PROBLEMA 1

Punto 1

La funzione $g(x) = (ax + b)e^{2x-x^2}$ ha $y = 0$ come asintoto orizzontale destro e sinistro in quanto

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$$

La derivata della funzione $g(x) = (ax + b)e^{2x-x^2}$ è pari a:

$$g'(x) = ae^{2x-x^2} + (ax + b)(2 - 2x)e^{2x-x^2} =$$
$$= e^{2x-x^2}[-2ax^2 + 2x(a - b) + a + 2b]$$

La derivata prima è positiva se:

$$-2ax^2 + 2x(a - b) + a + 2b > 0$$

L'equazione

$$2ax^2 - 2x(a - b) - (a + 2b) = 0$$

ha 2 soluzioni reali e distinte in quanto il determinante è esprimibile come somma di 2 quadrati:

$$(a - b)^2 + 2a(a + 2b) = 3a^2 + 2ab + b^2 = 2a^2 + (a + b)^2$$

di conseguenza la funzione presenterà sempre un massimo e minimo relativo e, visto che $y = 0$ è asintoto orizzontale destro e sinistro, tali estremi relativi sono anche assoluti.

Le due funzioni si intersecano nel punto (2,1) se:

$$\begin{cases} 4a - 2 + b = 1 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Punto 2

La funzione $f(x) = x^2 - x - 1$ è una parabola con concavità verso l'alto e vertice in $V = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$.

La funzione $g(x) = (x - 1)e^{2x-x^2}$ è definita in R, è positiva per $x > 1$, non ha asintoti verticali ed ha $y = 0$ come asintoto orizzontale.

La derivata prima è

$$g'(x) = e^{2x-x^2}(-2x^2 + 4x - 1)$$

ed è positiva per $\frac{2-\sqrt{2}}{2} < x < \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ pertanto la funzione ha un minimo all'ascissa $x_m = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ed un massimo all'ascissa $x_M = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

I punti di minimo e massimo sono:

$$m\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2e}}{2}\right), M\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2e}}{2}\right)$$

La derivata seconda è

$$g''(x) = 2e^{2x-x^2}(x-1)(2x^2 - 4x - 1)$$

pertanto ci sono 3 flessi alle ascisse:

$$x = \frac{2-\sqrt{6}}{2}, x = 1, x = \frac{2+\sqrt{6}}{2}.$$

I punti di flesso sono:

$$F_1\left(\frac{2-\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6e}}{2e}\right), F_2(1,0), F_3\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6e}}{2e}\right)$$

In particolare il punto di flesso $F_2(1,0)$ è centro di simmetria; infatti applicando le equazioni di simmetria si ha:

$$\begin{cases} X = 2 - x \\ Y = -y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 - X \\ y = -Y \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow -Y = (2 - X - 1)e^{2(2-X)-(2-X)^2} \rightarrow Y = (X-1)e^{2X-X^2}$$

