Ancora sui criteri di divisibilità

di Marco Bono

Talvolta può essere utile conoscere i divisori di un numero senza effettuare le divisioni, anche se la diffusione delle calcolatrici elettroniche, sotto varie forme, anche virtuali, rende sempre più facile eseguire ripetuti tentativi di individuazione dei divisori semplicemente facendo varie divisioni e verificando se i risultati sono o meno numeri interi.

Tuttavia fino a qualche tempo fa (e forse qualcuno lo fa ancora ora) era possibile conoscere i divisori di un numero applicando i cosiddetti "criteri di divisibilità", ossia eseguendo particolari algoritmi che consentono di sapere se il numero di partenza è divisibile per altri numeri senza effettuare la divisione.

I criteri di divisibilità però non sono disponibili per tutti i numeri, alcuni sono più facili da applicare, altri più difficili; ad esempio il criterio di divisibilità per il numero 2 è semplicissimo: se il numero di partenza è pari allora è divisibile per 2. Un po' più complicato è il criterio di divisibilità del 3: occorre sommare tutte le cifre del numero di partenza, se il risultato è divisibile per 3 allora lo era anche il primo numero. Se il numero ottenuto come somme delle cifre è ancora troppo grande per capire se è un multiplo di 3 si può ripetere il passaggio precedente più volte fino ad ottenere un numero sufficientemente piccolo. Ad esempio supponiamo di voler sapere se 12.345.678.901 è divisibile per 3: sommiamo le sue cifre, otteniamo 46, ripetiamo la somma per 46, otteniamo 10 che non è divisibile per 3, quindi neppure 12.345.678.901 lo era.

Altri criteri di divisibilità comuni sono quelli per il 5 (se il numero di partenza finisce con 5 o 0 è divisibile per 5) e per l'11 (se la differenza fra la somme delle cifre di posto pari e quelle di posto dispari del numero di partenza è 0, 11 o un multiplo di 11 allora è divisibile per 11).

Inoltre esistono criteri un po' più complicati per il 7, il 13 e il 17.

In realtà è possibile avere dei criteri di divisibilità per tutti i numeri. Questi algoritmi si basano sul criterio di divisibilità del 7 che quindi vedremo più in dettaglio.

Criterio di divisibilità per il 7

La procedura da seguire per stabilire se un numero dato è divisibile per 7 è la seguente:

1. si inizia scomponendo il numero di partenza n in 2 parti: la parte delle unità a e la parte rimanente del numero (dalle decine in su) b, in modo tale che n lo si può esprimere come $n = b*10 + a$.
2. si moltiplicano le unità per 2
3. si sottraggono al resto del numero e si considera il valore assoluto della sottrazione n_1:
   $$n_1 = |b - 2*a|$$

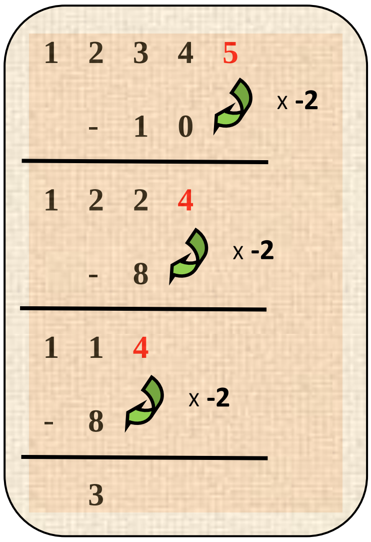
Se n_1 è 0 o 7 o un multiplo di 7 allora n è divisibile per 7. Se n_1 è ancora troppo grande si possono ripetere i passi da 1 a 3 precedenti.

Esempio:

Prendiamo n = 12345, lo scomponiamo nelle due parti a e b : a = 5, b = 1234, raddoppiamo le unità e le sottraiamo al resto del numero per ottenere n_1: n_1 = 1234 – 2*5 = 1234 – 10 = 1224, ripetiamo il procedimento con 1224 fino ad ottenere 3. Visto che questo numero non è 7 o un suo multiplo, il numero di partenza non è divisibile per 7

(In questo caso non è stato necessario considerare il valore assoluto della sottrazione, però in qualche caso può essere comodo, ad esempio se volessimo applicare questo algoritmo a 14 si otterrebbe n_1 = |1 – 2*4| = |1 – 8| = |-7| = 7).

verifica divisibilità per 7



Generalizzazione

Il criterio di divisibilità per 7 si basa in realtà su un algoritmo più generale che si applica a tutti i numeri che finiscono per 1 (11, 21, ecc) o per 9 (9, 19, ecc): per i numeri che finiscono per 1 deriva dal fatto che questi numeri "eccedono" la decina per un'unità, mentre per i numeri che finiscono per 9 dipende dal fatto che questi numeri "difettano" la decina per un'unità.

