# FUNZIONI SUI NUMERI INTERI - CURIOSITÀ E APPLICAZIONI

**Stefano Borgogni**
stfbrg@rocketmail.com

**SUNTO**
*Questo studio intende esaminare alcune funzioni matematiche che prendono in considerazione i soli numeri interi. Si tratta di funzioni oltremodo semplici, ma che hanno importanti applicazioni pratiche in diversi rami della matematica.*
*L'idea di fondo è quella di raccogliere in una sintesi unitaria una serie di dati e informazioni sul tema, affrontandolo con un approccio un po' diverso dal consueto: mentre solitamente le funzioni descritte sono trattate all'interno dei campi della matematica in cui trovano applicazione, il presente studio intende considerarle congiuntamente in un unico quadro d'insieme.*
*Il testo sarà corredato da una tabella riepilogativa - relativa ai primi 200 numeri interi - che riporta per ciascun numero il valore relativo alle diverse funzioni esaminate.*

## 1 - LE FUNZIONI
*Cominciamo proprio con l'elenco delle 5 funzioni che saranno trattate:*
- *τ (n): Numero di divisori di n*
- *σ (n): Somma dei divisori di n (compreso n)*
- *s (n): Somma dei divisori di n (escluso n)*
- *φ (n), "Funzione di Eulero" (detta anche "Funzione Totiente"): Numero di interi minori di n coprimi con n*
- *π (n), "Funzione enumerativa dei primi": Numero dei primi non superiori ad n*

### *1.1 - Funzione τ (n). Numero di divisori di n*
*Questa funzione associa ad ogni intero positivo il numero dei suoi divisori, inclusi 1 e il numero stesso.*
*Sono immediatamente evidenti alcune regole per i valori assunti dalla funzione:*
- *τ (n) vale 1 per n = 1;*
- *τ (n) vale 2 per tutti gli altri numeri primi;*
- *τ (n) > 2 per tutti i numeri composti.*

*Può essere interessante notare che τ (n) è una funzione moltiplicativa legata alla fattorizzazione di n: se* $n = p_1^a\ p_2^b\ \dots\ p_k^z$, *vale la formula* $\boldsymbol{\tau (n) = (a+1)\ (b+1)\ \dots\ (z+1)}$.
*Ad esempio, consideriamo il numero 60. 60 è uguale a* $2^2\ 3\ 5$; *dunque in base alla formula τ (60) vale (2+1)(1+1)(1+1) = 12, che è infatti il numero di divisori di 60 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60).*

### *1.2 - Funzione σ (n). Somma dei divisori di n (n compreso)*
*Questa funzione associa ad ogni intero positivo la somma dei suoi divisori, inclusi 1 e il numero stesso. Da tale definizione, si ricavano immediatamente due conseguenze:*
- *il valore di σ (n) è sempre maggiore di n, poiché ogni numero è divisore di se stesso;*
- *σ (n) = n+1 se e solo se n è un numero primo.*

*Se, invece, n è un numero composto, vale sempre la disuguaglianza* $\boldsymbol{\sigma (n) > n + \sqrt{n}}$. *In altre parole, per quanto pochi divisori abbia un numero n, la loro somma (1 e n compresi) non può essere inferiore al valore* $n + \sqrt{n}$.
*Nel caso particolare in cui n sia il quadrato di un numero primo (e, dunque, abbia solo 3 divisori), si avrà esattamente* $\boldsymbol{\sigma (n) = n + \sqrt{n} + 1}$. *Ad esempio, σ (49) = 1+7+49 = 57 che, ovviamente, equivale a* $49 + \sqrt{49} + 1$.
*La funzione σ (così come la τ appena esaminata) è collegata alla funzione ζ di Riemann, della quale si parlerà più avanti.*

### *1.3 - Funzione s (n). Somma dei divisori di n (n escluso)*

*La funzione s (n) è molto simile alla precedente, ma in questo caso nella somma dei divisori del numero non viene considerato lo stesso n. Analogamente al caso appena visto, la definizione implica due semplici regole:*

