ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE
LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

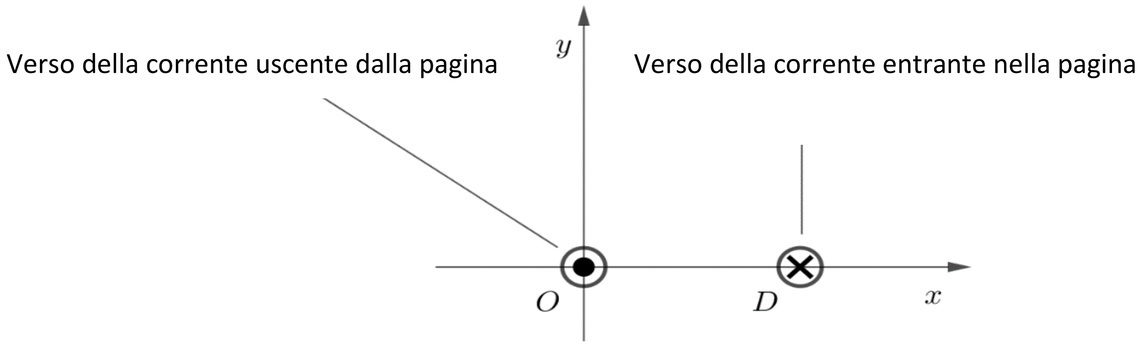
(Testo valevole anche per le corrispondenti sperimentazioni internazionali e quadriennali)

Tema di: MATEMATICA e FISICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

Due fili rettilinei paralleli vincolati a rimanere nella loro posizione, distanti 1 m l'uno dall'altro e di lunghezza indefinita, sono percorsi da correnti costanti di pari intensità ma verso opposto; si indichi con i l'intensità di corrente, espressa in ampere (A). Si consideri un piano perpendicolare ai due fili sul quale è fissato un sistema di riferimento ortogonale Oxy, dove le lunghezze sono espresse in metri (m), in modo che i due fili passino uno per l'origine O e l'altro per il punto $D(1,0)$, come mostrato in figura.



1. Verificare che l'intensità del campo magnetico $\vec{B}$, espresso in tesla (T), in un punto $P(x,0)$, con $0 < x < 1$, è data dalla funzione $B(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$, dove K è una costante positiva della quale si richiede l'unità di misura. Stabilire quali sono la direzione e il verso del vettore $\vec{B}$ al variare di x nell'intervallo $(0,1)$. Per quale valore di x l'intensità di $\vec{B}$ è minima?

2. Nella zona di spazio sede del campo $\vec{B}$, una carica puntiforme q transita, ad un certo istante, per il punto $C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, con velocità di modulo v_0 nella direzione della retta di equazione $x = \frac{1}{2}$. Descriverne il moto in presenza del solo campo magnetico generato dalle due correnti, giustificando le conclusioni.

   Stabilire intensità, direzione e verso del campo magnetico $\vec{B}$ nei punti dell'asse x esterni al segmento OD. Esistono punti sull'asse x dove il campo magnetico $\vec{B}$ è nullo?

3. Indipendentemente da ogni riferimento alla fisica, studiare la funzione $f(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$ dimostrando, in particolare, che il grafico di tale funzione non possiede punti di flesso. Scrivere l'equazione della retta r tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $\frac{1}{3}$ e determinare le coordinate dell'ulteriore punto d'intersezione tra r e il grafico di f.

4. Calcolare il valore dell'integrale

$$\int_{1/4}^{3/4} f(x)\, dx$$

ed interpretare geometricamente il risultato ottenuto. Esprimere, per $t \geq 2$, l'integrale

$$g(t) = \int_{2}^{t} |f(x)|\, dx$$

e calcolare $\lim_{t \to +\infty} g(t)$. Qual è il significato di tale limite?

SVOLGIMENTO

Punto 1

Per la legge di Biot-Savart il campo magnetico generato da un filo infinito percorso da corrente in un punto a distanza d è pari a:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

dove:

- I è la corrente che attraversa il filo;
- μ_0 è la permeabilità magnetica

Nel caso in esame i fili sono a distanza rispettivamente x e $(1-x)$ pertanto il campo magnetico è pari a:

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

Posto $K = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$ si ricava

$$B(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

dove le dimensioni di K sono

$$[K] = \overbrace{[T]}^{Tesla} \cdot \overbrace{[m]}^{metro}$$

Per $0 < x < 1$ il verso del campo magnetico è parallelo all'asse delle ordinate.

Inoltre, come sarà dimostrato nel Punto 3, il campo magnetico assume valore minimo pari a $4K$ per $x = \frac{1}{2}$.

Punto 2

Sulla carica q agisce una forza di Lorentz pari a:

$$\vec{F} = q\overrightarrow{v_0} \times \vec{B}$$

Se la particella si muove nella direzione della retta $x = \frac{1}{2}$ ovvero parallelamente all'asse delle ordinate, allora la forza di Lorentz agente sulla carica è nulla in quanto la velocità ed il campo magnetico hanno medesima direzione pertanto il prodotto vettoriale è nullo.
Quindi la particella q si muove di moto rettilineo uniforme.

Se $x < 0$ o $x > 1$ il verso del campo magnetico sarà nella direzione delle asse delle ordinate negative ed il modulo sarà pari alla differenza tra i moduli dei singoli contributi. Si veda il Punto 3 in cui viene rappresentato il grafico di $B(x)$.

Dalla formula analitica di $B(x) = K\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right) = K\left[\frac{1}{x(1-x)}\right]$ deduciamo che il campo magnetico non si annulla mai.

Punto 3

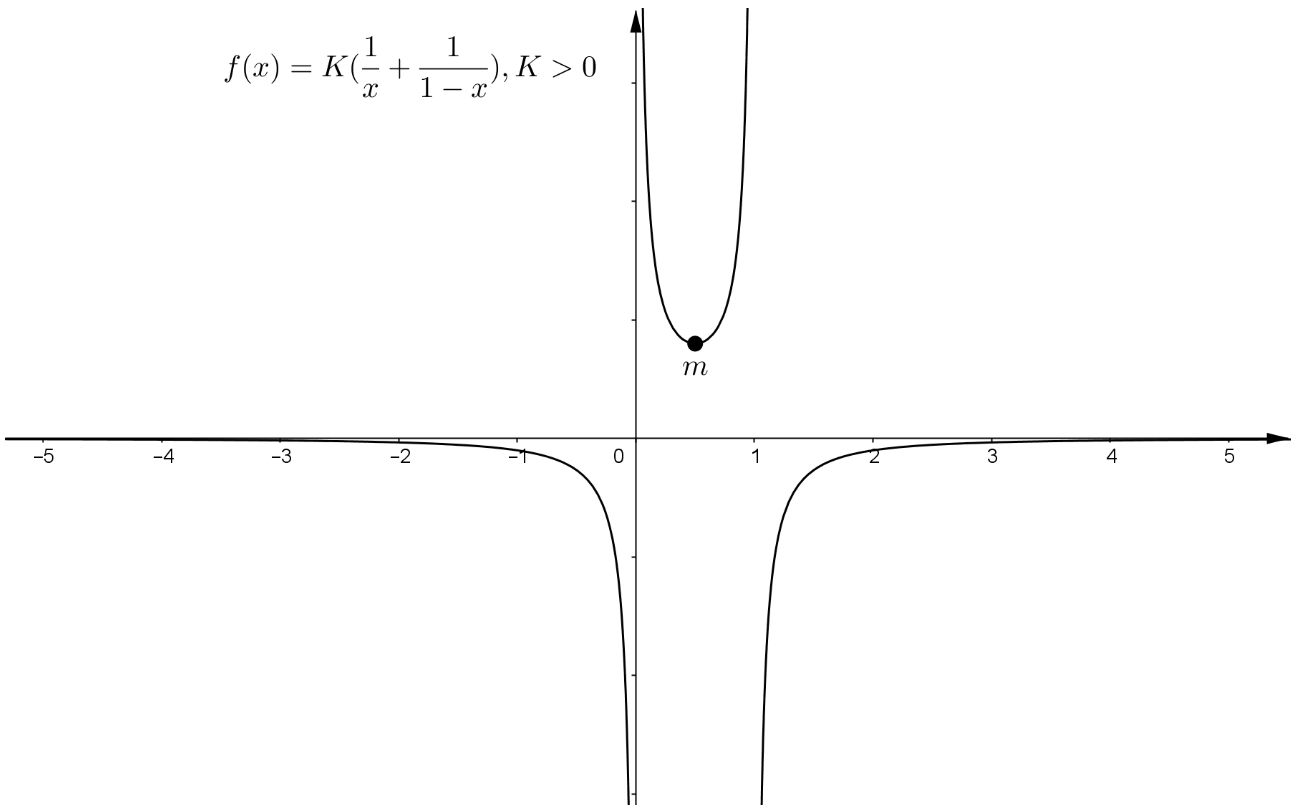
Studiamo la funzione $f(x) = K\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right) = K\frac{1}{x(1-x)}$ considerando $K > 0$.