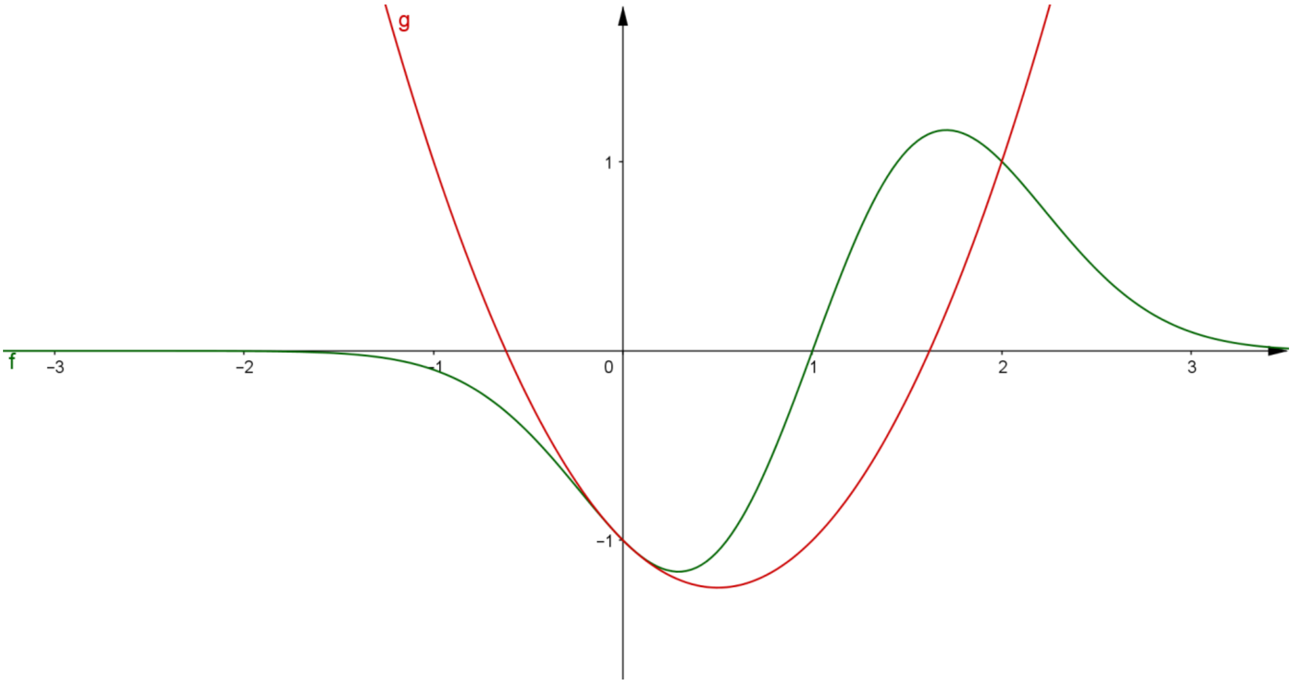
La tangente alla funzione $f(x) = x^2 - x - 1$ in $(0, -1)$ ha equazione

$$y = f'(0)x - 1 = [2x-1]_{x=0} \cdot x - 1 = -x - 1$$

La tangente alla funzione $g(x) = (x-1)e^{2x-x^2}$ in $(0, -1)$ ha equazione

$$y = g'(0)x - 1 = \left[e^{2x-x^2}(-2x^2 + 4x - 1)\right]_{x=0} \cdot x - 1 = -x - 1$$

Pertanto le due funzioni, avendo stessa tangente nel punto $(0,-1)$, sono tangenti in esso.



L'area compresa tra i due grafici è pari a:

$$A(S) = \int_0^2 \left[(x-1)e^{2x-x^2} - (x^2 - x - 1)\right]dx$$

$$= \left[-\frac{e^{2x-x^2}}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 = -\frac{1}{2} - \frac{8}{3} + 2 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$$

Punto 3

La circuitazione del campo magnetico per il teorema di Ampere è pari a:

$$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 \sum_k i_k$$

dove nella sommatoria vanno considerate solo ed esclusivamente le correnti concatenate con γ.

Considerando che

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{e^{\frac{3}{4}}}{2} \cong 1.06 > 1$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4} > -\frac{1}{2}$$

deduciamo che solo le correnti i_1, i_2 sono concatenate a γ pertanto, considerando un orientamento antiorario di γ si ha:

$$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \mu_0(-2 + i_2)$$

La circuitazione è:

- negativa se i_2 è entrante oppure uscente con $0\ A < i_2 < 2\ A$;
- nulla se i_2 è uscente e vale $i_2 = 2\ A$;
- positiva se i_2 è uscente ed è $i_2 > 2\ A$

Punto 4

Per la legge di Faraday-Neumann si ha:

$$f_{em} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Considerando $B(t) = B\cos\omega t$ si ha:

$$\Phi(\vec{B}) = B(t)S = B\,S\cos\omega t$$

$$f_{em} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = B\,S\omega\sin\omega t$$

