

Appunti di Teoria degli Infiniti

Pierandrea Vergallo

pierandrea.vergallo@libero.it

Studente di matematica presso l'Università del Salento
Fondatore del Progetto #AltraMatematica

Abstract. *Agli inizi del Novecento si fece strada tra la comunità di Matematici, Logici e Filosofi la possibilità di creare una Teoria autonoma e coerente riguardante l'Infinito Matematico. Personalità come quelle di G. Cantor, B. Russell e R. Dedekind fanno da protagonisti in una storia ricca di curiosità ed interessante agli occhi dei moderni studiosi e degli appassionati di matematica. La conoscenza e lo studio di questi argomenti, pur non avendo un grande seguito attualmente, risulta di facile comprensione e permette di assimilare alcuni concetti matematici ritenuti spesso scontati e insiti tra gli addetti ai lavori. Resta, infine, aperta una via di analisi della Teoria tutta filosofica, di cui si fa qualche volta cenno negli scritti dei protagonisti.*

Il concetto primitivo di insieme.

Una delle più grandi questioni umane, ormai quasi dimenticata, riguardo l'aspetto più filosofico ed astratto della Matematica è stata indiscutibilmente la ricerca di una definizione concreta e formale del concetto di insieme. Non sembra, a primo acchito, una trattazione particolarmente complessa, ne tantomeno che necessiti grandi basi scientifiche o filosofiche per poterne parlare. In realtà, ogni qual volta ci si imbatte in una sorta di definizione (seppur banale) dell'idea di insieme si cade in una serie di sinonimi e sottigliezze che nel formalismo matematico sono ritenute sconvenienti. Succede, infatti, che alcuni enti non possano essere definiti in maniera rigorosa e puntuale, a causa di inconsistenze soprattutto di tipo filosofico. È proprio questo il motivo principale per cui la parola "insieme" difficilmente potrà essere definita: essa non si poggia su concetti pregressi, in quanto essa stessa è un concetto di base. L'idea di insieme viene, pertanto, definita primitiva. Alcuni docenti però ritengono necessario introdurre la definizione di insieme e, a tal proposito, si è scelta come più corretta quella data dal filosofo e matematico *Bertand Russell* (1872-1970):

*Un insieme è una collezione di oggetti*¹

Nonostante anche qui sia ben chiaro quale fosse il problema a cui si faceva riferimento in precedenza, si è considerata questa brevissima descrizione molto intuitiva e pratica. Ad ogni modo, nel concreto, la questione è stata più che risolta in quanto il concetto primitivo di insieme sembra insito nell'uomo o comunque chiaramente identificabile tramite banali esempi.

Dopo aver definito, allora, questi grandi contenitori di oggetti che sono gli insiemi ci si pone un ulteriore quesito: come li riempiamo? Sembra anche questa una domanda molto banale, ma formalmente ammette risposte tutt'altro che scontate. Una delle più corrette e, a mio parere, interessanti accenna all'utilizzo di trattazioni prettamente filosofiche come le *eidōs* platoniche. Infatti, si considerano tutti i possibili elementi di un insieme come insiti (quasi *nell'Iperurano*) e predefiniti dotati di specifici assiomi, per tale ragione vengono indicati con il termine *urelementi*.

Per indicare, infine, l'insieme composto da tutti i possibili insiemi e, quindi, da tutti i possibili urelementi utilizziamo il simbolo \mathcal{U} e lo denominiamo *insieme universo*. Dove:

$$\mathcal{U} := \{x \mid x = x\}^2$$

Richiami al concetto di funzione.

Se l'insieme rappresenta la base, il concetto primitivo e insito filosoficamente nell'uomo, la funzione può essere rappresentata come una relazione particolare che permette a due insiemi di "interagire". La definizione, in questo caso, esiste ed è chiara: Siano X, Y insiemi.

Definizione. Una funzione f da X in Y è una relazione che lega ad ogni elemento di X uno ed un solo elemento di Y . In simboli:

$$f: X \rightarrow Y \text{ funzione} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in X \exists! y \in Y \text{ t.c. } f(x) = y$$

Specifichiamo due ulteriori proprietà delle funzioni:

$$\begin{aligned} f: X \rightarrow Y \text{ si dice iniettiva se } & \forall a, b \in X \ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b) \\ f: X \rightarrow Y \text{ si dice suriettiva se } & \forall y \in Y \exists x \in X \mid f(x) = y \end{aligned}$$

¹ A tal proposito A. N. WHITEHEAD, B. RUSSELL, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, 1910.