- **Dominio**: $R - \{0,1\}$;
- **Intersezione asse ascisse**: non esistono intersezioni con l'asse delle ascisse;
- **Intersezione asse ordinate**:; non esistono intersezioni con l'asse delle ordinate;
- **Simmetrie**: la funzione non è nè pari nè dispari;
- **Positività**: $f(x) = K\frac{1}{x(1-x)} > 0 \rightarrow 0 < x < 1$;
- **Asintoti verticali**: si ha
$$\lim_{x\to 0^+} K\frac{1}{x(1-x)} = +\infty, \lim_{x\to 0^-} K\frac{1}{x(1-x)} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} K\frac{1}{x(1-x)} = -\infty, \lim_{x\to 1^-} K\frac{1}{x(1-x)} = +\infty$$
pertanto le rette $x = 0, x = 1$ sono asintoti verticali destri e sinistri;
- **Asintoti orizzontali**: si ha
$$\lim_{x\to\pm\infty} K\frac{1}{x(1-x)} = 0$$
di conseguenza $y = 0$ è asintoto orizzontale destro e sinistro.
- **Asintoti obliqui**: non ve ne sono in quanto la funzione è razionale fratta e la presenza dell'asintoto orizzontale esclude la presenza dell'asintoto obliquo;
- **Crescenza e decrescenza**: la derivata prima è
$$f'(x) = K\frac{2x-1}{x^2(1-x)^2}$$
ed è positiva per $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$ e negativa per $x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$ pertanto $x = \frac{1}{2}$ è ascissa di minimo relativo ed il valore di tale minimo è $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4K$;

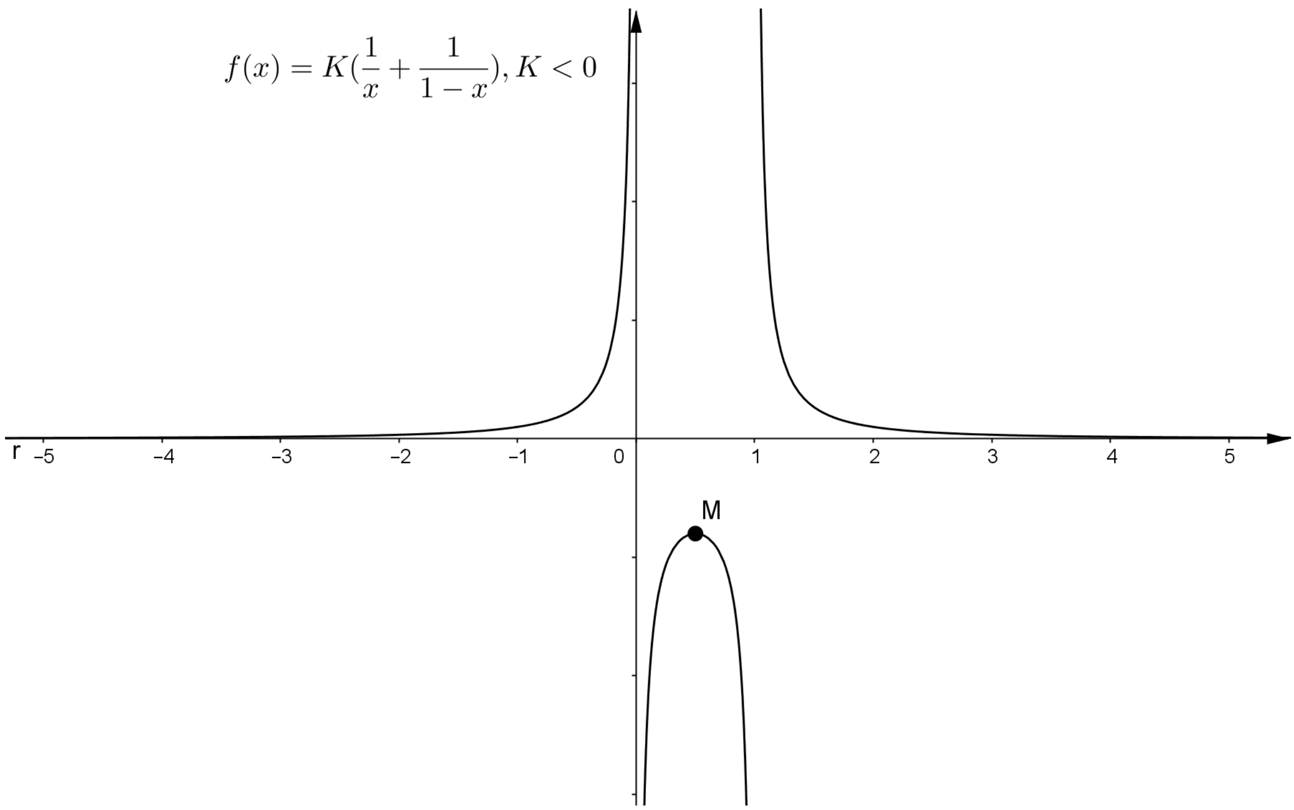
- **Concavità e convessità**: la derivata seconda è pari a:
$$f''(x) = -2K \cdot \frac{3x^2-3x+1}{x^3(1-x)^3}$$
e non si annulla mai in quanto il numeratore $(3x^2 - 3x + 1)$ è sempre positivo, pertanto la funzione non ha flessi.
Inoltre la derivata seconda è positiva se
$$x^3(1-x)^3 < 0 \rightarrow 0 < x < 1$$

pertanto la funzione volge concavità verso l'alto in $(0,1)$ e verso il basso in $(-\infty,0) \cup (1,+\infty)$.

Di seguito il grafico di $f(x) = K\frac{1}{x(1-x)}$ per $K > 0$.



