza è $S = (2, 2 + 2 \cdot \ln(2))$ e la retta tangente è:

$$s_2: y = x + 2 \cdot \ln(2) - 2$$

L'equazione della retta t_2 , parallela a r e tangente al grafico G_2 è:

$$y = x + q$$

Detto $T = (a, a + q)$ il punto di tangenza, la condizione di tangenza a $g_2(x) = e^{\frac{x}{2}}$ è soddisfatta se

$$g_2'(a) = \frac{1}{2} e^{\frac{a}{2}} = 1 \rightarrow e^{\frac{a}{2}} = 2 \rightarrow a = 2 \cdot \ln(2)$$

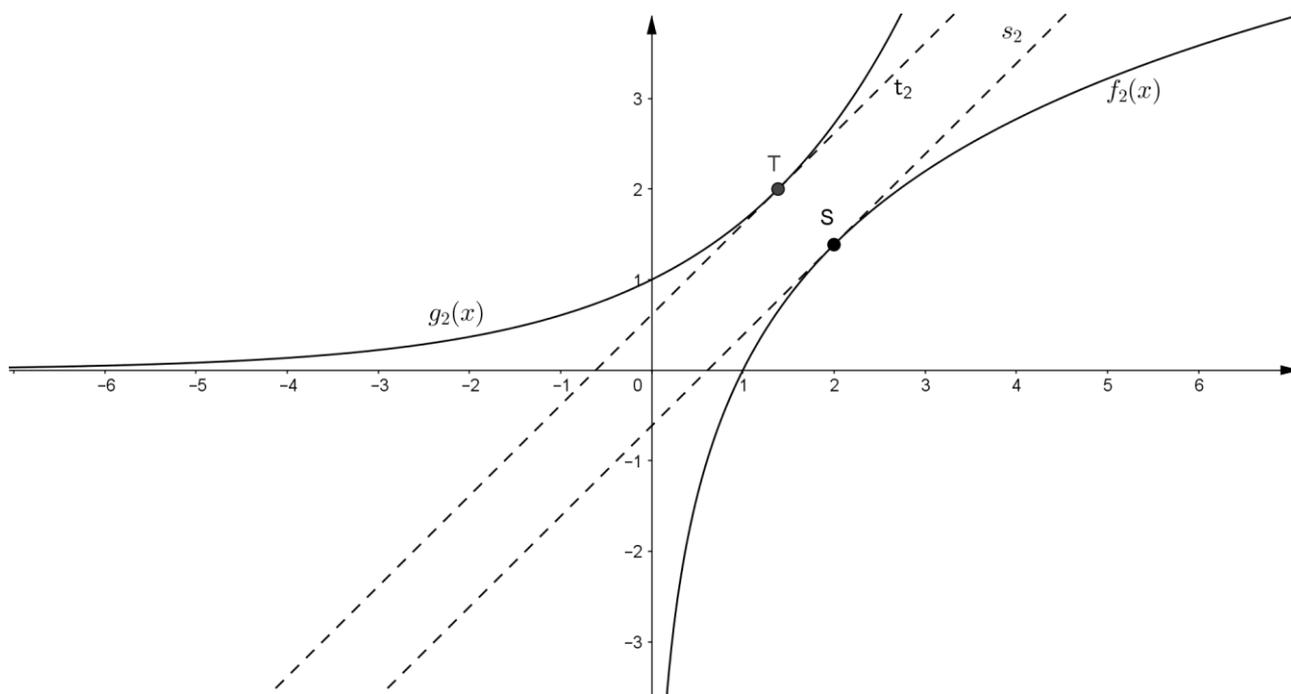
Imponendo l'uguaglianza tra $g_2(x)$ e t_2 nel passaggio per il punto di tangenza $T = (2 \cdot \ln(2), 2 \cdot \ln(2) + q)$ si ha:

$$2 = 2 \cdot \ln(2) + q \rightarrow q = 2 - 2 \cdot \ln(2)$$

Quindi il punto di tangenza è $T = (2 \cdot \ln(2), 2)$ e la retta tangente è:

$$t_2: y = x + 2 - 2 \cdot \ln(2)$$

Di seguito il grafico.



La distanza minima tra un punto di F_2 e un punto di G_2 è la distanza tra i punti di tangenza T ed S:

$$d = \sqrt{(2 - 2 \ln 2)^2 + (2 - 2 \ln 2)^2} = \sqrt{2}(2 - 2 \ln 2) \cong 0.87$$

Punto 3

Consideriamo la funzione

$$h(x) = f_3(x) - g_3(x) = 3 \cdot \ln(x) - e^{\frac{x}{3}}, x > 0$$

Si ha:

$$h(1) = 3 \cdot \ln(1) - e^{\frac{1}{3}} = -e^{\frac{1}{3}} < 0$$

$$h(2) = 3 \cdot \ln(2) - e^{\frac{2}{3}} > 0$$

$$h(4) = 3 \cdot \ln(4) - e^{\frac{4}{3}} > 0$$

$$h(5) = 3 \cdot \ln(5) - e^{\frac{5}{3}} < 0$$

di conseguenza le funzioni $f_3(x)$ e $g_3(x)$ si intersecano in 2 punti ad ascisse:

$$\alpha \in (1,2)$$

$$\beta \in (4,5)$$

Per verificare che le intersezioni siano solo 2, verifichiamo che le intersezioni tra $f_k(x) = k \cdot \ln(x)$ e la retta $y = x$ siano al massimo 2 al variare di k .