² Cioè l'insieme degli oggetti uguali a sé stessi (quindi tutti). Cfr. G. CANTOR, *La formazione della teoria degli insiemi (scritti 1872-1899)*, a cura di G. RIGAMONTI, note di E. ZERMELO, Mimesis Edizione, 2012. L'autore proverà in seguito che l'insieme Universo non è consistente e diviene, quindi, logicamente scorretto parlarne.

Infine, una funzione che sia al contempo iniettiva e suriettiva la chiameremo biettiva o *funzione equipotenza*. Questo secondo termine ci descrive appieno il funzionamento di una biezione: essa lega a tutti gli elementi di un insieme un solo elemento dell'altro insieme e viceversa. Ancora più chiaramente possiamo affermare che c'è una “*relazione uno-a-uno*” tra gli elementi degli insiemi.³

Trovare una biezione tra due insiemi significa, quindi, poter dire che questi sono equipotenti, cioè che hanno lo stesso numero di elementi e pertanto una stessa potenza. Seppur questo non sembra essere un risultato particolarmente interessante o utile, in realtà rappresenta la chiave di lettura dell'intera Teoria degli Infiniti a cui faremo cenno in questa breve lezione. La funzione equipotenza ci permetterà, infatti, di “soppesare” o il numero esatto di elementi di un insieme o di poter confrontare insiemi differenti. Il senso logico comune ci abbandona totalmente trattando l'infinito e diventa una falsa guida per comprenderne la natura effettiva

Definizione di insieme finito e insieme infinito.

Una prima netta distinzione tra insiemi può essere effettuata suddividendo gli stessi in due categorie:

1. Insiemi finiti
2. Insiemi infiniti

Curiosamente, per centinaia di anni il concetto di infinito ha creato non pochi problemi agli scienziati e ai filosofi in quanto la sua stessa esistenza formale era ritenuta incerta. Questa concezione potrebbe essere riassunta con il curioso modo che sceglie Ludwig Wittgenstein:

*“Ti senti girar la testa se puoi mostrare
che ci sono numeri più grandi dell'infinito;
questa potrebbe anzi essere la ragione principale per cui sono stati inventati”*⁴

Nel 1919 Bertand Russell risolve la questione affermando: “Non si può dir che esista in realtà in qualsiasi insieme infinito nel mondo. L'ipotesi che esista è quello che noi chiamiamo l'assioma dell'infinito”^[1], che, per i più curiosi, è enunciato in Teoria degli Insiemi in questa forma:

$$\exists N : \emptyset \in N \wedge (\forall a: a \in N \rightarrow a \cup \{a\} \in N)$$

La scelta di indicare questo insieme proprio con la lettera N non è del tutto casuale. Prima di Russell (e di molti altri filosofi che hanno “lottato” per dare un'effettiva valenza all'infinito) valevano, infatti, le seguenti definizioni:

³ Cit. B. RUSSELL, *Introduzione alla filosofia matematica*, Newton Compton editori, Ristampa Gennaio 2012, p.58.

⁴ Cit. L. WITTEGENSTEIN, *Lezioni sui fondamenti della matematica*, A cura di C. DIAMOND, Universale Bollati Boringheri Editore, 2002.

Definizione. Un insieme A si dice finito se esiste un numero naturale n ed una funzione biettiva da A in $\{1, 2, \dots, n\}$. Viceversa, un insieme B si dice infinito se non è finito.

Anche in questa definizione è evidente la stretta dipendenza dell'infinito dal finito, ed in particolare, da un sottoinsieme di numeri naturali (ritenuto l'emblema del finito per eccellenza). Dagli inizi del 1900 si diffonde, però, una definizione che permette al concetto di infinito una piena autonomia e, invece, una dipendenza indiretta del finito dall'infinito. Questa è anche nota come definizione di insieme *Dedekind-Infinito*, dal nome del matematico che l'ha utilizzata per primo:

Definizione. Un insieme A si dice infinito se esiste una funzione biettiva da A in un suo sottoinsieme proprio. O, analogamente, se esiste una funzione iniettiva ma non suriettiva (detta iniettiva propria) da A in sé.