Il valore della forza elettromotrice è massimo quando $\sin\omega t = 1$ e vale

$$f_{em}(max) = BS\omega$$

Poichè $f_{em}(max) = i_{max}R$ si ha:

$$BS\omega = i_{max}R \rightarrow \omega = \frac{i_{max}R}{BS} = \frac{5\cdot 10^{-3}\cdot 0.2}{1.5\cdot 10^{-2}\cdot \frac{4}{3}} = 0.05\ \frac{rad}{s}$$

PROBLEMA 2

Punto 1

Le dimensioni di a e k sono rispettivamente:

$$[a] = s$$

$$[k] = \frac{T \cdot s^2}{m}$$

La presenza di d.d.p variabile nel tempo comporta la presenza di un campo elettrico variabile nel tempo e di conseguenza di cun campo magnetico variabile nel tempo per via della IV equazione di Maxwell:

$$\Gamma_C(\vec{B}) = \mu_0 \left[i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right]$$

Le direzioni di E e B sono perpendicolari nei punti interni al condensatore.

Punto 2

La circuitazione del campo magnetico è pari a:

$$\Gamma_C(\vec{B}) = \int \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = |\vec{B}| \int \overrightarrow{dl} = |\vec{B}| \cdot 2\pi r$$

Sostituendo nella IV equazione di Maxwell e considerando che la corrente nel condensatore è nulla si ha:

$$|\vec{B}| \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \to \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \frac{2\pi r}{\mu_0 \varepsilon_0} |\vec{B}| = \frac{2\pi r}{\mu_0 \varepsilon_0} \cdot \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} r =$$

$$= \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \cdot \frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}$$

Di conseguenza si ha:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \int \frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} dt = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \int \left[t \cdot (t^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} \right] dt =$$

$$= \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \int \left[\frac{2t \cdot (t^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}}}{2} \right] dt =$$

$$= \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \left[\frac{(t^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}+1}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} + K \right] = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{(t^2 + a^2)}} + K \right]$$

Imponendo che il flusso sia nullo all'istante t=0 si ricava

$$K = \frac{1}{a}$$

ovvero

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{(t^2 + a^2)}} + \frac{1}{a} \right]$$

La d.d.p è pari a:

$$V(t) = E(t) \cdot d$$

Il campo elettrico è legato al flusso del campo elettrico lungo una superficie S dalla formula:

$$\Phi(E, S) = \int \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = |\vec{E}| \int \overrightarrow{dS} = |\vec{E}| \cdot \pi r^2$$

pertanto

$$V(t) = E(t) \cdot d = \frac{\Phi(E, S)}{\pi r^2} \cdot d = \frac{d}{\pi r^2} \cdot \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{(t^2 + a^2)}} + \frac{1}{a} \right] =$$

$$= \frac{2kd}{\mu_0 \varepsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{(t^2 + a^2)}} + \frac{1}{a} \right]$$

Al trascorrere del tempo $|\vec{B}|$ tende a zero in quanto è un infinitesimo di ordine 2, infatti per $t \to +\infty$

$$\left|\vec{B}\right| \approx \frac{t}{\sqrt{(t^2)^3}} = \frac{1}{t^2}$$

Ciò lo si deduce anche fisicamente dal fatto che per lunghi tempi la d.d.p è costante in quanto tende a $\frac{2kd}{a\mu_0\varepsilon_0}$, di conseguenza il campo elettrico è costante e dalla IV legge di Maxwell ricaviamo che in queste condizioni il campo magnetico è nullo.