Consideriamo la funzione

$$h_1(x) = f_k(x) - x = k \cdot \ln(x) - x, x > 0$$

La derivata prima è

$$h_1'(x) = \frac{k}{x} - 1$$

Se $k < 0$ la funzione $h_1(x)$ è strettamente decrescente e poichè

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h_1(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} h_1(x) = -1$$

si deduce che $h_1(x)$ ha un'unica radice ed appartiene all'intervallo $(0,1)$.

Se $k > 0$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h_1(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} kx \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{k} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

Inoltre per $k > 0$ la funzione $h_1(x)$ è strettamente crescente in $(0, k)$ e strettamente decrescente in $(k, +\infty)$ pertanto $(k, k \cdot \ln k - k)$ è punto di massimo relativo; in particolare tale massimo relativo avrà ordinata positiva se

$$k \cdot \ln k - k > 0 \rightarrow \ln k > 1 \rightarrow k > e$$

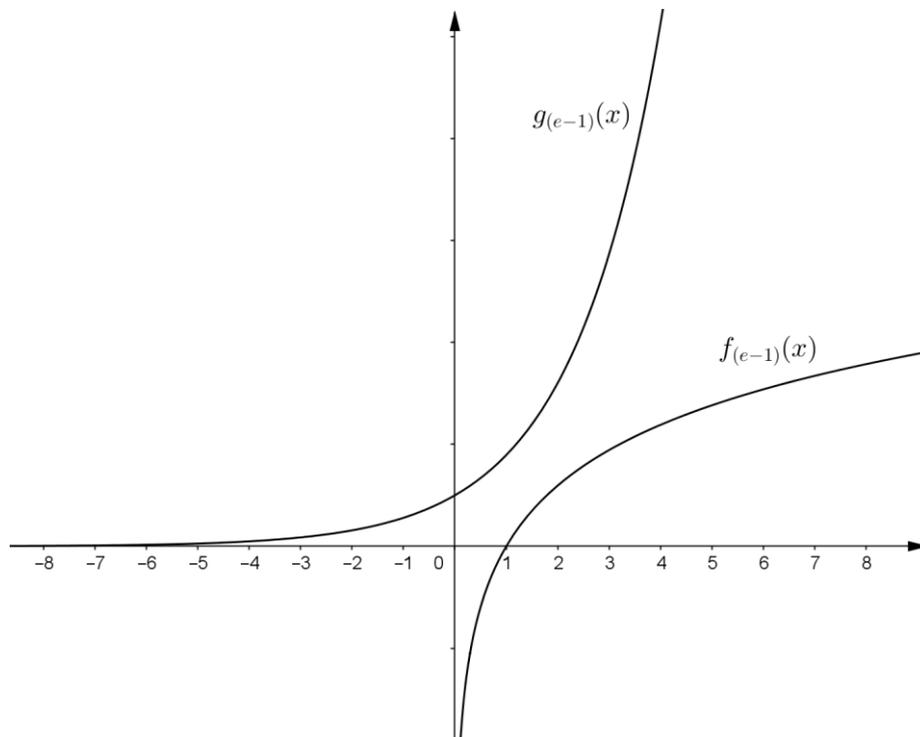
di conseguenza

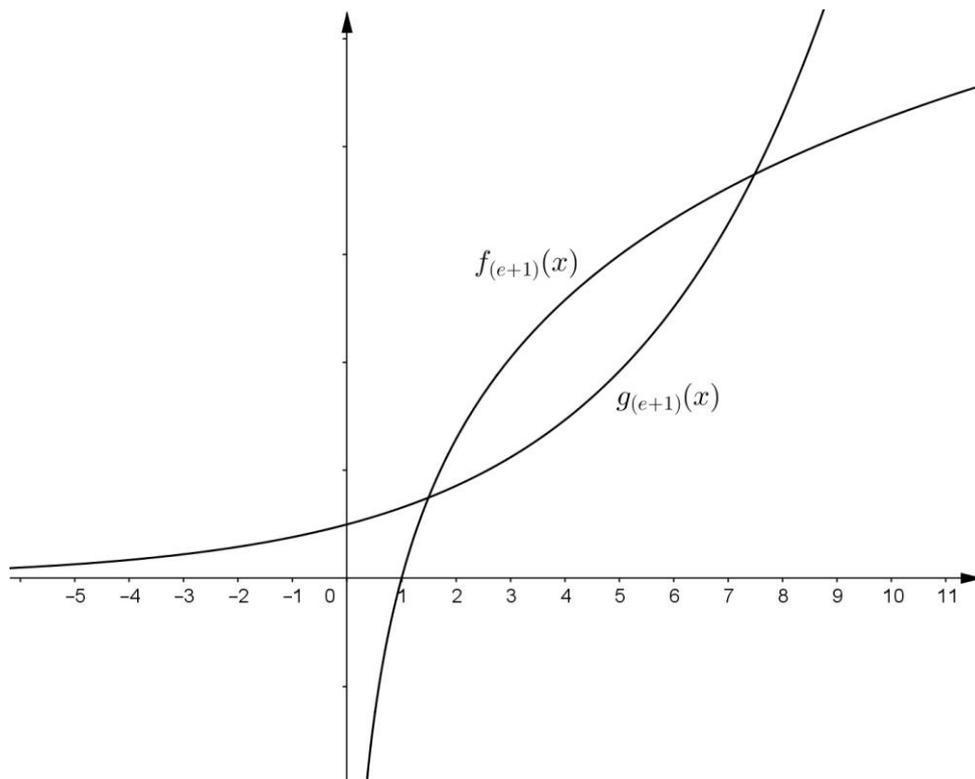
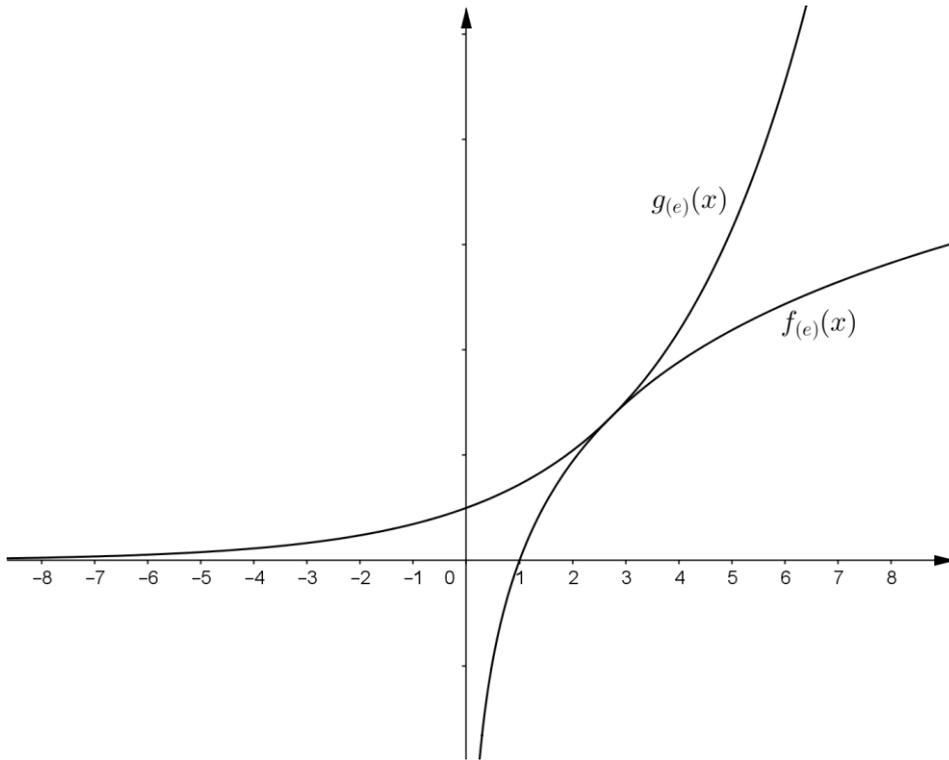
- se $k < e$, considerando il comportamento di $h_1(x)$ nell'intorno dello 0 e di $+\infty$, deduciamo che la funzione $h_1(x)$ non ha alcuna radice reale;
- se $k = e$, considerando il comportamento di $h_1(x)$ nell'intorno dello 0 e di $+\infty$, deduciamo che la funzione $h_1(x)$ ha una radice doppia $x = e$;
- se $k > e$, considerando il comportamento di $h_1(x)$ nell'intorno dello 0 e di $+\infty$, deduciamo che la funzione $h(x)$ ha 2 radici reali.

Quindi:

- se $k < e$ i grafici F_k e G_k sono disgiunti;
- se $k = e$ i grafici F_k e G_k sono tangenti;
- se $k > e$ i grafici F_k e G_k sono secanti.

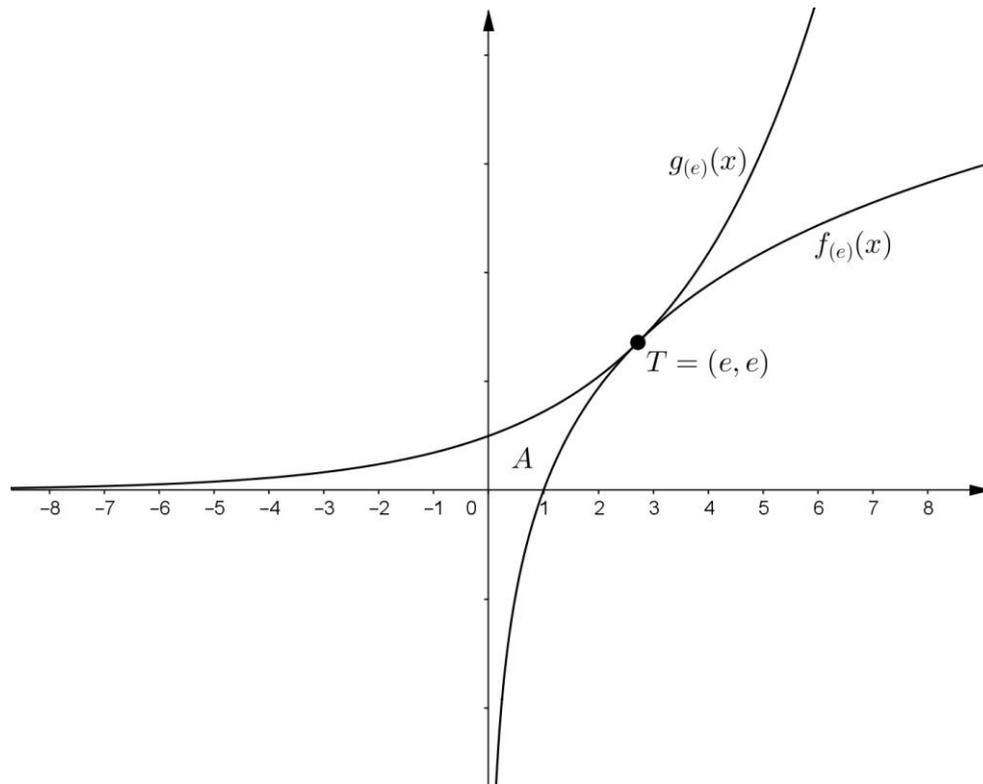
Di seguito 3 grafici relativi alle 3 differenti situazioni: $k = e - 1, k = e, k = e + 1$.