Pur non essendo di facilissima “digestione”, questa rappresenta a mio parere l'inaugurazione di una nuova teoria che metta fine a tutte le incertezze e le inesattezze formali relative all'idea filosofica e matematica dell'infinito. Si pensi che l'illustre analista David Hilbert affermò durante un discorso pronunciato nel Giugno 1925 davanti al Congresso della Società Matematica della Vestfalia:

*“Il chiarimento definitivo della natura dell'infinito,
invece di attenere semplicemente all'ambito degli interessi scientifici specializzati,
è necessario per la dignità stessa dell'intelletto umano”*

e aggiunge:

*“l'infinito è qualcosa di irreperibile,
quali che siano le esperienze, le osservazioni e il sapere cui si fa ricorso.
[...] In breve: può il pensiero essere tanto lontano dalla realtà?”⁵*

Già nel 1638, infatti, Galileo Galilei in “Dialoghi su due nuove scienze” aveva provato quello che secondo lui rappresentava un paradosso logico-matematico, tanto che egli stesso lo indicò con il titolo “Il paradosso dei quadrati”. Egli sfruttò l'idea (a noi già nota in questa lezione) di funzione biettiva come strumento per comparare due insiemi e osservò che l'insieme dei numeri naturali e quello formato dai quadrati di tutti i naturali avevano la stessa grandezza, erano legati da una semplice funzione equipotenza:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2, \quad n \mapsto n^2$$

dove con \mathbb{N}^2 indichiamo l'insieme dei quadrati perfetti.

⁵ Cit. D. HILBERT, *Sull'infinito*, Lit Edizioni, 2013.

Il risultato paradossale stava nell'aver trovato un sottoinsieme proprio tanto grande quanto l'insieme che lo contiene. Con questo era venuto meno uno degli Assiomi posti da Euclide alla base della sua Geometria in *Gli Elementi*, in particolare:

Il tutto è più grande della parte

Alla luce, però, della definizione di Dedekind a noi questo non sembra più un assurdo, bensì una prova dell'infinità dell'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} . Allo stesso modo si sarebbero potuti utilizzare sottoinsiemi dei naturali come quello dei multipli di 5, quello dei numeri pari, dei cubi e moltissimi altri. Ne ricaviamo che:

Teorema.

\mathbb{N} è infinito.

Curiose equipotenze.

La prova dell'equipotenza esistente tra i numeri naturali e i numeri pari, o quelli dispari, o anche i quadrati di Galilei ha indotto alcuni studiosi ad approfondire l'argomento. In particolare, il matematico tedesco Georg Cantor (1845-1918) può ritenersi il padre della moderna Teoria degli Insiemi e, con essa, della nascita di una Teoria formale dell'Infinito. Egli, però, si dedicò allo studio dell'infinito a partire da un articolo apparentemente distante dal nostro interesse intitolato "Sulla estensione di un teorema della teoria delle serie trigonometriche" del 1872 in cui espone alcuni risultati riguardanti *punti limite* e *insiemi derivati infinite volte*. Già nel 1883 con la pubblicazione di *Fondamenti di una teoria generale delle molteplicità* afferma:

*"Per 'molteplicità' o 'insieme' intendo ...
in generale, ogni Molti che si possa pensare come Uno,
ovvero ogni classe di elementi determinati che possa essere unita in un tutto"*⁶

Da qui la vecchia teoria lascia strada ad una nuova Teoria degli Insiemi in cui l'infinito ne fa da padrone.

Abbiamo trattato il caso delle equipotenze con i naturali e i suoi sottoinsiemi. Ma cosa succederebbe se considerassimo gli insiemi di cui \mathbb{N} è un sottoinsieme proprio? Per esempio, consideriamo i numeri interi. Apparentemente potremmo cadere nella tentazione di pensare che questi non siano nello stesso numero dei naturali ma che, almeno intuitivamente, ne siano il doppio (più uno, lo zero). Eppure vale il seguente risultato:

⁶ G. CANTOR, *La formazione della teoria degli insiemi (scritti 1872-1899)*, a cura di G. RIGAMONTI, note di E. ZERMELO, Mimesis Edizione, 2012.

Teorema.

\mathbb{Z} è equipotente a \mathbb{N}

La dimostrazione intuitiva è semplice, basti pensare di associare ad ogni numero pari un numero positivo e ad ogni numero dispari un numero negativo. Abbiamo, infatti, già osservato che questi due insiemi sono equipotenti a \mathbb{N} singolarmente, quindi permettono la costruzione di un'opportuna biezione tra i due insiemi della tesi.