Punto 3

Una primitiva di $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$ è :

$$F(t) = \int f(t)dt = \int \left[-\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\right]dt = \int \left[-t \cdot (t^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}\right]dt =$$

$$= \int \left[\frac{-2t \cdot (t^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}}{2}\right]dt = \frac{-(t^2+a^2)^{-\frac{3}{2}+1}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(t^2+a^2)}} + K$$

La prmiitiva passante per l'origine è quella per cui $K + \frac{1}{a} = 0 \rightarrow K = -\frac{1}{a}$

Quindi

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{(t^2+a^2)}} - \frac{1}{a}$$

La funzione $F(t)$ è definita in R, interseca l'asse delle ascisse ed ordinate in (0,0), non è mai positiva, è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate in quanto è pari, non presenta asintoti verticali, presenta $y = -\frac{1}{a}$ come asintoto orizzontale destro e sinistro, ha un massimo relativo ed assoluto in (0,0) in quanto la sua derivata prima $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$ è positiva per $t < 0$ e negativa per $t > 0$.

La sua derivata seconda è

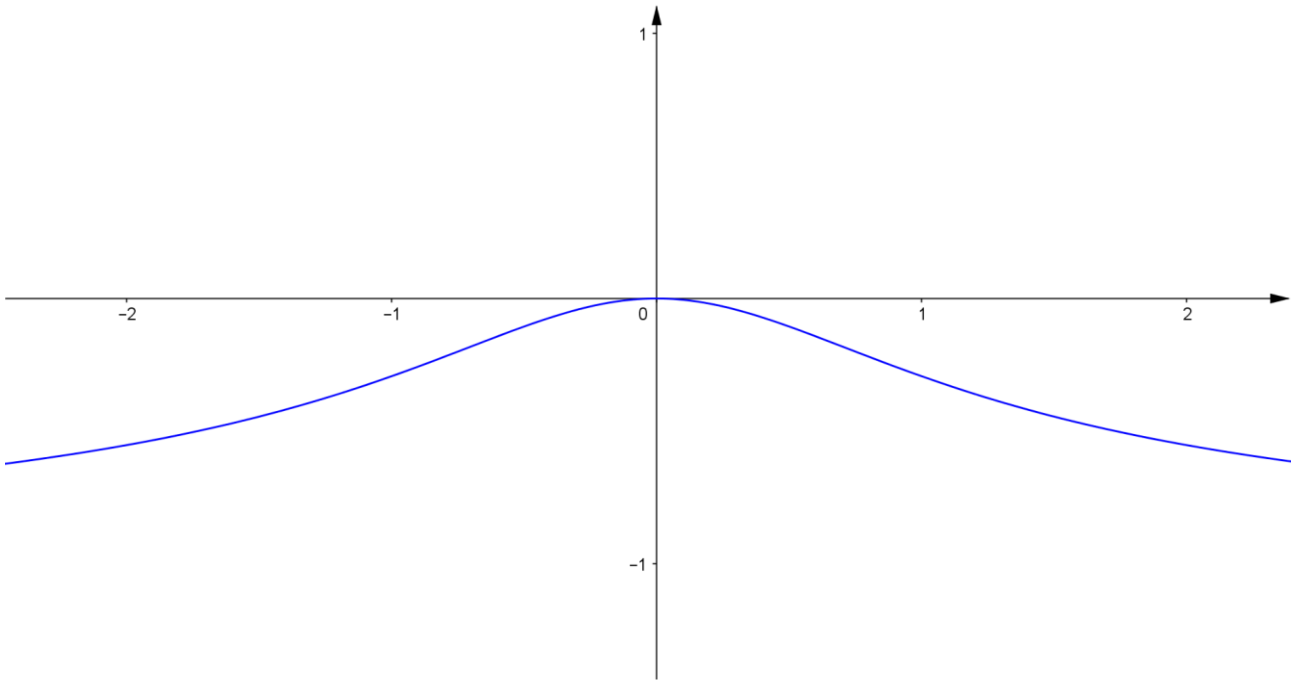
$$F''(t) = -\frac{\sqrt{(t^2+a^2)^3} + t\frac{3}{2}\cdot 2t\cdot\sqrt{(t^2+a^2)}}{(t^2+a^2)^3}$$
$$= \frac{\sqrt{(t^2+a^2)}(3t^2-t^2-a^2)}{(t^2+a^2)^3} = \frac{(2t^2-a^2)}{\sqrt{(t^2+a^2)^5}}$$

e si annulla per $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$ che sono ascisse di flessi.