Punto 4

Consideriamo la figura seguente in cui è raffigurata la regione A:



L'area richiesta è pari a:

$$\begin{aligned} S(A) &= \int_0^e e^{\frac{x}{e}} dx - \int_1^e e \cdot \ln x dx = \left[e \cdot e^{\frac{x}{e}} \right]_0^e - e \cdot [x(\ln x - 1)]_1^e = \\ &= (e^2 - e) - e(0 + 1) = e^2 - 2e \end{aligned}$$

Il volume dato dalla rotazione di A intorno all'asse delle ascisse è:

$$\begin{aligned} V(A) &= \pi \int_0^e e^{\frac{2x}{e}} dx - \pi \int_1^e (e \cdot \ln x)^2 dx = \pi \left[\frac{e}{2} \cdot e^{\frac{2x}{e}} \right]_0^e - \pi e^2 \cdot [x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2)]_1^e = \\ &= \pi \left(\frac{e^3}{2} - \frac{e}{2} \right) - \pi e^2 (e - 2) = \pi \left(-\frac{e^3}{2} + 2e^2 - \frac{e}{2} \right) = \pi \left(\frac{-e^3 + 4e^2 - e}{2} \right) \end{aligned}$$

QUESTIONARIO

1. Considerati nel piano cartesiano i punti $A(0,0)$ e $B(\pi, 0)$, sia R la regione piana delimitata dal segmento AB e dall'arco di curva avente equazione $y = 4 \sin x$, con $0 \leq x \leq \pi$. Calcolare il massimo perimetro che può avere un rettangolo inscritto in R avente un lato contenuto nel segmento AB .
2. Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ nell'intervallo $[p, 2p]$ e, detto Γ il suo grafico, sia t la retta tangente a Γ nel suo punto di ascissa p . Determinare, al variare di p , le aree delle due parti in cui la retta t divide la regione finita di piano compresa fra Γ e l'asse delle ascisse.
3. Determinare l'equazione della superficie sferica di centro $C(1, -1, 2)$ tangente al piano di equazione $x - y - z = 10$ e le coordinate del punto di contatto tra la superficie sferica e il piano.
4. Verificare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) dx$ per $n > 1$ e usare questo risultato per calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x) dx$.
5. Si lancia n volte un dado regolare a sei facce. Qual è il più piccolo valore di n tale che la probabilità che non esca mai il numero 3 sia minore dello 0,01%?
6. Data la funzione $y = x|ax^2 + b| - 3$, determinare i valori dei coefficienti a e b per i quali il grafico della funzione è tangente nel punto di ascissa $x = 1$ alla retta di equazione $y = 7x - 9$.
7. Date le curve γ_1 e γ_2 di equazione rispettivamente $y = x^2 + 1$ e $y = x^2 - 8x + 9$, sia t la retta che è tangente a entrambe. Stabilire l'area della regione di piano di area finita che è delimitata da γ_1 , γ_2 e t .
8. Una variabile casuale, a valori nell'intervallo $[0, 10]$, è distribuita secondo la densità di probabilità data dalla funzione

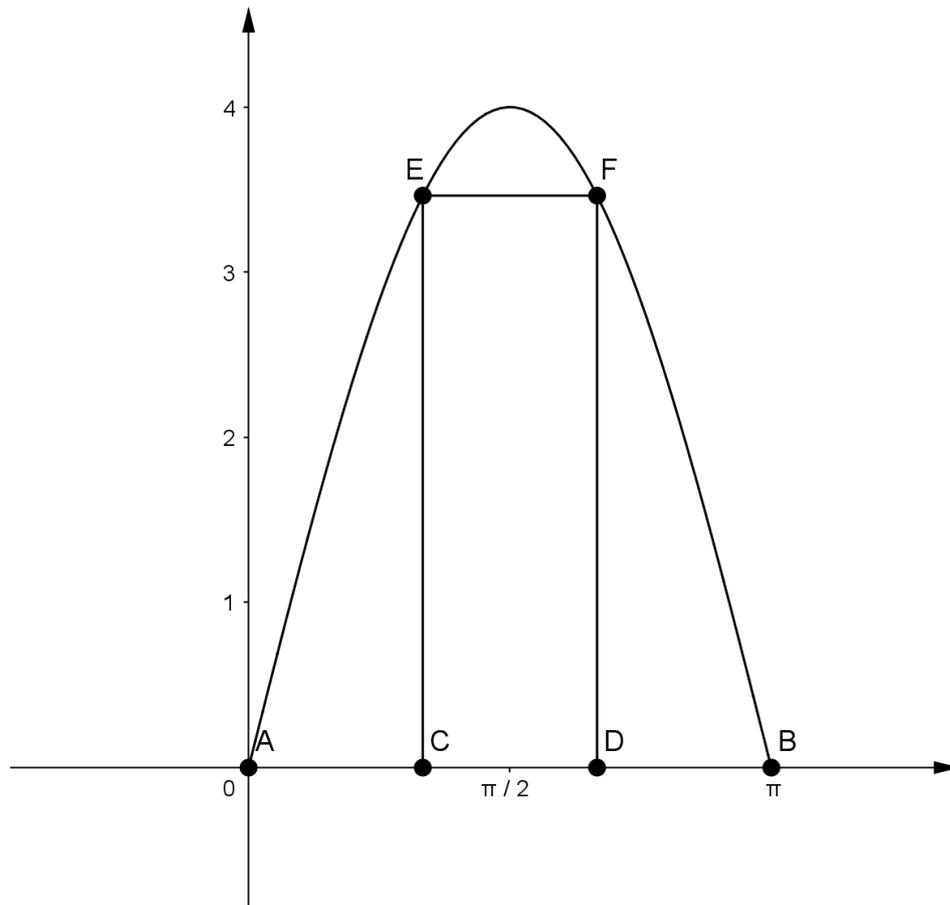
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{1}{4}x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{12}, & 1 < x \leq 10 \end{cases}$$

Stabilire il valore medio e il valore mediano di questa variabile casuale.