- *s (n) = 1 se e solo se n è un numero primo;*
- *s (n) = $\sqrt{n}$ + 1 se n è il quadrato di un numero primo.*

*Negli altri casi, s (n) può assumere valori sia minori che maggiori di n.*
*La funzione s (n) ha applicazioni di gran lunga superiori a σ (n); entra, infatti, nella definizione di molte tipologie di numeri.*

**NUMERI PERFETTI**

*In primo luogo, s (n) richiama i cosiddetti "numeri perfetti", definiti - per l'appunto - come numeri equivalenti alla somma dei propri divisori. In altre parole, un numero n è perfetto se vale la relazione* ***n = s (n)****.*
*I numeri perfetti furono studiati sin dall'antichità: un teorema enunciato da Pitagora e dimostrato poi da Euclide afferma che se $2^n - 1$ è un numero primo, allora* $\mathbf{m = 2^{n-1} (2^n - 1)}$ *è un numero perfetto. Successivamente, Eulero dimostrò che tutti i numeri perfetti pari devono avere tale forma.*
*Ma i numeri esprimibili come $2^n - 1$ con n primo sono i ben noti "numeri primi di Mersenne"[1], per cui si può dire che ciascuno di essi dà sicuramente origine a un numero perfetto. Al momento, si conoscono solo 47 numeri primi di Mersenne e, di conseguenza, 47 numeri perfetti; il più grande tra questi è formato da quasi 26 milioni di cifre!*
*Aggiungiamo l'elenco dei primi cinque numeri perfetti: 6, 28, 496, 8.128 e 35.550.336.*
*Tra le altre proprietà dei numeri perfetti, si può ricordare che essi sono anche triangolari,[2] visto che si possono scrivere nella forma* ***k (k+1) / 2****, che è appunto la formula per trovare il k-esimo numero triangolare.*
*Inoltre, è facile dimostrare che tutti i numeri perfetti del tipo sopra indicato terminano per 6 o per 8. Infatti, dalla formula stessa si ricava che:*

- $2^{n-1}$ è pari e termina con le cifre 2, 4, 8, 6 (trascuriamo il caso banale n=1);
- $2^n - 1$ è dispari e termina rispettivamente per 3, 7, 5, 1 (ma 5 va scartato poiché cadrebbe l'ipotesi di primalità);
- le coppie rimanenti, 2-3, 4-7 e 6-1, danno come prodotto 6 o 8.

*Restano tuttora aperte due questioni relative ai numeri perfetti:*

- *i numeri perfetti sono infiniti?*
- *esistono numeri perfetti dispari?*

*Sulla base dei risultati trovati finora, effettuando le ricerche per numeri di dimensioni sempre più grandi, si ipotizzano rispettivamente un sì e un no alle due domande (cioè, i numeri perfetti sarebbero infiniti e non ne esisterebbero di dispari), ma nessuna delle due congetture è stata ancora dimostrata.*

**NUMERI AMICHEVOLI**

Sempre a partire dalla funzione s (n) si ottengono i cosiddetti "numeri amichevoli"[3], ossia coppie di numeri tali che la somma dei divisori dell'uno è uguale all'altro e viceversa. Sinteticamente, a e b sono numeri amichevoli se **a = s (b)** e **b = s (a)**.
La più piccola coppia di numeri amichevoli è 220 - 284, infatti la somma dei divisori di 220 (1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110) è 284 e la somma dei divisori di 284 (1, 2, 4, 71, 142) è 220.
Vale la pena di segnalare che già nel IX secolo un matematico arabo, Thābit ibn Qurra, scoprì un metodo per trovare coppie di numeri amichevoli: dato n intero positivo, se i numeri

[1] Dal nome del frate francese del '600 Marin Mersenne, che li studiò.
[2] Tra le varie definizioni, si riporta la seguente: "*Un numero intero è triangolare se è uguale alla somma di una sequenza di numeri consecutivi a partire da 1*". I primi numeri triangolari sono 1, 3, 6, 10, 15, 21… e si chiamano così perché possono essere rappresentati graficamente in forma di triangolo.
[3] Spesso questi numeri sono definiti "amicabili", calco dell'inglese "amicables".