Poichè il testi ci chiede di non tener conto delle limitazioni fisiche, consideriamo anche il caso $K < 0$. Di seguito il grafico di $f(x) = K\frac{1}{x(1-x)}$ per $K < 0$ ottenuto da quello per $K > 0$ ribaltando il grafico rispetto all'asse delle ascisse.



La retta tangente in $A\left(\frac{1}{3}, \frac{9K}{2}\right)$ è pari a:

$$y = f'\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{9K}{2} = \left[K\frac{2x-1}{x^2(1-x)^2}\right]_{x=\frac{1}{3}} \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{9K}{2} =$$
$$= -\frac{27K}{4} \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{9K}{2} = \frac{27K}{4}(1-x)$$

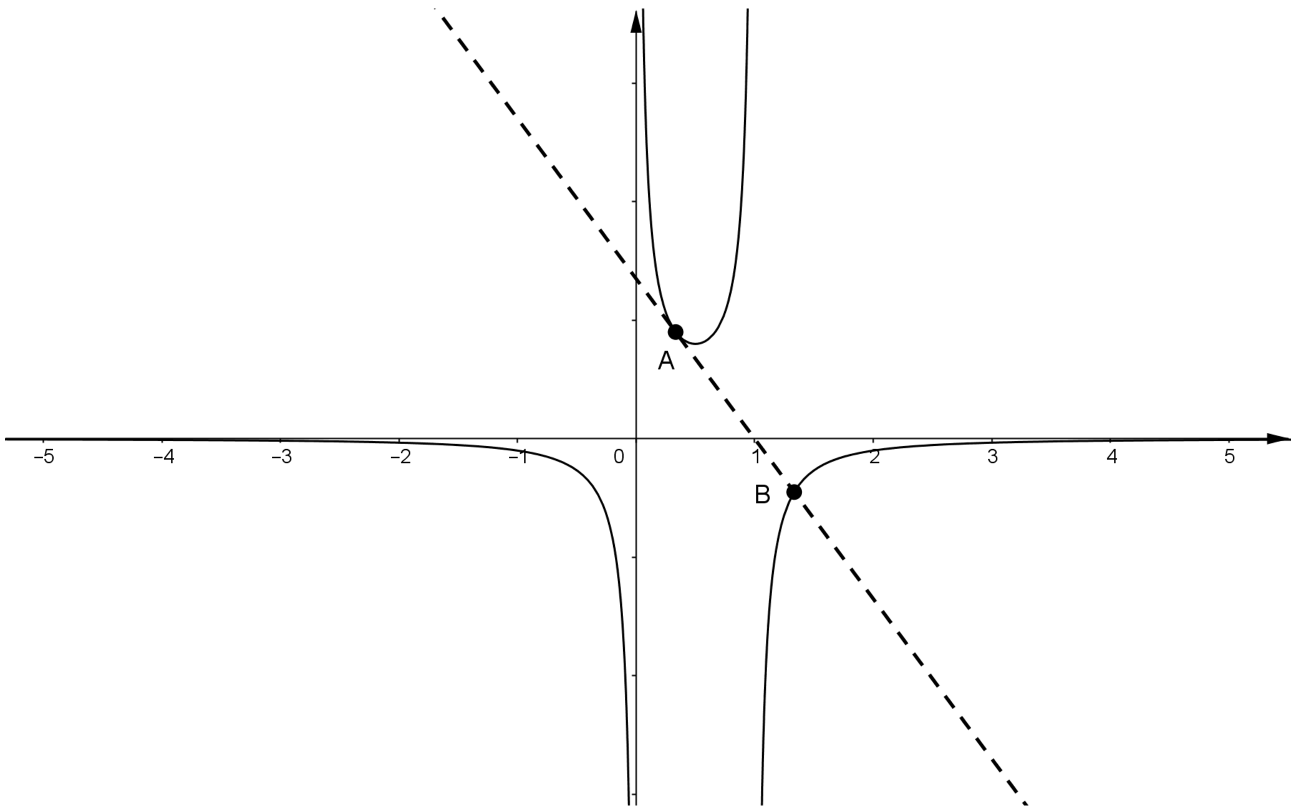
L'ulteriore punto di intersezione tra la retta tangente ed il grafico di $f(x)$ si ricava risolvendo la seguente equazione:

$$K\frac{1}{x(1-x)} = \frac{27K}{4}(1-x) \rightarrow 27x(1-x)^2 - 4 = 0 \rightarrow 27x^3 - 54x^2 + 27x - 4 = 0$$

Poichè il punto ad ascissa $x = \frac{1}{3}$ è in comune tra la retta ed il grafico, è possibile scomporre il polinomio $27x^3 - 54x^2 + 27x - 4$ considerando $\left(x - \frac{1}{3}\right)$ come fattore; eseguendo tale scomposizione si ricava:

$$27x^3 - 54x^2 + 27x - 4 = 27\left(x - \frac{1}{3}\right)^2\left(x - \frac{4}{3}\right)$$

di conseguenza l'ulteriore punto di intersezione tra tangente e grafico di $f(x)$ è $B\left(\frac{4}{3}, -\frac{9K}{4}\right)$.



Punto 4

Considerando sia il caso $K > 0$ che $K < 0$ si ha:

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)\,dx = |K| \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{x(1-x)}\,dx = |K| \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{(1-x)}\right] dx =$$

$$= |K| \left[\ln\left|\frac{x}{(1-x)}\right|\right]_{1/4}^{3/4} = |K|\left[\ln(3) - \ln\left(\frac{1}{3}\right)\right] = |K|\ln(9) = 2|K|\ln(3)$$

e geometricamente rappresenta l'area sottesa dal grafico di $f(x)$ nell'intervallo $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

Calcoliamo l'integrale $g(t) = \int_2^t |f(x)|\,dx$, si ha:

$$g(t) = \int_2^t |f(x)|\,dx = |K| \int_2^t \left|\frac{1}{x(1-x)}\right| dx = |K| \int_2^t \left[-\frac{1}{x(1-x)}\right] dx =$$

$$= |K| \int_2^t \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)}\right] dx = |K| \left[\ln\left|\frac{(x-1)}{x}\right|\right]_2^t = |K|\left[\ln\left(\frac{t-1}{t}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= |K| \ln\left[\frac{(t-1)}{t}\right] + |K|\ln(2)$$

Calcoliamo il limite $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)$, si ha:

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = \lim_{t\to+\infty} |K| \ln\left[\frac{(t-1)}{t}\right] + |K|\ln(2) = |K|\ln\left[\lim_{t\to+\infty}\frac{(t-1)}{t}\right] + |K|\ln(2) =$$
$$= |K|\overbrace{\ln(1)}^{=0} + |K|\ln(2) = |K|\ln(2)$$

Tale limite geometricamente rappresenta l'area sottesa dal grafico di $|f(x)|$ nell'intervallo $[2, +\infty[$.

PROBLEMA 2

Assegnato un numero reale positivo k, considerare le funzioni f e g così definite:

$$f(x) = \sqrt{x}\,(k - x) \qquad\qquad g(x) = x^2(x - k).$$

1. Provare che, qualunque sia $k > 0$, nell'intervallo $[0, k]$ il grafico di f ha un unico punto di massimo $F(x_F\,, y_F)$ ed il grafico di g ha un unico punto di minimo $G(x_G\,, y_G)$. Verificare che si ha $x_G = 2x_F$ e $y_G = -(y_F)^2$.