9. Determinare il luogo geometrico dei punti $P(x, y, z)$ equidistante dai punti $A(0, 1, 2)$ e $B(-3, 2, 0)$.
10. Verificare che la funzione $y(x) = e^{-x} \sin x$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + 2y = 0$.

SVOLGIMENTO

1. Consideriamo la figura seguente.



Il rettangolo R ha vertici:

$$C = (x, 0), D = (\pi - x, 0), E = (x, 4 \sin x), F = (\pi - x, 4 \sin x)$$

Il perimetro del rettangolo è pari a:

$$2p(x) = 2 \cdot (\pi - 2x) + 2 \cdot 4 \sin x = 2 \cdot (\pi - 2x + 4 \sin x)$$

La derivata prima della funzione perimetro è:

$$2p'(x) = 2 \cdot (-2 + 4 \cos x)$$

ed è positiva se

$$\cos x > \frac{1}{2} \rightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{3}$$

Di conseguenza la funzione perimetro è strettamente crescente per $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$ e strettamente decrescente per $\frac{\pi}{3} < x \leq \pi$ pertanto il perimetro è massimo per $x = \frac{\pi}{3}$ e misura

$$2p\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \left(\pi - \frac{2\pi}{3} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + 4\sqrt{3}$$

2. La retta t ha equazione:

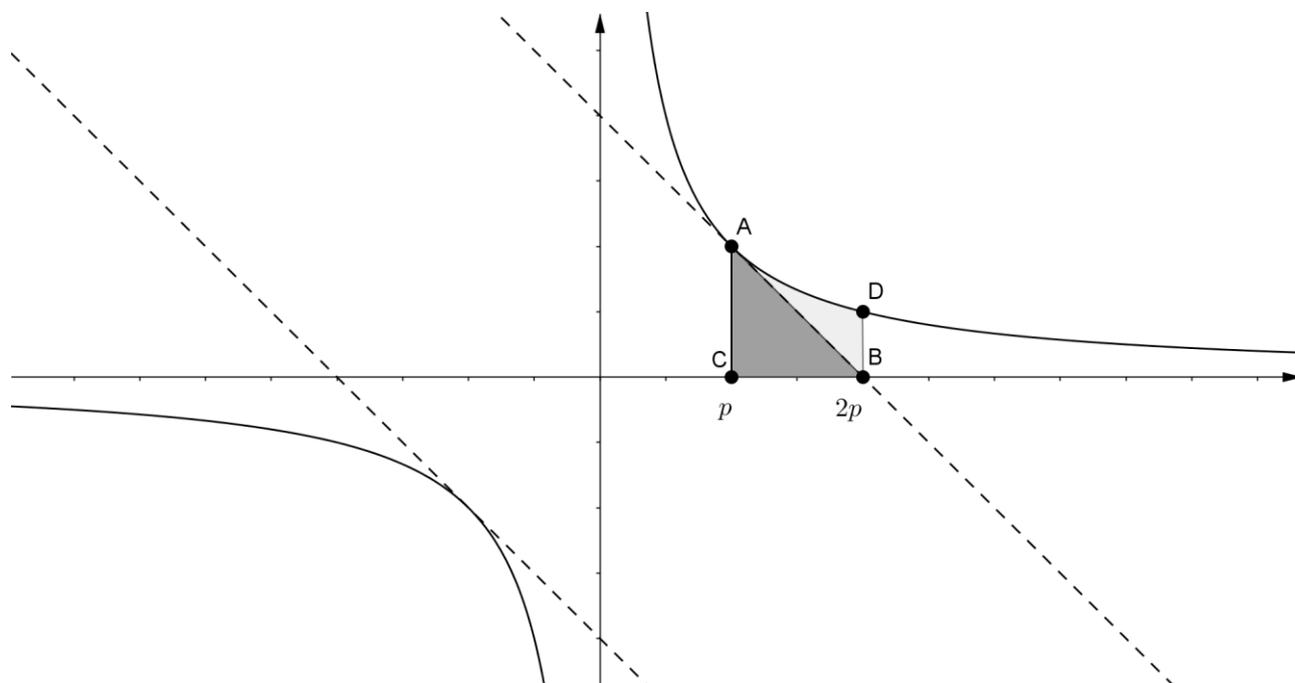
$$t: y = f'(p)(x - p) - \frac{1}{p}$$

dove $f'(p) = -\frac{1}{p^2}$ pertanto la retta diventa:

$$t: y = -\frac{1}{p^2}(x - p) - \frac{1}{p} = -\frac{x}{p^2} - \frac{2}{p}$$

La retta tangente interseca l'asse delle ascisse in $(2p, 0)$.

Consideriamo la figura seguente in cui, considerando $p > 0$, sono rappresentate le 2 regioni di piano in cui la tangente t divide la regione finita di piano compresa fra Γ e l'asse delle ascisse.



I punti A, B e C hanno coordinate $A = \left(p, \frac{1}{p}\right)$, $B = (2p, 0)$, $C = (p, 0)$.