$p = (3\ 2^{n-1}) - 1$
$q = (3\ 2^{n}) - 1$
$r = (9\ 2^{2n-1}) - 1$
sono tre primi dispari,[4] allora $\mathbf{2^n pq}$ e $\mathbf{2^n r}$ sono una coppia di numeri amichevoli.
Ad esempio, con n=3 si ricava p=11; q=23; r=287, da cui discende la coppia 2.024 - 2.296.
Uno scoperta rimarchevole e poco nota, dovuta a un matematico pressoché sconosciuto.

**NUMERI SOCIEVOLI**

Un'estensione immediata dei numeri amichevoli è data dai "numeri socievoli" (in inglese "sociables"), gruppi di numeri che formano una catena di relazioni tale per cui il primo è pari alla somma dei divisori del secondo, il secondo è pari alla somma dei divisori del terzo e così via fino all'ultimo, che chiude il cerchio.
In altre parole, i numeri a, b … z sono socievoli se valgono contemporaneamente le relazioni:
**a = s (b); b = s (c) … z = s (a)**.
Una sequenza di questo genere, scoperta nel 1918, è la seguente: 12 496 - 14 288 - 15 472 - 14 536 - 14 264. E' anche quella con i numeri più piccoli.
La catena più lunga conosciuta - trovata nel 2006 con l'ausilio di potenti elaboratori elettronici - conta ben 54 numeri, mentre finora non è stato ancora scoperto un "terzetto" di numeri socievoli.

**NUMERI FIDANZATI**

Infine, applicando la stessa regola dei numeri amichevoli ma non considerando l'1 nella somma dei divisori, si ottengono i "numeri fidanzati".
*In simboli, due numeri a e b sono fidanzati se* ***a = s (b) – 1*** *e* ***b = s (a) – 1****.*
*Questo curioso nome si deve al fatto che Pitagora distingueva i numeri pari come femminili e i dispari come maschili, e per l'appunto due numeri fidanzati sono sempre uno pari e l'altro dispari. Al contrario, le coppie di numeri amichevoli e le catene di numeri socievoli sono sempre formate da numeri o tutti pari o tutti dispari. Ricordate il film "Harry ti presento Sally"? Sembra che anche in matematica venga sancita l'impossibilità di un'amicizia tra esseri (in questa caso numeri) di sesso maschile e di sesso femminile!*
*La prima coppia di fidanzati è formata dai numeri 48 e 75, detti anche "promessi sposi".*

***1.4 - Funzione φ (n). Numero di interi minori di n coprimi con n***

Questa funzione - uno degli innumerevoli contributi alla scienza del grande matematico svizzero del '700 Leonhard Euler - ha una grandissima importanza pratica, poiché è alla base dei principali sistemi di crittografia oggi utilizzati.
Ma procediamo con ordine, partendo dalla considerazione che per ogni numero primo n, tutti gli interi minori di n sono coprimi con esso; dunque, per qualsiasi numero primo $\boldsymbol{\varphi(n) = n - 1}$.
Inoltre, si può facilmente verificare che se n = pq (con p e q numeri primi), $\boldsymbol{\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)}$.
Utilizzando l'aritmetica modulare, si ha il Teorema, anch'esso di Eulero, per cui se a ed n sono coprimi, vale la seguente relazione: $\mathbf{a^{\varphi(n)} \equiv 1 \ (mod\ n)}$.
Su questi presupposti si fonda l'algoritmo di cifratura RSA[5], il più utilizzato ai giorni nostri per proteggere codici che devono rimanere segreti, ad esempio i numeri delle carte bancarie. Tale algoritmo si basa sulle formule appena viste (sempre nel campo dell'aritmetica modulare) e prevede l'utilizzo di 3 grandi numeri n, p, q con n = pq.[6]