Le pendenze nelle ascisse di flesso sono:

$$F'\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \left[-\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\right]_{t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a} = \mp\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{3}{2}a^3\sqrt{\frac{3}{2}}}$$
$$= \mp\frac{\sqrt{2}}{3a^2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \mp\frac{2\sqrt{3}}{9a^2}$$

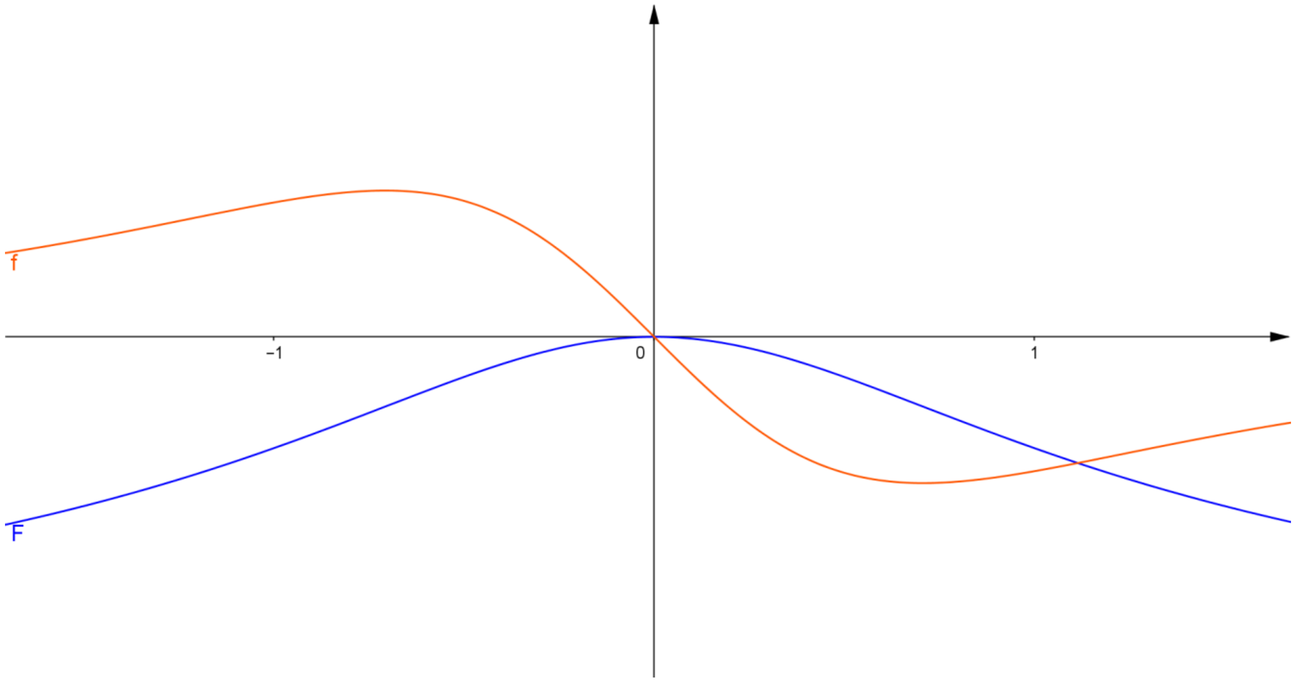
Di seguito il grafico per $a = 1$.



Punto 4

Le ascisse dei punti di flesso di F rappresentano ascisse di estremi relativi per f, così come il punto di massimo per F rappresenta un punto di flesso per f. La funzione f è dispari in quanto la funzione F è pari, inoltre la funzione f è positiva laddove F è monotona crescente ovvero per $t < 0$ ed è negativa laddove F è monotona decrescente ovvero per $t > 0$.