L'area del triangolo ABC è:

$$S(ABC) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CB}}{2} = \frac{\frac{1}{p} \cdot p}{2} = \frac{1}{2}$$

L'area della regione in grigio chiaro è:

$$S(ABD) = \int_p^{2p} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} = [\ln x]_p^{2p} - \frac{1}{2} = \ln(2p) - \ln(p) - \frac{1}{2} = \ln(2) - \frac{1}{2}$$

Quindi al variare di p le aree in cui la tangente t divide la regione finita di piano compresa fra Γ e l'asse delle ascisse misurano rispettivamente $\frac{1}{2}$ e $\ln(2) - \frac{1}{2}$.

-
3. La retta perpendicolare al piano di equazione $x - y + z - 10 = 0$ e passante per il centro $C(1, -1, 2)$ ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Sostituendo tale equazione parametrica nell'equazione del piano, troviamo il punto di intersezione tra la retta ed il piano:

$$x - y + z - 10 = 0 \rightarrow 1 + t + 1 + t + 2 + t - 10 = 0 \rightarrow 3t = 6 \rightarrow t = 2$$

pertanto il punto di intersezione è $P(3, -3, 4)$.

Il raggio della superficie sferica è:

$$\overline{RC} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (-3 + 1)^2 + (4 - 2)^2} = 2\sqrt{3}$$

Quindi l'equazione della sfera è:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 12$$

4. Si ha:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \cos^{n-1}(x) dx$$

ed applicando l'integrazione per parti si ricava:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \cos^{n-1}(x) dx \\
&= \underbrace{[\sin(x) \cdot \cos^{n-1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cdot \cos^{n-2}(x) dx = \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cdot \cos^{n-2}(x) dx = \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \cos^2(x)] \cdot \cos^{n-2}(x) dx = \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx \rightarrow \\
&\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) dx \rightarrow \\
&\rightarrow n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) dx \rightarrow \\
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx = \frac{(n-1)}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) dx
\end{aligned}$$

Applicando il risultato a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x) dx$ si ricava:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x) dx = \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{3\pi}{16}$$

5. La probabilità che, lanciando una volta un dado regolare a 6 facce, non esca 3 è pari a $p = \frac{5}{6}$.

Lanciando n volte il dado, la probabilità che non esca mai 3 è $p^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Imponendo che tale probabilità sia minore di 0,0001 si ha:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,0001 \rightarrow \ln\left[\left(\frac{5}{6}\right)^n\right] < \ln(10^{-4}) \rightarrow n \ln\left(\frac{5}{6}\right) < -4 \ln 10 \rightarrow n > -\frac{4 \ln 10}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \cong 50.5$$

Quindi con $n = 51$ si ottiene una probabilità inferiore a 0,01%.

6. Il valore assoluto nella funzione $y = x|ax^2 + b| - 3$ ha senso solo se i coefficienti a e b sono di segno discorde. Assumiamo quindi che a e b siano di segno discorde.

E' possibile scrivere la funzione $y = x|ax^2 + b| - 3$ nel seguente modo:

$$y = \begin{cases} ax^3 + bx - 3 & \text{se } x \leq -\sqrt{-\frac{b}{a}}, x \geq \sqrt{-\frac{b}{a}} \\ -ax^3 - bx - 3 & \text{se } -\sqrt{-\frac{b}{a}} < x < \sqrt{-\frac{b}{a}} \end{cases}$$

La derivata prima della funzione è:

$$y' = \begin{cases} 3ax^2 + b & \text{se } x \leq -\sqrt{-\frac{b}{a}}, x \geq \sqrt{-\frac{b}{a}} \\ -3ax^2 - b & \text{se } -\sqrt{-\frac{b}{a}} < x < \sqrt{-\frac{b}{a}} \end{cases}$$

Il passaggio per il punto $(1, -2)$ implica che:

$$|a + b| - 3 = -2 \rightarrow |a + b| = 1$$

Il grafico di y è tangente alla retta $y = 7x - 9$ nel punto $(1, -2)$ se

$$y'(1) = 7$$

ovvero se

$$3a + b = 7 \text{ se } 1 \geq \sqrt{-\frac{b}{a}} \leftrightarrow a + b \geq 0$$

oppure

$$3a + b = -7 \text{ se } 1 < \sqrt{-\frac{b}{a}} \leftrightarrow a + b < 0$$

Consideriamo ora $a + b \geq 0 \rightarrow a \geq -b$.

I coefficienti a e b deve soddisfare il seguente sistema:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + b = 7 \end{cases}$$

la cui soluzione è:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$$

ed è accettabile in quanto soddisfa la condizione $a + b \geq 0$.

In questo caso l'equazione della funzione è

$$y = x|3x^2 - 2| - 3 = x(3x^2 - 2) - 3 = 3x^3 - 2x - 3$$

Consideriamo ora $a + b < 0 \rightarrow a < -b$.

I coefficienti a e b devono soddisfare i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = -7 \end{cases}$$

la cui soluzione è:

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

ed è accettabile $a + b < 0$ e corrisponde alla precedente con il segno invertito.