2. Verificare che, qualunque sia $k > 0$, i grafici delle due funzioni sono ortogonali nell'origine, vale a dire che le rispettive rette tangenti in tale punto sono tra loro ortogonali. Determinare per quale valore positivo di k i due grafici si intersecano ortogonalmente anche nel loro ulteriore punto comune.

D'ora in avanti, assumere $k = 1$. In un riferimento cartesiano, dove le lunghezze sono espresse in metri (m), l'unione degli archi di curva di equazioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$, per $x \in [0, 1]$, rappresenta il profilo di una spira metallica. Sia S la regione piana delimitata da tale spira.

3. Supponendo che nella regione S sia presente un campo magnetico uniforme, perpendicolare al piano di S, avente intensità $B_0 = 2{,}0 \cdot 10^{-2}$ T, verificare che il valore assoluto del flusso di tale campo attraverso S è pari a $7{,}0 \cdot 10^{-3}$ Wb.

4. Supporre che la spira abbia resistenza elettrica R pari a $70\,\Omega$ e che il campo magnetico, rimanendo perpendicolare al piano di S, a partire dall'istante $t_0 = 0$ s, inizi a variare secondo la legge:

   $$B(t) = B_0\, e^{-\omega t} \cos(\omega t), \text{ con } \omega = \pi \text{ rad/s}$$

   e $t \geq 0$ espresso in secondi (s). Esprimere l'intensità della corrente indotta nella spira in funzione di t, specificando in quale istante per la prima volta la corrente cambia verso.
   Qual è il valore massimo di tale corrente per $t \geq 0$? Spiegare quale relazione esiste tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta.

SVOLGIMENTO

Punto 1

La derivata prima della funzione $f(x) = \sqrt{x}\,(k - x)$ è pari a:

$$f'(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(k - x) = \frac{(k - 3x)}{2\sqrt{x}}$$

ed è positiva per $x \in \left(0, \frac{k}{3}\right)$ e negativa per $x \in \left(\frac{k}{3}, +\infty\right)$ pertanto $x_F = \frac{k}{3}$ è ascissa di massimo relativo.

Il massimo relativo ha coordinate $F\left(\frac{k}{3}, \frac{2k}{3}\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$.

La derivata prima della funzione $g(x) = x^2(x - k)$ è pari a:

$$g'(x) = 3x^2 - 2kx = x(3x - 2k)$$

ed è negativa per $x \in \left(0, \frac{2k}{3}\right)$ e positiva per $x \in \left(\frac{2k}{3}, +\infty\right)$ pertanto $x_G = \frac{2k}{3}$ è ascissa di minimo relativo.

Il minimo relativo ha coordinate $G\left(\frac{2k}{3}, -\frac{4k^3}{27}\right)$.

Si nota che:

$$x_G = \frac{2k}{3} = 2x_F$$

$$y_G = -\frac{4k^3}{27} = -\left(\frac{2k}{3}\sqrt{\frac{k}{3}}\right)^2 = -(y_F)^2$$

Punto 2

Il punto ad ascissa $x = 0$ è di non derivabilità per $f(x)$ ed in particolare è una cuspide in quanto

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(k - 3x)}{2\sqrt{x}} \overset{k>0}{\cong} +\infty$$

pertanto la tangente ad $f(x)$ nel punto $(0,0)$ ha equazione

$$x = 0$$

La tangente a $g(x)$ in $(0,0)$ è

$$y = g'(0) \cdot x = 0$$

Quindi le due tangenti sono coincidenti con gli assi cartesiani e quindi ortogonali.

I due grafici si intersecano nei punti che soddisfano la seguente equazione:

$$\sqrt{x}\,(k-x)=x^2(x-k)\ \rightarrow \sqrt{x}(x-k)\left(x^{\frac{3}{2}}+1\right)=0 \rightarrow x=0, x=k$$

La tangente ad $f(x)$ in $(k,0)$ è

$$y=f'(k)\cdot(x-k)=\left[\frac{(k-3x)}{2\sqrt{x}}\right]_{x=k}\cdot(x-k)=-\sqrt{k}\cdot(x-k)$$

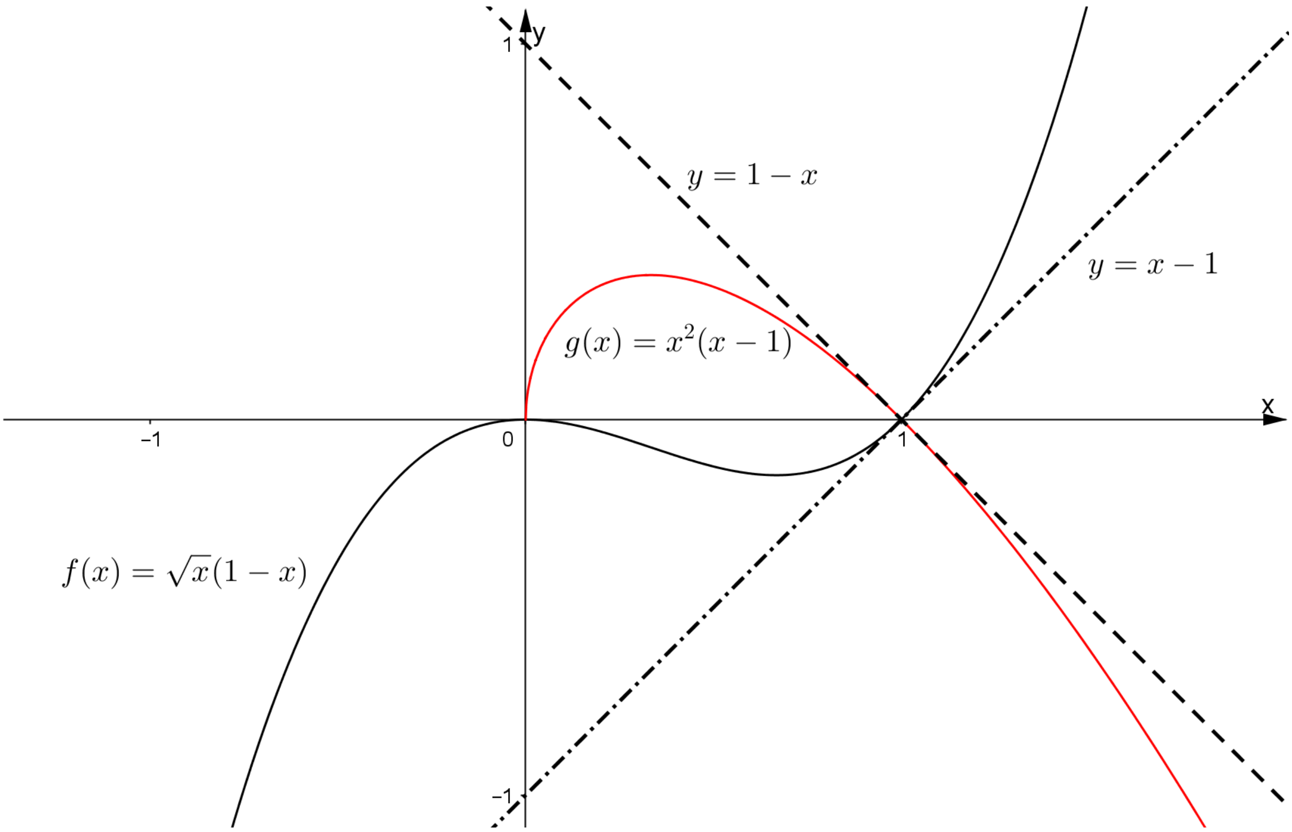
La tangente a $g(x)$ in $(k,0)$ è

$$y=g'(k)\cdot(x-k)=[x(3x-2k)]_{x=k}\cdot(x-k)=k^2\cdot(x-k)$$

Le due tangenti sono ortogonali se:

$$-\sqrt{k}=-\frac{1}{k^2}\rightarrow k^2\sqrt{k}=1\rightarrow k=1$$

Di seguito nello stesso riferimento cartesiano i grafici delle due funzioni e delle due tangenti per $k=1$.