Nel seguito descriviamo l'algoritmo che è quasi uguale per i due tipi di numeri (differisce solo al passo 2 seguente).

Iniziamo con qualche definizione: definiamo D il dividendo e d il divisore, che in questo caso termina per 1 o per 9. A questo punto scomponiamo sia il dividendo che il divisore nelle 2 parti (unità a e parte rimanente b) come descritto precedentemente ottenendo:

$$D = b_D*10 + a_D$$

$$d = b_d*10 + a_d \qquad \text{o} \qquad d = b_d*10 - a_d \qquad \text{con } a_d = 1$$

Ora è possibile descrivere il procedimento:

1. moltiplicare le unità del dividendo (a_D) per la parte rimanente del divisore (b_d): a_D*b_d

2. sottrarre (sommare se il divisore termina per 9) il numero ottenuto alla parte rimanente del dividendo (b_D) ottenendo un nuovo numero n_1:

   $$n_1 = b_D – a_D*b_d \qquad \text{o} \qquad n_1 = b_D + a_D*b_d$$

Se il numero ottenuto è divisibile per il divisore anche il numero di partenza è divisibile. Se n_1 è troppo grande si possono ripetere le operazioni precedenti finché è necessario.

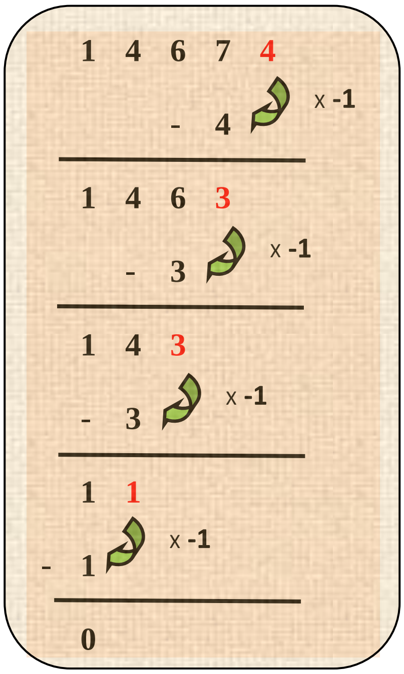
Chiariamo il procedimento con degli esempi per i divisori 11, 21 e 9.

Divisibilità per 11

Supponiamo di voler sapere se 14674 è divisibile per 11; iniziamo a costruire gli elementi necessari:

- $a_D = 4$,
- $a_d = 1$,
- $b_D = 1467$,
- $b_d = 1$

verifica divisibilità per 11



Il passo 1, nel caso particolare di 11, consiste semplicemente nel considerare le unità del dividendo $a_D = 4$ (infatti $a_D*b_d = 4*1$); eseguiamo quindi il passo 2, togliendo 4 dalla parte rimanente del dividendo: $n_1 = b_D - a_D*b_d = 1467 - 4 = 1463$.

Ripetiamo il procedimento con il nuovo numero ottenuto ossia togliamo semplicemente le unità alla parte rimanente del numero ottenendo:

$$n_2 = b_{n1} - a_{n1}*b_d = 146 - 3*1 = 143$$

e poi ancora 14 – 3*1 = 11 e infine 1 – 1*1 = 0.

Quindi 14674 è divisibile per 11.

Si noti che questo metodo è alternativo, e forse più semplice, rispetto a quello “ufficiale”, brevemente descritto nell’introduzione.

Divisibilità per 21

Proviamo ora a verificare se il numero precedente 14674 è divisibile per 21. Gli elementi di partenza sono gli stessi del caso precedente tranne b_d che è uguale a 2.

Possiamo quindi eseguire i passi 1 e 2 precedenti per ottenere $n_1 = 1467 - 2*4 = 1459$ e ripeterli più volte: da 1459 → 145 – 2*9 = 127 → 12 – 2*7 = -2. Quindi 14674 non è divisibile per 21.

È interessante evidenziare che, dal momento che 21 = 7*3, lo stesso criterio di divisibilità per 21 vale anche per il 7 e per il 3.