Di seguito il grafico di F ed f nel medesimo sistema di riferimento cartesiano.



L'area richiesta è pari a:

$$A = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} f(t)dt = 2\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{0} f(t)dt = 2\left[\frac{1}{\sqrt{(t^2+a^2)}} - \frac{1}{a}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{0} =$$

$$= \frac{2}{a}\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{6-2\sqrt{6}}{3a}$$

In generale l'integrale $\int_{-b}^{b} f(t)dt$ è nullo in quanto si tratta di integrale di una funzione dispari in un intervallo simmetrico.

QUESITI

Quesito 1

Le rette $x = \pm 3$ sono asintoti verticali se si annulla il denominatore di f ovvero se $d = -9$.

La retta $y = 5$ è asintoto orizzontale se il polinomio $p(x)$ è di secondo grado esprimibile come $p(x) = 5x^2 + bx + c$.

Il grafico di f passa per $x = 0$ e $x = \frac{12}{5}$ se $c = 0$ e $b = -12$.

Quindi l'espressione di f è :

$$f(x) = \frac{5x^2 - 12x}{x^2 - 9}$$

La derivata di $f(x)$ è:

$$f'(x) = \frac{6(2x^2 - 15x + 18)}{(x^2 - 9)^2} = \frac{6(x - 6)(2x - 3)}{(x^2 - 9)^2}$$

Tale derivata è positiva in $(6, +\infty)$ e negativa in $(-\infty, -3) \cup \left(-3, \frac{3}{2}\right)$, di conseguenza $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ è punto di massimo e $(6,4)$ è punto di minimo.

Quesito 2

La funzione $g(x)$ è esprimibile come:

$$g(x) = x(1 + x^2 + x^4 + \cdots \cdots + x^{2018})$$

Il fattore $(1 + x^2 + x^4 + \cdots \cdots + x^{2018})$ è sempre positivo in quanto somma di numeri positivi pertanto $g(x)$ si annulla esclusivamente in $x = 0$.

Il limite richiesto è nullo in quanto 1.1^x è un infinito di ordine superiore rispetto a x^n.

Quesito 3

Sia L lo spigolo della base quadtrada ed h l'altezza del parallelepipedo, la somma degli spigoli è:

$$s = 8L + 4h$$

La superficie totale è:

$$S_T = 2L^2 + 4Lh$$

Imponendo che tale superficie sia pari a S si deduce:

$$2L^2 + 4Lh = S \rightarrow h = \frac{S - 2L^2}{4L}$$

La somma degli spigoli è quindi:

$$s(L) = 8L + \frac{S - 2L^2}{L} = \frac{S + 6L^2}{L}$$

La derivata prima è pari a:

$$s'(L) = \frac{12L^2 - S - 6L^2}{L^2} = \frac{6L^2 - S}{L^2}$$

ed è negativa in $\left(0, \sqrt{\frac{S}{6}}\right)$ e positiva in $\left(\sqrt{\frac{S}{6}}, +\infty\right)$ pertanto la somma degli spigoli è minima per $L = \sqrt{\frac{S}{6}}$ e vale

$$s_{min} = 8\sqrt{\frac{S}{6}} + \frac{S - 2\frac{S}{6}}{\sqrt{\frac{S}{6}}} = 8\sqrt{\frac{S}{6}} + \sqrt{\frac{S}{6}} \cdot \frac{2}{3} S \cdot \frac{6}{S} = 12\sqrt{\frac{S}{6}}$$

Quesito 4

Detto $P(x, y, z)$, il luogo geometrico è tale per cui:

$$\overline{PA}^2 = 2\overline{PB}^2$$

ovvero:

$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2(x+2)^2 + 2(y-2)^2 + 2(z-1)^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0$$

che è l'equazione di una sfera.