Punto 3

L'area della spira magnetica è pari a:

$$A=\int_0^1[g(x)-f(x)]dx=\int_0^1\left[\sqrt{x}\,(1-x)-x^2(x-1)\right]dx=$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{20}$$

Il valore assoluto del flusso del campo magnetico è pari a:

$$\Phi(B) = B_0 \cdot A = 2{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{7}{20} = 7 \cdot 10^{-3} Wb$$

Punto 4

Ricordiamo la legge di Faraday-Neumann che esprime la relazione tra la forza elettromotrice indotta ed il flusso del campo magnetico B:

$$f_{em} = -\frac{\partial \Phi(B)}{\partial t}$$

Ricordando l'area della spira calcolata nel punto precedente si ha:

$$f_{em}(t) = -A\frac{dB(t)}{dt} = -A \cdot B_0[-\omega\, e^{-\omega t}\cos(\omega t) - \omega\, e^{-\omega t}\sin(\omega t)] =$$
$$= A \cdot B_0 \cdot \omega\, e^{-\omega t}[\cos(\omega t) + \sin(\omega t)] = A \cdot B_0 \cdot \omega\, e^{-\omega t} \cdot \sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Ricordando che $\omega = \pi$ rad/s e $B_0 \cdot A = 7 \cdot 10^{-3} Wb$ si ha

$$f_{em}(t) = 7 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-\pi t} \cdot \sin\left[\pi\left(t + \frac{1}{4}\right)\right]$$

L'intensità della corrente è pari a:

$$I(t) = \frac{f_{em}(t)}{R} = \frac{7 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot \sqrt{2}}{70} \cdot e^{-\pi t} \cdot \sin\left[\pi\left(t + \frac{1}{4}\right)\right] =$$
$$= 10^{-4} \cdot \pi \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-\pi t} \cdot \sin\left[\pi\left(t + \frac{1}{4}\right)\right]$$

La corrente cambia segno quando si annulla $\sin\left[\pi\left(t + \frac{1}{4}\right)\right]$:

$$\sin\left[\pi\left(t + \frac{1}{4}\right)\right] = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \pi\left(t + \frac{1}{4}\right) = 2k\pi, \pi\left(t + \frac{1}{4}\right) = (2k+1)\pi \rightarrow$$
$$\rightarrow t = 2k - \frac{1}{4}, t = 2k + \frac{3}{4}$$

con $t \geq 0, k \in Z$.

La corrente si annulla in infiniti punti ad ascissa $t = 2k - \frac{1}{4}, t = 2k + \frac{3}{4}$, il primo istante temporale positivo nel quale la corrente cambia segno si ottiene per $k = 0$ ed è $t = \frac{3}{4}\ secondi.$

Per calcolare il valore di *t* per il quale la corrente assume valore massimo bisogna calcolare la derivata prima della funzione $I(t)$, si ha:

$$
\begin{aligned}
I'(t) &= 10^{-4} \cdot \pi \cdot \sqrt{2} \cdot \left\{ -\pi e^{-\pi t} \cdot \sin\left[\pi\left(t+\frac{1}{4}\right)\right] + \pi e^{-\pi t} \cdot \cos\left[\pi\left(t+\frac{1}{4}\right)\right]\right\} = \\
&= 10^{-4} \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-\pi t} \cdot \left\{ -\sin\left[\pi\left(t+\frac{1}{4}\right)\right] + \cos\left[\pi\left(t+\frac{1}{4}\right)\right]\right\} = \\
&= 10^{-4} \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-\pi t} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left[\pi\left(t+\frac{1}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right] = \\
&= 10^{-4} \cdot \pi^2 \cdot e^{-\pi t} \cdot \cos\left[\pi\left(t+\frac{1}{2}\right)\right] = \\
&= -10^{-4} \cdot \pi^2 \cdot e^{-\pi t} \cdot \sin(\pi t)
\end{aligned}
$$

La derivata prima è positiva se:

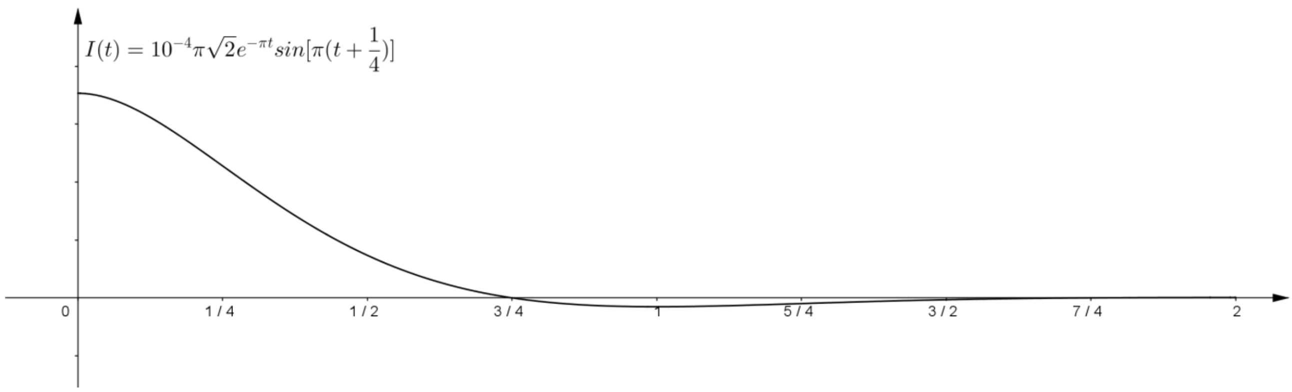
$$
\begin{gathered}
\sin(\pi t) < 0 \rightarrow \\
\rightarrow \pi + 2k\pi < \pi t < 2\pi + 2k\pi \rightarrow \\
\rightarrow 2k+1 < t < 2k+2
\end{gathered}
$$

con $t \geq 0, k \in Z$.

Quindi la corrente presenta infiniti massimi relativi alle ascisse $t = 2k+2$ ed infiniti minimi relativi alle ascisse $t = 2k+1$.
Poichè la funzione corrente decresce con il crescere del tempo per via del fattore esponenziale decrescente $e^{-\pi t}$, considerando $t \geq 0$, deduciamo che il massimo assoluto della corrente viene raggiunto per $t = 0$ ovvero per $k = -1$.
Il valore massimo della corente è quindi:

$$
I(0) = 10^{-4} \cdot \pi \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (10^{-4} \cdot \pi)\, A \cong 0.31\, mA
$$

Di seguito il grafico della corrente nell'intervallo $[0,2]$ per semplicità di rappresentazione.



La relazione tra verso della corrente indotta e variazione del flusso del campo magnetico è data dalla legge di Lenz secondo la quale la corrente indotta ha verso opposto alla variazione del flusso del campo meagnetico.