Si può intuire, però, che la situazione dei numeri razionali non sia proprio così evidente. I numeri razionali, infatti, non sono solo infiniti per “estensione” o per “grandezza”, ma anche per la loro possibilità di dividersi infinitamente. Vale, come è noto, la densità di \mathbb{Q} sulla retta dei numeri reali. Anche per questo caso, il senso non ci è affatto di aiuto. Cantor prova nel 1891 che l'insieme dei numeri razionali e quello dei naturali sono equipotenti. Un risultato, a mio modesto parere, più che sorprendente. Egli utilizza un processo geniale: compila una semplice tabella di frazioni in cui la riga indica il numeratore, mentre la colonna il denominatore, permettendo così di raccogliere tutte le frazioni possibili. Ovviamente questa è una tabella infinita per estensione orizzontale e verticale.

1	1/2	1/3	1/4	1/5
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5
.....				

Poi “sbrogia” questa immensa matassa e grazie alla costruzione di una funzione specifica ordina la tabella in maniera diagonale :

$$1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \dots$$

Questo ordinamento discreto ci permette di assegnare un numero naturale ad ogni elemento della successione, provando che le frazioni sono esattamente tante quanti i numeri naturali. Quindi:

Teorema.

\mathbb{Q} è equipotente a \mathbb{N}

A questo punto il gioco sembrava filare liscio. L'intuito ci avrebbe nuovamente portato a pensare ad una conclusione ovvia: tutti gli insiemi infiniti sono equipotenti tra di loro, basta trovare una funzione biettiva che li leghi. Cantor non si lasciò guidare dal senso e approfondì il discorso con ulteriori Teoremi, incappando in nuove, sorprendenti osservazioni.

Venne provato il seguente teorema:

Teorema.

\mathbb{R} non è equipotente a \mathbb{N} .

La dimostrazione di questo risultato è complessa per poter essere esplicitata formalmente in questa breve lezione, però possiamo descriverne le linee guida. Intanto si prova un lemma interessante:

Lemma

\mathbb{R} è equipotente all'insieme $[0,1]$

Quindi sulla base di questo, assumiamo per assurdo che l'insieme $[0,1]$ è equipotente a quello dei naturali. Allora, sicuramente dovrà esistere una successione di numeri che descriva interamente i valori compresi nell'intervallo. Osserviamo che questi saranno tutti della forma:

$0, \dots$

E che, come già fatto per i numeri razionali, possiamo compilare una lista con tutti gli elementi della successione. Ad esempio:

$$r_1=0.25684..$$

$$r_2=0.36589..$$

$$r_3=0.48955..$$

$$r_4=0.54893..$$

$$r_5=0.61786..$$

$$r_6=0.64821..$$

...

In tal caso consideriamo l'elemento x della successione avente all' i -esima cifra dopo la virgola la i -esima cifra di r_i , costruendo una diagonale nella tabella precedente. Sia, infine, \bar{x} un numero della successione avente all' i -esimo posto un valore diverso rispetto a quello dell' i -esimo posto di x . Questo deve appartenere ancora alla tabella che, ricordiamo, descrive per ipotesi tutti i numeri tra 0 e 1. Ma se \bar{x} fosse nella riga p della tabella, allora $\bar{x} = r_p$ e alla p -esima cifra dopo la virgola avrebbe la p -esima cifra di r_p , da qui l'assurdo. Infatti, l'elemento x generato come sopra ha al p -esimo posto la p -esima cifra di r_p e \bar{x} ha tutte le cifre differenti rispetto a quelle di x . Da qui si ricava che l'intervallo $[0,1]$ ha più elementi dei numeri naturali. E, con ciò, proviamo la nostra tesi.

Ma allora... Quanti infiniti?

Diamo alcune precisazioni. Indichiamo il numero di elementi di un insieme A , finito o infinito, con la seguente notazione:

$$|A|$$

E chiameremo questo valore la cardinalità di un insieme.