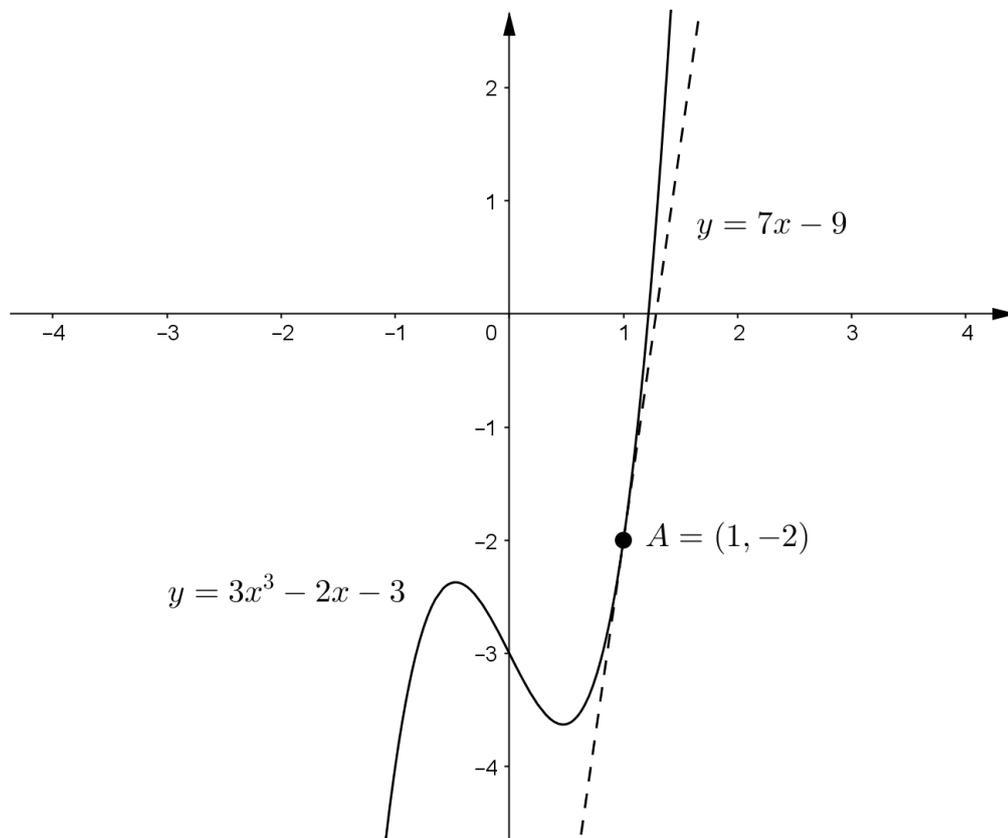
In questo caso l'equazione della funzione è

$$y = x|-3x^2 + 2| - 3 = x(3x^2 - 2) - 3 = 3x^3 - 2x - 3$$

Quindi i coefficienti a e b sono

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

e la funzione richiesta in ambo i casi è $y = 3x^3 - 2x - 3$.



7. Sia $T = (a, b)$ il punto di tangenza di t con γ_1 e $S = (c, d)$ il punto di tangenza di t con γ_2 .
Il coefficiente angolare della tangente a γ_1 è:

$$m = f'(a) = 2a$$

mentre il coefficiente angolare della tangente a γ_2 è:

$$m = f'(c) = 2c - 8$$

Imponendo l'uguaglianza si ricava:

$$2a = 2c - 8 \rightarrow c = a + 4$$

La retta tangente a γ_1 ha equazione:

$$y = 2a(x - a) + a^2 + 1$$

La retta tangente a γ_2 ha equazione:

$$y = 2a(x - a - 4) + (a + 4)^2 - 8(a + 4) + 9$$

Imponendone l'uguaglianza si ricava:

$$\begin{aligned} 2a(x - a) + a^2 + 1 &= 2a(x - a - 4) + (a + 4)^2 - 8(a + 4) + 9 \rightarrow \\ \rightarrow 2ax - a^2 + 1 &= 2ax - 2a^2 - 8a + a^2 + 8a + 16 - 8a - 32 + 9 \rightarrow \\ \rightarrow -a^2 + 1 &= -a^2 - 8a - 7 \rightarrow 8a = -8 \rightarrow a = -1 \end{aligned}$$

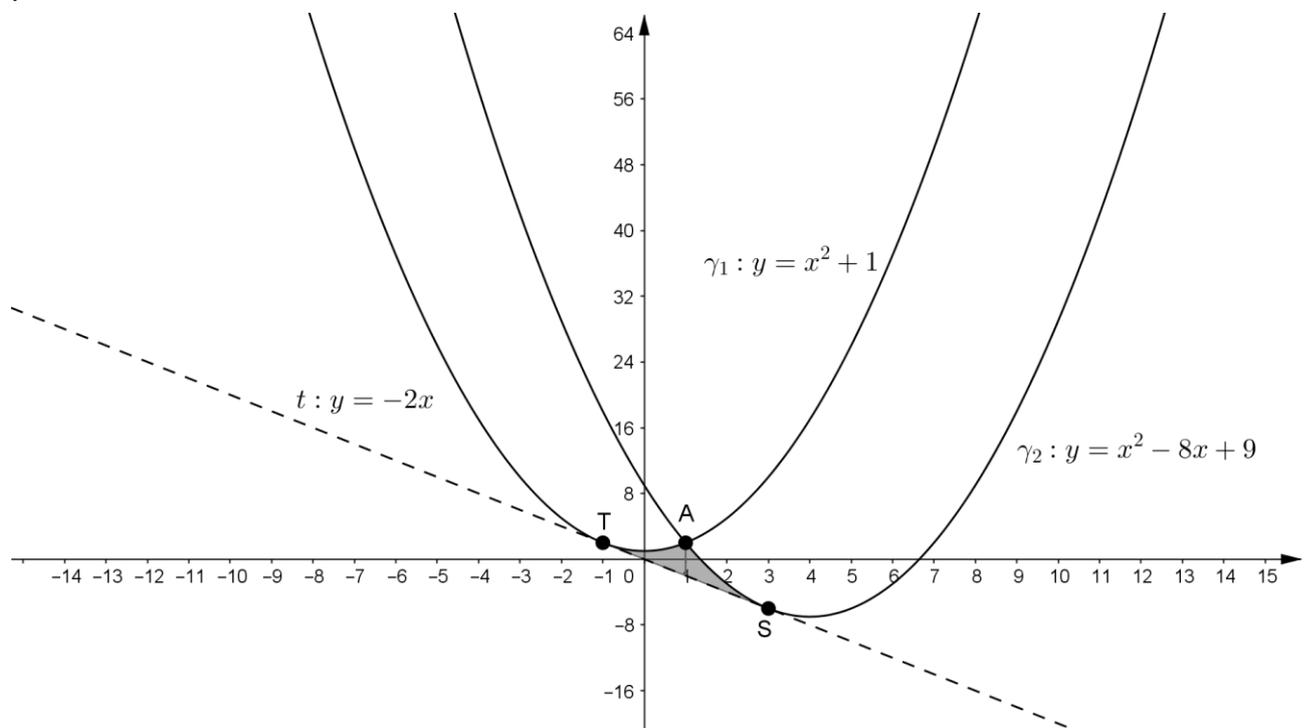
L'equazione della tangente è quindi:

$$y = -2(x + 1) + 1 + 1 = -2x$$

ed i punti di tangenza sono rispettivamente:

$$T = (-1, 2), S = (3, -6)$$

Di seguito la figura in cui viene raffigurata in grigio la regione di piano delimitata da γ_1 , γ_2 e t .



Le due curve si intersecano nel punto $A = (1, 2)$.

L'area richiesta è pari a:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^1 (x^2 + 1 + 2x) dx + \int_1^3 (x^2 - 8x + 9 + 2x) dx = \\
 &= \int_{-1}^1 (x+1)^2 dx + \int_1^3 (x-3)^2 dx = \\
 &= \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_{-1}^1 + \left[\frac{(x-3)^3}{3} \right]_1^3 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

8. Verifichiamo innanzitutto che $f(x)$ è una densità di probabilità ovvero che

$$\int_0^{10} f(x) dx = 1$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{10} f(x) dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x^2 \right) dx + \int_1^{10} \left(\frac{1}{12} \right) dx = \left[\frac{x}{3} - \frac{x^3}{12} \right]_0^1 + \left[\frac{x}{12} \right]_1^{10} = \\
 &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) + \left(\frac{10}{12} - \frac{1}{12} \right) = \frac{3}{12} + \frac{9}{12} = 1
 \end{aligned}$$

Il valore medio è pari a:

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \int_0^{10} xf(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^3 \right) dx + \int_1^{10} \left(\frac{1}{12}x \right) dx = \left[\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{16} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{24} \right]_1^{10} = \\
 &= \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{16} \right) + \left(\frac{25}{6} - \frac{1}{24} \right) = \frac{5}{48} + \frac{33}{8} = \frac{203}{48}
 \end{aligned}$$

Poichè

$$\begin{aligned}
 p(0 \leq X \leq 1) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x^2 \right) dx = \left[\frac{x}{3} - \frac{x^3}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{4} \\
 p(1 \leq X \leq 10) &= \int_1^{10} \left(\frac{1}{12} \right) dx = \left[\frac{x}{12} \right]_1^{10} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

deduciamo che il valore mediano appartiene all'intervallo $[1,10]$.

Indichiamo con y il valore mediano, per definizione di valore mediano si ha:

$$\int_{-\infty}^y f(x) dx = \frac{1}{2} \text{ e } \int_y^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}$$

Nel caso in esame, ricordando che il valore mediano appartiene all'intervallo $[1,10]$, y è valore mediano se:

$$\int_y^{10} \frac{1}{12} dx = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{10-y}{12} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{y}{12} = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} \rightarrow \frac{y}{12} = \frac{1}{3} \rightarrow y = 4$$

9. Imponendo $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ si ha:

$$\begin{aligned} (x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 &= (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2 \rightarrow \\ \rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 &= x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + z^2 \rightarrow \\ \rightarrow 6x - 2y + 4z + 8 = 0 &\rightarrow 3x - y + 2z + 4 = 0 \end{aligned}$$

Quindi il luogo dei punti equidistanti è il piano di equazione $3x - y + 2z + 4 = 0$.

Alternativamente il luogo geometrico dei punti equidistanti è il piano perpendicolare ad AB passante per il punto medio di AB.

Il punto medio di AB è $M = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$ ed il piano ha parametri direttori $a = -3 - 0 = -3, b = 2 - 1 = 1, c = 0 - 2 = -2$, di conseguenza il piano perpendicolare ad AB e passante per M ha equazione:

$$-3\left(x + \frac{3}{2}\right) + \left(y - \frac{3}{2}\right) - 2(z - 1) = 0 \rightarrow 3x - y + 2z + 4 = 0$$

10. Le derivate prima e seconda della funzione soluzione sono:

$$y'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$$

$$y''(x) = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x = -2e^{-x} \cos x$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ricava:

$$\begin{aligned} -2e^{-x} \cos x + 2(-e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x) + 2e^{-x} \sin x &= \\ = -2e^{-x} \cos x - 2e^{-x} \sin x + 2e^{-x} \cos x + 2e^{-x} \sin x &= 0 \end{aligned}$$

Avendo dimostrato l'identità deduciamo che $y(x) = e^{-x} \sin x$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + 2y = 0$.