QUESTIONARIO

1. Assegnato $k \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione così definita: $g(x) = \frac{(k-1)x^3+kx^2-3}{x-1}$.
   - Come va scelto il valore di k affinché il grafico di g non abbia asintoti?
   - Come va scelto il valore di k affinché il grafico di g abbia un asintoto obliquo?

   Giustificare le risposte e rappresentare, nei due casi, i grafici delle funzioni ottenute.

2. Sia f una funzione pari e derivabile in $\mathbb{R}$, sia g una funzione dispari e derivabile in $\mathbb{R}$. Dimostrare che la funzione f' è dispari e che la funzione g' è pari. Fornire un esempio per la funzione f ed un esempio per la funzione g, verificando quanto sopra.

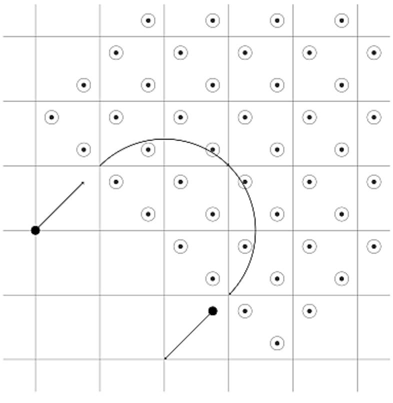
3. Si consideri la funzione $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ così definita:
$$f(x) = \int_1^x \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t}\, dt$$
   Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 1.

4. Nello spazio tridimensionale, sia r la retta passante per i punti $A(-2,\ 0,\ 1)$ e $B(0,\ 2,\ 1)$. Determinare le coordinate di un punto appartenente alla retta r che sia equidistante rispetto ai punti $C(5,\ 1, -2)$ e $D(1,\ 3,\ 4)$.

5. Emma fa questo gioco: lancia un dado con facce numerate da 1 a 6; se esce il numero 3 guadagna 3 punti, altrimenti perde 1 punto. Il punteggio iniziale è 0.
   - Qual è la probabilità che, dopo 4 lanci, il suo punteggio sia ancora 0?
   - Qual è la probabilità che, in una sequenza di 6 lanci, il punteggio non scenda mai sotto lo 0?

6. Ai vertici di un quadrato $ABCD$, di lato 2 m, sono fissate quattro cariche elettriche. La carica in A è pari a 9 nC, la carica in B è pari a 2 nC, la carica in C è pari a 4 nC, la carica in D è pari a -3 nC. Supponendo che le cariche si trovino nel vuoto, determinare intensità, direzione e verso del campo elettrostatico generato dalle quattro cariche nel centro del quadrato.

7. Un protone, inizialmente in quiete, viene accelerato da una d.d.p. di 400 V ed entra, successivamente, in una regione che è sede di un campo magnetico uniforme e perpendicolare alla sua velocità.



   La figura illustra un tratto semicircolare della traiettoria descritta dal protone (i quadretti hanno lato 1,00 m). Determinare l'intensità di $\vec{B}$.

8. Si vuole ottenere l'emissione di elettroni da lastre metalliche di materiali diversi su cui incide una radiazione di frequenza $7{,}80 \cdot 10^{14}$ Hz. Determinare, motivando la risposta, quale tra i materiali in elenco è l’unico adatto allo scopo.

Materiale	**Lavoro di estrazione**
Argento	4,8 eV
Cesio	1,8 eV
Platino	5,3 eV

Individuato il materiale da utilizzare, determinare la velocità massima che può avere un elettrone al momento dell'emissione.

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
costante di Planck	h	$6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J · s
costante dielettrica nel vuoto	ε_0	$8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m
massa dell’elettrone	m_e	$9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg
massa del protone	m_p	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg

SVOLGIMENTO

1. Affinchè la funzione non abbia asintoti verticali dobbiamo imporre

$$g(1) = 0$$

In questo modo anche il numeratore presenterà il fattore $(x-1)$ e di conseguenza $x = 1$ sarà ascissa di discontinuità eliminabile di terza specie.

Imponendo la condizione soprastante si ricava:

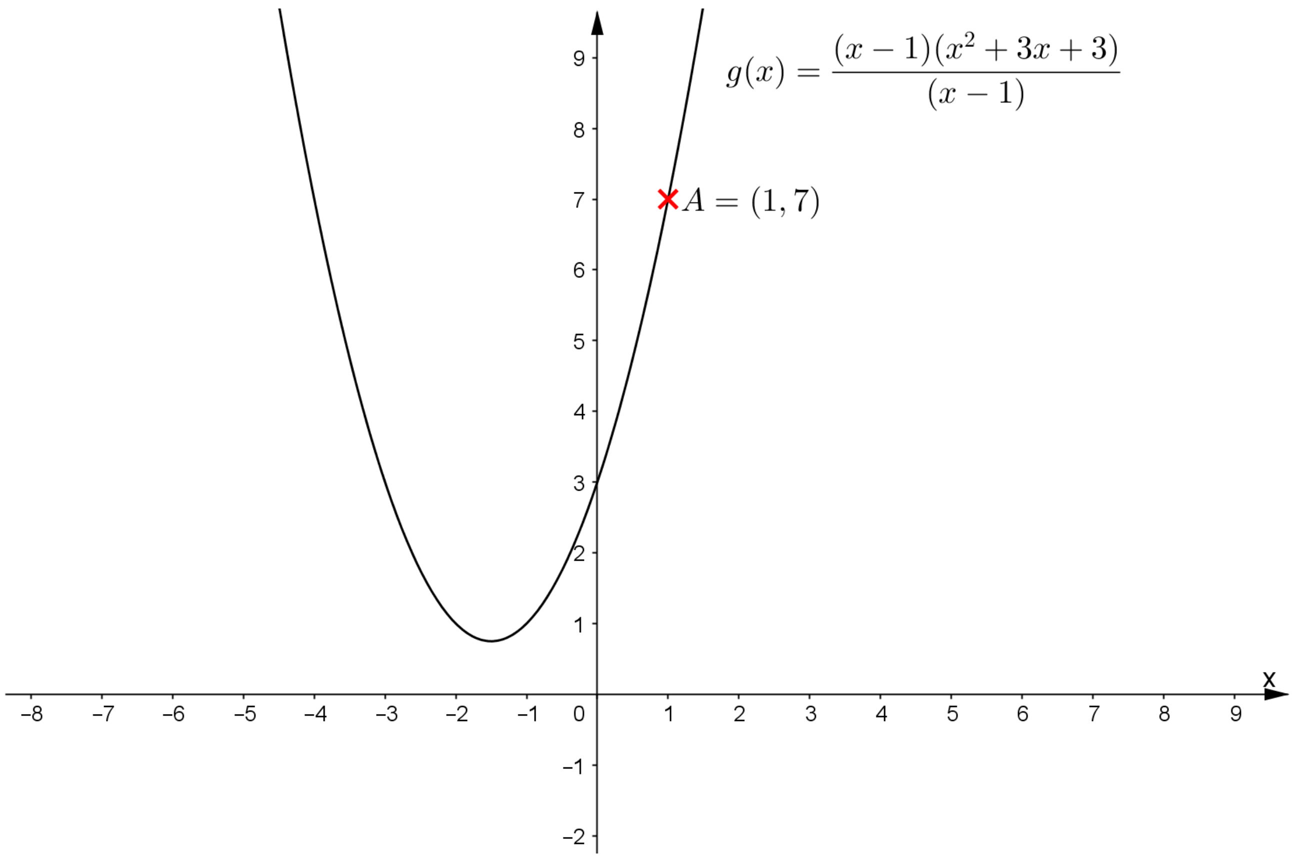
$$k - 1 + k - 3 = 0 \rightarrow k = 2$$

Quindi

$$g(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x - 1} = \frac{(x-1)(x^2+3x+3)}{x-1}$$

il cui grafico è quello della parabola di equazione $y = x^2 + 3x + 3$ decurtata del punto $A = (1,7)$ che è di discontinuità eliminabile.