Si osserva infatti che l’algoritmo qui descritto coincide con quello del 7 e si può facilmente verificare che lo stesso criterio si può applicare quando il divisore è 3:

al termine della procedura si possono verificare 3 casi:

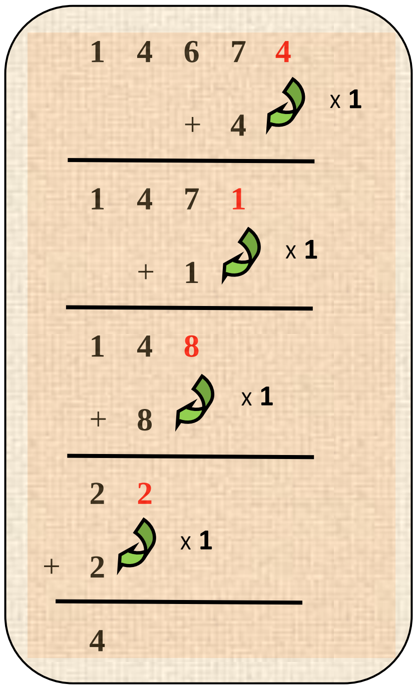
1. il numero finale è = 3 o multiplo di 3, e quindi il numero di partenza è divisibile per 3
2. il numero finale è = 7 o multiplo di 7, e quindi il numero di partenza è divisibile per 7
3. il numero finale è = 0, e quindi il numero di partenza è divisibile per 3 e per 7, ossia per 21.

Divisibilità per 9

Supponiamo di voler sapere se 14674 è divisibile per 9. Iniziamo, come al solito, a costruire gli elementi necessari (ricordiamo che $d = b_d$*10 - a_d con a_d = 1, ossia 9 = 10 - 1):

- a_D = 4,
- a_d = 1,
- b_D = 1467,
- b_d = 1

verifica divisibilità per 9



Il passo 1, nel caso particolare di 9, consiste semplicemente nel considerare le unità del dividendo a_D = 4 (infatti a_D*b_d = 4*1) e di **sommarle** (passo 2) alla parte rimanente del dividendo: n_1 = b_D + a_D*b_d = 1467 + 4 = 1471.

Ripetiamo il procedimento come indicato nello specchietto a fianco ed otteniamo, come risultato finale 4.

Quindi 14674 non è divisibile per 9.

In realtà questo metodo è molto simile a quello "ufficiale", brevemente descritto nell'introduzione in quanto corrisponde a sommare tutte le cifre del dividendo. Dal momento che 9 = 3*3, valgono le considerazioni fatte per il 21, ossia se il numero finale è 3 o 6 allora il numero di partenza è divisibile per 3, se è 9 allora è divisibile anche per 9.

A questo punto possiamo dire di avere trovato vari procedimenti per ricavare la divisibilità per tutti i numeri!

Infatti a parte i numeri pari e quelli che terminano con 5, che sappiamo in partenza che sono divisibili per 2 e per 5, gli altri numeri o terminano per 1 o per 9 (e possiamo applicare direttamente la procedura descritta precedentemente) o possiamo trasformarli in numeri che terminano:

- per 1 con opportune moltiplicazioni per 3 (se il numero termina con 7) o per 7 (se il numero termina con 3)
- per 9 con analoghe moltiplicazioni per 3 (se il numero termina con 3) o per 7 (se il numero termina con 7).

Dopo questa trasformazione si applica l'algoritmo per i numeri che terminano con 1 (o con 9) e si verifica se il numero finale è multiplo del nostro divisore. Ovviamente, per avere un numero piccolo, è conveniente moltiplicare sempre per 3.

Se, ad esempio, volessimo sapere se un certo numero è divisibile per 13, come prima operazione moltiplichiamo 13 per 3 ottenendo 39 e quindi applichiamo l'algoritmo dei numeri che finiscono per 9: in questo caso moltiplichiamo le unità del dividendo per 4 (giacché 39 = 40 – 1) e sommiamole al resto del dividendo e ripetiamo il procedimento fino ad avere un numero sufficientemente piccolo (di 2 cifre).

Se tale numero è divisibile per 13 anche il numero di partenza lo era, se è divisibile per 3 lo era pure il dividendo e se è 39 il dividendo era divisibile per 3 e 13, ossia per 39.

Nelle tabelle seguenti sono riportati i primi 10 numeri che terminano per 1 e per 9, il fattore b_d per cui bisogna moltiplicare le unità del dividendo ed i numeri per cui si applica il criterio di divisibilità.