Vale, allora che:

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$$

Possiamo osservare, inoltre, che nel caso di insiemi A finiti la cardinalità di questi è sempre pari (coerentemente alla prima definizione di insieme finito) ad un numero naturale. Quindi, $|A|=n$. Per insiemi infiniti il discorso è un po' differente, in quanto abbiamo provato che esistono insiemi infiniti più grandi di \mathbb{N} , come quello dei numeri reali. Quindi abbiamo bisogno di una "unità di misura" nuova. Cantor afferma in una lettera indirizzata all'amico R. Dedekind nel Luglio 1899:

*"[...] sono pervenuto ad una successione ben ordinata di potenze o numeri cardinali transfiniti che chiamo gli 'alephs'"*⁷

Gli alephs sono l'equivalente dei numeri naturali per la cardinalità di insiemi infiniti; questi sono presi dall'alfabeto ebraico e vengono dotati di pedice per indicarne l'ordinamento:

$$\aleph_0, \aleph_1, \dots$$

Per cui vale che $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < |\mathbb{R}| = \aleph_1$.

Per chi di voi ha riposto, però, particolare attenzione alla frase appena citata, si è fatto riferimento non a due 'alephs' (anche noti come numeri cardinali transfiniti) ma ad una successione. Infatti, la summa della Teoria degli Infiniti di Cantor risiede nella dimostrazione di questo teorema:

Teorema⁸.

$$\forall A \text{ insieme si ha che: } |A| < 2^{|A|}$$

Che, pur essendo ovvio nel caso finito, resta un risultato notevole soprattutto per i risvolti successivi nel caso infinito. Questo teorema rappresenta una chiave di volta della Teoria di Cantor. Infatti, si è provato dopo poco che:

⁷ G. CANTOR, *La formazione della teoria degli insiemi (scritti 1872-1899)*, a cura di G. RIGAMONTI, note di E. ZERMELO, Mimesis Edizione, 2012, p 147.

⁸ Più comunemente conosciuto con il nome di *Teorema di Cantor*.

$$|\mathbb{R}| = 2^{|\mathbb{N}|}$$

Coerentemente a quanto dimostrato in uno dei precedenti teoremi.

Ma vale, soprattutto, la generica possibilità di costruire insiemi di dimensioni sempre maggiori e di provare l'esistenza di infiniti infiniti, di cui i naturali e i reali non sono che la base.

Conclusioni.

I risvolti matematici di questa teoria sono stati molteplici: nel campo della Teoria della calcolabilità si è potuto provare che non tutti i problemi sono esprimibili tramite algoritmi; in Teoria degli Insiemi si è rivalutato il concetto di infinito, come anche nella filosofia moderna; in Logica si sono aperte nuove strade per la ricerca..

Per Cantor, però, non andò tutto a gonfie vele: egli rimase affascinato da una comunità scientifica scettica nei confronti del sistema⁹ che aveva meticolosamente costruito e nel 1883 scrisse:

*“La matematica è completamente libera nel suo sviluppo
ed i suoi concetti sono stretti solo alla necessità di non essere contraddittori e
sono coordinati con i concetti previamente introdotti con definizioni precise.
L'essenza della Matematica è la sua Libertà.”*¹⁰

Georg Cantor muore nel 1918 in totale solitudine in un ospedale psichiatrico.

David Hilbert dirà:

*“Ovunque vi sia la minima speranza di successo,
esamineremo accuratamente le definizioni e i metodi deduttivi proficui.
Li coltiveremo, li consolideremo e li renderemo spendibili.*

*Nessuno ci deve cacciare dal paradiso che Cantor ha creato per noi”*¹¹.

⁹ L. Kronecker soleva definire prive di senso le sue scoperte.

¹⁰ E. GARCIA, *Una scoperta senza fine, L'infinito matematico*, Mondo Matematico, RBA, 2011, p. 129.

¹¹ D. HILBERT, *Sull'infinito*, Lit Edizioni, 2013.

Bibliografia.

- [1] B. RUSSELL, *Introduzione alla filosofia matematica*, Newton Compton editori, Ristampa Gennaio 2012.
- [2] G. CANTOR, *La formazione della teoria degli insiemi (scritti 1872-1899)*, a cura di G. RIGAMONTI, note di E. ZERMELO, Mimesis Edizione, 2012.
- [3] D. HILBERT, *Sull'infinito*, Lit Edizioni, 2013;
- [4] L. WITTGENSTEIN, *Lezioni sui fondamenti della matematica*, A cura di C. DIAMOND, Universale Bollati Boringheri Editore, 2002.
- [5] E. GARCIA, *Una scoperta senza fine, L'infinito matematico*, Mondo Matematico, RBA, 2011.