Di seguito il grafico di $g(x) = \frac{(x-1)(x^2+3x+3)}{x-1}$.



Affinchè la funzione abbia un asintoto obliquo, il polinomio al numeratore deve avere grado 2 ovvero deve annullarsi l'addendo di grado 3, cioè deve aversi

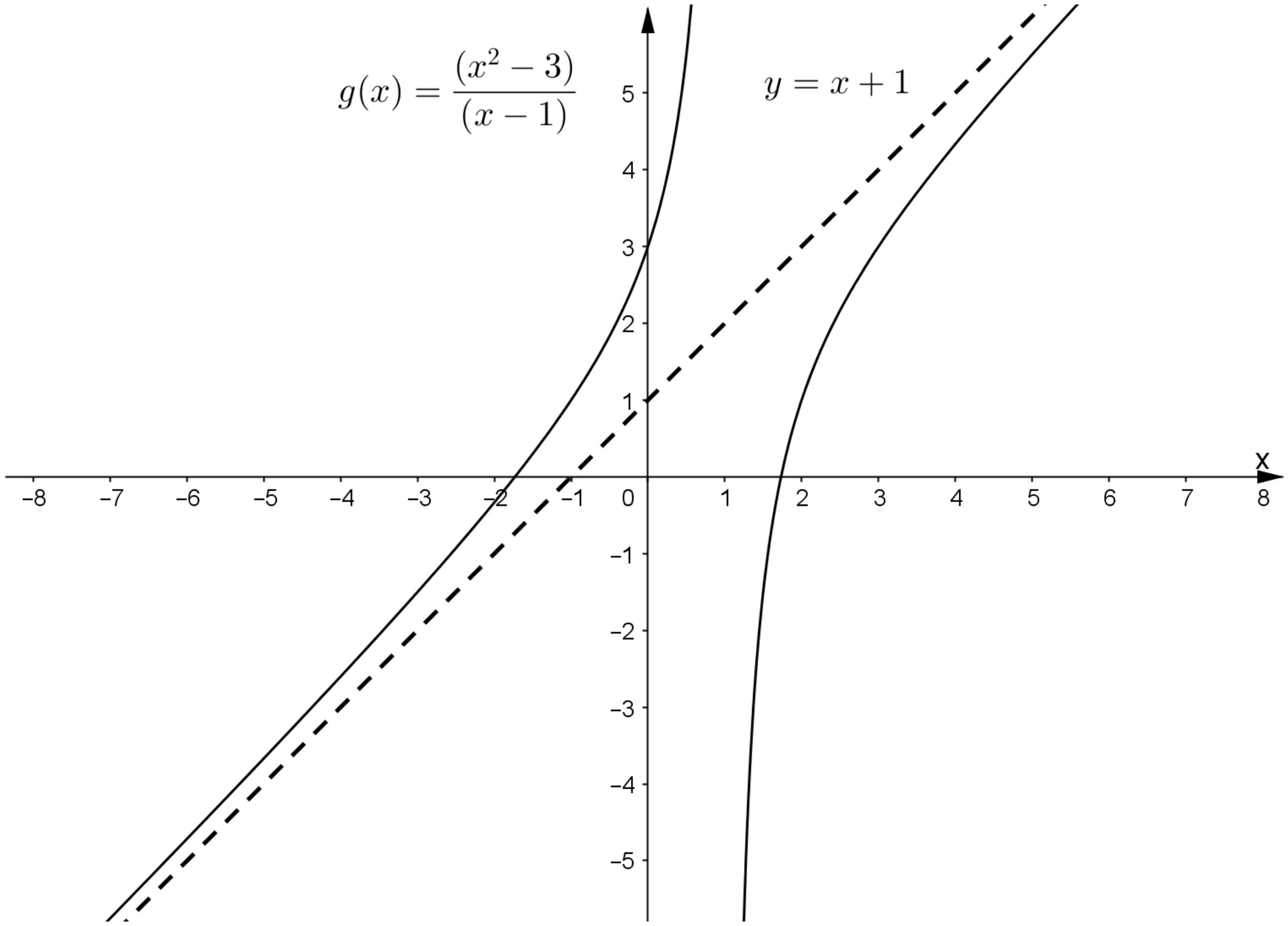
$$k-1=0 \rightarrow k=1$$

La funzione pertanto diventa:

$$g(x)=\frac{x^2-3}{x-1}=x+1-\frac{2}{x-1}$$

Il grafico è quello di una iperbole definita in $R-\{1\}$, interseca l'asse delle ascisse in $x=\pm\sqrt{3}$ e l'asse delle ordinate in $(0,3)$, è positiva in $\left(-\sqrt{3},1\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$, ha asintoto verticale $x=1$ ed asintoto obliquo $y=x+1$, non ha estremi relativi e flessi.

Di seguito il grafico di $g(x)=\frac{x^2-3}{x-1}$.



2. Una funzione f è pari se

$$f(x) = f(-x)$$

mentre una funzione g è dispari se

$$g(x) = -g(-x)$$

Calcolando le derivate membro a membro di entrambe le funzioni si ricava:

$$f'(x) = -f'(-x)$$
$$g'(x) = g'(-x)$$

ovvero $f'(x)$ è una funzione dispari e $g'(x)$ una funzione pari.

Consideriamo

$$f(x) = \cos x$$
$$g(x) = \sin x$$

si ha:

$$f'(x) = -\sin x$$
$$g'(x) = \cos x$$

ovvero ad una funzione pari corrisponde una derivata dispari e viceversa.

---

3. A norma del teorema fondamentale del calcolo integrale si ha:

$$f'(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)}{x}$$

Il punto ad ascissa 1 ha ordinata $f(1) = \int_1^1 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t}\, dt = 0$.

La retta tangente ha equazione

$$y = f'(1)(x-1) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)(x-1) = \frac{1}{2}(x-1)$$

---

4. La retta passante per i punti $A(-2,\ 0,\ 1)$ e $B(0,\ 2,\ 1)$ ha equazione:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$$

Nel caso in esame si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{2} \\ z = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = x \\ y = x + 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Imponiamo che le distanze del generico punto $(x, x + 2,1)$ da C e D siano uguali, si ha:

$$(x-5)^2 + (x+2-1)^2 + (1+2)^2 = (x-1)^2 + (x+2-3)^2 + (1-4)^2 \to$$
$$\to (x-5)^2 + (x+1)^2 = 2(x-1)^2 \to$$
$$\to x^2 - 10x + 25 + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 4x + 2 \to$$
$$\to -8x + 26 = -4x + 2 \to$$
$$\to -4x = -24 \to$$
$$\to x = 6$$

Di conseguenza il punto equidistante ha coordinate $(6,8,1)$.

---

5. Per avere dopo 4 lanci un risultato nullo è necessario che venga estratto una sola volta il 3 e tre volte un numero diverso da 3.