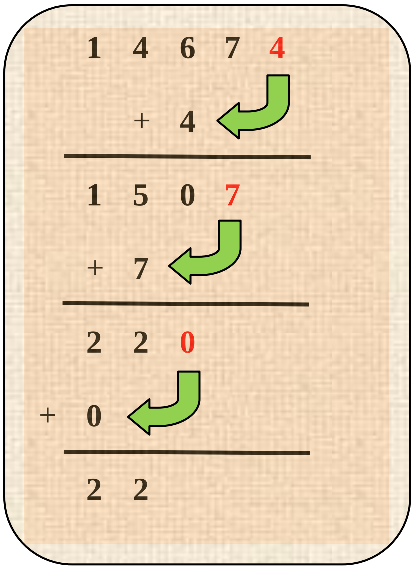
Divisore	b_d	**Criterio valido per:**
11	1	11
21	2	3, 7, 21
31	3	31
41	4	41
51	5	3, 17, 51
61	6	61
71	7	71
81	8	3, 9, 27, 81
91	9	7, 13, 91
101	10	101

Divisore	b_d	**Criterio valido per:**
9	1	3, 9
19	2	19
29	3	29
39	4	13, 39
49	5	7, 49
59	6	59
69	7	23, 69
79	8	79
89	9	89
99	10	3, 9, 11, 33, 99

Questi nuovi algoritmi permettono anche di rivisitare alcuni criteri di divisibilità. Ad esempio per il 7, sfruttando il divisore 49 (o anche il 91), e per l'11, sfruttando il 99.

Nel caso del 7 la nuova procedura consiste nel moltiplicare le unità del dividendo per **5** e di **sommarle** alla parte rimanente del numero (iterando quanto serve).

Altro algoritmo per 11



Nel caso dell'11 si prendono le unità del dividendo, si moltiplicano per **10** e si **sommano** alla parte rimanente del numero. Questa procedura si può anche descrivere in un altro modo: prendere le unità del dividendo, spostarle sotto le centinaia, sommarle e poi considerare il nuovo numero. Ovviamente questo nuovo algoritmo si può applicare anche per verificare la divisibilità per 3 e per 9.

Basandosi sulle proprietà del 99 il risultato finale sarà sempre un numero di 2 cifre. Se volessimo ripetere questo procedimento al numero di 2 cifre queste semplicemente si scambierebbero.

Da ciò discende che tutti i multipli di 3 e 9 di 2 cifre producono altri multipli di 3 e 9 scambiando le loro cifre. Analoghe considerazioni fatte per 999, 9999 o, in generale $10^n - 1$, permettono di estendere l'osservazione precedente a tutti i multipli di 3 e 9, per qualsiasi numero di cifre.

Conclusioni

La generalizzazione del criterio di divisibilità del 7 conduce ad ottenere dei criteri di divisibilità per qualsiasi numero (di quelli per i quali non sono disponibili criteri "facili" – numeri pari e multipli di 5). Casi particolarmente interessanti sono due nuovi criteri per l'11 ed uno per il 7.

Ovviamente l'utilizzo pratico di questi criteri è limitato alle dimensioni dei numeri divisori: divisori grandi determinano la necessità di moltiplicazioni complesse. Tuttavia, limitandoci a divisori di 2 cifre, è possibile, abbastanza facilmente, applicare questi nuovi algoritmi per i seguenti numeri (escludendo i multipli di 5):

Divisore	Numero moltiplicatore b_d (numero di riferimento)
3	-2 (21)
7	-2 (21)
9	+1 (9)
11	-1 (11)
13	4 (39)
17	-5 (51)
19	2 (19)
21	2 (21)
23	7 (69)
27	-8 (81)
29	3 (29)
31	-3 (31)
33	10 (99)
37	Numero primo
39	4 (39)
41	-4 (41)
43	Numero primo
47	Numero primo
49	5 (49)
51	-5 (51)

divisore	Numero moltiplicatore b_d (numero di riferimento)
53	Numero primo
57	= 3*19
59	6 (59)
61	-6 (61)
63	= 3*3*7
67	Numero primo
69	7 (69)
71	-7 (71)
73	Numero primo
77	= 7*11
79	8 (79)
81	-8 (81)
83	Numero primo
87	= 3*29
89	9 (89)
91	-9 (91)
93	= 3*31
97	Numero primo
99	10 (99)

Quindi per i numeri minori di 100 esistono sempre dei criteri di divisibilità con numeri moltiplicatori (b_d) di una cifra (o con numero moltiplicatore = 10) tranne che per gli 8 numeri primi a partire dal 37 e per 5 numeri composti (in blu nella tabella precedente).