Il punto $T(-10,8,7)$ appartiene alla sfera in quanto sostituendo si ha:

$$100 + 64 + 49 - 120 - 64 - 42 + 13 = 0.$$

Il centro della sfera è $C = (-6,4,3)$, pertanto i parametri direttori sono:

$$T - C = (-4,4,4)$$

Il piano tangente ha equazione quindi

$$-4x + 4y + 4z + d = 0$$

Imponendo il passaggio per T si ottiene:

$$40 + 32 + 28 + d = 0 \rightarrow d = -100$$

Il piano tangente ha di conseguenza equazione:

$$x - y - z + 25 = 0$$

Quesito 5

- Le quaterne che garantiscono che, lanciando 4 dadi la somma dei numeri non superi 5, sono:

  $$(1,1,1,1), (2,1,1,1), (1,2,1,1), (1,1,2,1), (1,1,1,2)$$

  pertanto la probabilità è:

  $$p = \frac{5}{6^4} = \frac{5}{1296}$$

- Il prodotto è multiplo di 3 se tra i 4 numeri c'è almeno un 3 o un 6, pertanto la probabilità richiesta è pari al complemento a 1 della probabilità che tra i 4 numeri estratti non ci sia nè il 3 nè il 6 ovvero che per ognuno dei 4 dadi, tra i 6 risultati possibili, non siano estratti nè il 3 nè il 6:

  $$p = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^4 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$$

- La probabilità che il massimo numero sia 4 è pari alla somma delle seguenti probabilità componenti:
  - Escono tutti 4
  - Escono tre 4 e un numero minore di 4 (ovvero 1, 2 o 3)
  - Escono due 4 e due numeri minori di 4 (ovvero 1, 2 o 3)
  - Esce un 4 e tre numeri minori di 4 (ovvero 1, 2 o 3)

  pertanto

$$p = \binom{4}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4 + \binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{3}{6}\right) + \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2 + \binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^3 =$$
$$= \frac{1}{1296} + \frac{12}{1296} + \frac{54}{1296} + \frac{108}{1296} = \frac{175}{1296}$$

Quesito 6

- Nell'intervallo $[0\,ms, 3\,ms]$ si ha una variazione di campo magnetico pari a $\Delta B = (-0.20 - 0.00)mT = -0.20mT$ cui corrisponde una variazione pari a $\Delta\Phi(\vec{B}) = \Delta B \cdot A = (-0.20 \cdot 10^{-3}) \cdot (30 \cdot 10^{-4}) = -6.0 \cdot 10^{-7}Wb$.
  Dalla legge di Faraday-Neumann si deduce che:
  $$f_{em} = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} \rightarrow$$
  $$\rightarrow i = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} = -\frac{1}{4.0 \cdot 10^{-3}}\left(\frac{-6.0 \cdot 10^{-7}}{3.0 \cdot 10^{-3}}\right) = 5.0 \cdot 10^{-2}A$$
- Nell'intervallo $[3\,ms, 5\,ms]$ si ha una variazione di campo magnetico pari a $\Delta B = (0.20 + 0.20)mT = 0.40mT$ cui corrisponde una variazione pari a $\Delta\Phi(\vec{B}) = \Delta B \cdot A = (0.40 \cdot 10^{-3}) \cdot (30 \cdot 10^{-4}) = 12.0 \cdot 10^{-7}Wb$.
  Dalla legge di Faraday-Neumann si deduce che:
  $$f_{em} = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} \rightarrow$$
  $$\rightarrow i = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} = -\frac{1}{4.0 \cdot 10^{-3}}\left(\frac{12.0 \cdot 10^{-7}}{2.0 \cdot 10^{-3}}\right) = -15.0 \cdot 10^{-2}A$$
- Nell'intervallo $[5\,ms, 10\,ms]$ si ha una variazione di campo magnetico pari a $\Delta B = (0.0 - 0.20)mT = -0.20mT$ cui corrisponde una variazione pari a $\Delta\Phi(\vec{B}) = \Delta B \cdot A = (-0.20 \cdot 10^{-3}) \cdot (30 \cdot 10^{-4}) = -6.0 \cdot 10^{-7}Wb$.
  Dalla legge di Faraday-Neumann si deduce che:

$$f_{em} = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} \rightarrow$$

$$\rightarrow i = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} = -\frac{1}{4.0 \cdot 10^{-3}}\left(\frac{-6.0 \cdot 10^{-7}}{5.0 \cdot 10^{-3}}\right) = 3.0 \cdot 10^{-2} A$$

Quesito 7

La velocità media nel sistema di riferimento del laboratorio è

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0.25}{2 \cdot 10^{-9}} = 1.25 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = \frac{5}{12} c$$

La velocità media vista dalla navicella, applicando le equazioni di Einstein, è pari a:

$$v'_m = \frac{v_m - v}{1 - \frac{v_m v}{c^2}} = \frac{\frac{5}{12}c - \frac{4}{5}c}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{23}{40} c \cong -1.7 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Il coefficiente di dilatazione nel passaggio da S ad S' è pari a:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{5}{3}$$

pertanto applicando le trasformazioni di Lorentz si ottiene:

$$\begin{cases} x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2) \\ t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'_2 = \frac{5}{3}\left[0.25 - \frac{4}{5}c \cdot 2.0 \cdot 10^{-9}\right] \\ t'_2 = \frac{5}{3}\left[2.0 \cdot 10^{-9} - \frac{\frac{4}{5}c \cdot 0.25}{c^2}\right] \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x'_2 = -0.38m \\ t'_2 = 2.2 \cdot 10^{-9} s \end{cases}$$

Quindi la distanza ed il tempo misurati in S' sono pari rispettivamente a

$$|x'_2| = 0.38m$$

$$t'_2 = 2.2 \cdot 10^{-9} s = 2.2ns$$

Quesito 8

Il vettore velocità del protone è la somma di una componente perpendicolare al campo magnetico e di una componente parallela al campo magnetico.

Per la legge di Lorentz si ha:

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$$

il cui modulo è

$$F = e(v \sin\theta)B = ev_{\perp}B$$

Applicando la seconda legge di Newton e ricordando l'accelerazione centripeta si ricava:

$$F = m_p a = m_p \frac{v_{\perp}^2}{r}$$

Eguagliando le due formule si deduce:

$$ev_{\perp}B = m_p \frac{v_{\perp}^2}{r} \rightarrow v_{\perp} = \frac{reB}{m_p}$$

Il periodo della componente circolare perpendicolare al campo magnetico è

$$T = \frac{2\pi r}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m_p}{eB}$$

La componente rettilinea uniforme parallela al campo magnetico è tale per cui

$$v_{\parallel} = v\cos\theta = \frac{\Delta x}{T} = \frac{\Delta x eB}{2\pi m_p}$$

La velocità del protone è quindi pari a:

$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2} = \frac{eB}{m_p}\sqrt{r^2 + \left(\frac{\Delta x}{2\pi}\right)^2} =$$

$$= \frac{(1.602 \cdot 10^{-19}) \cdot (1.0 \cdot 10^{-3})}{1.673 \cdot 10^{-27}} \cdot \sqrt{(10.5 \cdot 10^{-2})^2 + \left(\frac{38.1 \cdot 10^{-2}}{2\pi}\right)^2} =$$

$$= 1.16 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$$

Ora dalle formule delle componenti perpendicolari e parallele della velocità del protone si ricava:

$$\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = \tan\theta = \frac{\frac{reB}{m_p}}{\frac{\Delta x eB}{2\pi m_p}} = \frac{2\pi r}{\Delta x} \rightarrow$$

$$\rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\pi r}{\Delta x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\pi \cdot 0.105}{0.381}\right) = \tan^{-1}(1.73) \cong 60°$$