La probabilità di estrarre 3 è $\frac{1}{6}$ mentre la probabilità di estrarre un numero diverso da 3 è $\frac{5}{6}$; la probabilità richiesta è quindi pari a:

$$p = \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{125}{216} = \frac{125}{324} \cong 38.6\%$$

Le casistiche affinchè il punteggio dopo 6 lanci non sia mai negativo sono le seguenti:

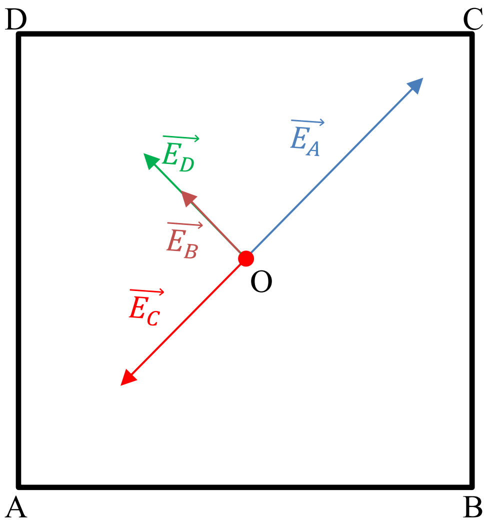
Caso	Lancio 1 – numero estratto	Lancio 2 – numero estratto	Lancio 3 – numero estratto	Lancio 4 – numero estratto	Lancio 5 – numero estratto	Lancio 6 – numero estratto
#1	3	3	Qualsiasi	Qualsiasi	Qualsiasi	Qualsiasi
#2	3	$\neq 3$	3	Qualsiasi	Qualsiasi	Qualsiasi
#3	3	$\neq 3$	$\neq 3$	3	Qualsiasi	Qualsiasi
#4	3	$\neq 3$	$\neq 3$	$\neq 3$	3	Qualsiasi

La probabilità richiesta è quindi pari a:

$$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} + \frac{5}{216} + \frac{25}{1296} + \frac{125}{7776} =$$
$$= \frac{216 + 180 + 150 + 125}{7776} = \frac{671}{7776} \cong 8.6\%$$

---

6. Consideriamo la figura seguente che mostra il campo elettrico generato da ogni singola carica.



Il campo elettrico generato da una carica puntiforme a una distanza d è dato dalla formula:

$$\vec{E} = k\frac{Q}{d^2}$$

dove k è la costante di Coulomb.

Nel caso in esame, sapendo che $d = \sqrt{2}$, i moduli dei 4 campi elettrici sono:

$$\left|\overrightarrow{E_A}\right| = k\frac{9 \cdot 10^{-9}}{2}$$

$$\left|\overrightarrow{E_B}\right| = k\frac{2 \cdot 10^{-9}}{2}$$

$$\left|\overrightarrow{E_C}\right| = k\frac{4 \cdot 10^{-9}}{2}$$

$$\left|\overrightarrow{E_D}\right| = k\frac{3 \cdot 10^{-9}}{2}$$

Il campo elettrico finale è pari alla somma dei seguenti campi elettrici componenti:

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_{AC}} + \overrightarrow{E_{BD}}$$

dove

$$\overrightarrow{E_{AC}} = \overrightarrow{E_A} + \overrightarrow{E_C}$$

$$\overrightarrow{E_{BD}} = \overrightarrow{E_B} + \overrightarrow{E_D}$$

I moduli dei soprastanti campi elettrici componenti sono:

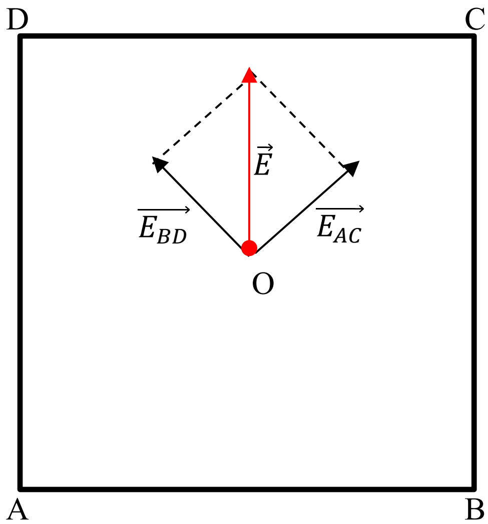
$$\left|\overrightarrow{E_{AC}}\right| = \left|\overrightarrow{E_A} + \overrightarrow{E_C}\right| = \left|\overrightarrow{E_A}\right| - \left|\overrightarrow{E_C}\right| = k\frac{5 \cdot 10^{-9}}{2}$$

$$\left|\overrightarrow{E_{BD}}\right| = \left|\overrightarrow{E_B} + \overrightarrow{E_D}\right| = \left|\overrightarrow{E_B}\right| + \left|\overrightarrow{E_D}\right| = k\frac{5 \cdot 10^{-9}}{2}$$

Il campo elettrico finale ha modulo:

$$\left|\vec{E}\right| = \left|\overrightarrow{E_{AC}} + \overrightarrow{E_{BD}}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{E_{AC}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{E_{BD}}\right|^2} = k\frac{5\sqrt{2} \cdot 10^{-9}}{2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5\sqrt{2} \cdot 10^{-9}}{2} = \frac{45\sqrt{2}}{2} \cong 31.8\ \frac{N}{C}$$

Di seguito la rappresentazione del campo elettrico totale.



---

7. Dopo la fase di accelerazione il protone avrà una energia cinetica tale per cui

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V$$

da cui ricaviamo

$$v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$$

Eguagliando la forza centripeta che tratiene il protone nella traiettoria circolare con la forza di Lorentz si ha:

$$\frac{mv^2}{r} = Bqv$$

da cui ricaviamo

$$B = \frac{mv}{qr}$$

Quindi combinando le equazioni soprastanti si ha:

$$B = \frac{mv}{qr} = \frac{m\sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}}{qr} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2m\Delta V}{q}}$$

Nel caso in esame la traiettoria circolare ha raggio $r = \sqrt{2}$ pertanto sostituendo i valori si ricava:

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2 \cdot (1.673 \cdot 10^{-23}) \cdot 400}{1.602 \cdot 10^{-19}}} \cong 2.04 \cdot 10^{-3}\, T = 2.04\, mT$$

---

8. Utilizzando l'equazione di Planck si ottiene l'energia di un fotone di frequenza $7{,}80 \cdot 10^{14}$ Hz:

$$E = hf = 6.626 \cdot 10^{-34} \cdot 7.80 \cdot 10^{14} = 5.17 \cdot 10^{-19} J$$

I 3 materiali indicati hanno un lavoro di estrazione, espresso in Joule, pari a:

Materiale	**Lavoro di estrazione**
Argento	$4.8 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} = 7.69 \cdot 10^{-19}\, J$
Cesio	$4.8 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} = 2.88 \cdot 10^{-19}\, J$
Platino	$4.8 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} = 8.49 \cdot 10^{-19}\, J$

L'unico materiale che ha un lavoro di estrazione inferiore all'energia del fotone è il cesio.

Sfruttando la legge di Einstein relativa all'effetto fotoelettrico che fornisce l'energia cinetica massima di un fotoelettrone si ha:

$$\frac{1}{2} m v_{max}^2 = hf - W_e$$

da cui ricaviamo:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2(hf - W_e)}{m}} = \sqrt{\frac{2(5.17 \cdot 10^{-19} - 2.88 \cdot 10^{-19})}{9.109 \cdot 10^{-31}}} = 7.09 \cdot 10^5\, \frac{m}{s}$$