[4] La precisazione che siano dispari è necessaria per il caso n=2, da cui si ottengono i numeri p=2; q=5; r=17 (primi, ma non tutti dispari), che danno origine alla coppia, "non amichevole", 20 - 34.
[5] L'algoritmo RSA (dal nome dei suoi inventori Rivers, Shamir e Adleman) è stato elaborato negli anni '70.
[6] Si è ritenuto di dare solo alcuni cenni - necessariamente un po' frammentari - sulla questione della cifratura dei dati; per maggiori dettagli si rimanda all'articolo "*Dai numeri primi alla crittografia*" pubblicato su questo stesso sito (vedi bibliografia). L'articolo tratta approfonditamente il tema e spiega con estrema chiarezza il funzionamento dell'algoritmo RSA.

La difficoltà per chi volesse violare il codice segreto è quella di scomporre in fattori n, ossia trovare i suoi due unici divisori p e q. Può sembrare a prima vista un problema banale, ma basta scegliere i numeri p e q sufficientemente grandi affinché anche il più potente elaboratore abbia bisogno di anni e anni di lavoro per trovare la soluzione!
Oggi si utilizzano a questo scopo numeri di qualche centinaio di cifre, ma l'infinità dei numeri primi (già dimostrata da Euclide)[7] garantisce di poter sempre trovare numeri tali da rendere inutile qualsiasi progresso nella velocità e nella potenza dei computer. Almeno finché non si scoprirà un altro metodo per la scomposizione di un numero in fattori…

### 1.5 - Funzione π (n). Numero dei primi non superiori ad n

Com'è noto, uno dei grandi problemi irrisolti legati ai numeri primi è quello di capire in che modo si susseguono; generazioni di matematici hanno cercato, finora invano, di capire se esista una regola nell'infinita successione di questi numeri. Un primo passo in questa direzione è l'elaborazione di una formula che fornisca, con la massima precisione possibile, il numero di primi minori di un dato numero n. Questa è, per l'appunto, la funzione π (n).
Tra i matematici che si sono occupati di questa questione, vi è Carl Friedrich Gauss, il "principe dei matematici", a cui si deve una stima assai precisa di π (n), legata al logaritmo naturale. La formula è: $\boldsymbol{\pi(n) \sim n / \log n}$, cioè al crescere di n il valore di π (n) tende ad avvicinarsi sempre più a n / log n.
La dimostrazione di questa formula, che è di molto successiva all'epoca dello stesso Gauss, fu facilitata dagli studi del matematico tedesco Bernard Riemann, celebre per la sua funzione ζ (s) - estensione al campo complesso della funzione di Eulero $\zeta(x) = 1/1^x + 1/2^x + 1/3^x + \ldots$ - e per la sua ipotesi: *Tutte le soluzioni non banali della funzione ζ (s) hanno parte reale pari a 1/2*.
Allo stesso Riemann si deve una formula che mostra la dipendenza della funzione π (n) dagli zeri della funzione ζ.[8]
*Infine, segnaliamo che vi è uno stretto legame tra la funzione ζ di Riemann e le funzioni τ (n) e s (n), ma il dettaglio di queste relazioni esula dall'ambito del presente testo.*

## 2 - TIPOLOGIE DI NUMERI INTERI

Vale la pena di aggiungere ancora qualche considerazione su alcune tipologie di numeri interi che si possono definire in base alle funzioni appena esaminate, cioè riguardo al loro rapporto con il numero dei propri divisori o con la somma di essi.
Per non appesantire troppo il presente testo, ci limiteremo a qualche cenno sull'argomento, rimandando a testi più specifici chi volesse saperne di più.
Lasciando da parte i ben noti numeri primi, le tipologie di numeri interi da considerare sono le seguenti.

### Numeri difettivi

Si tratta dei numeri maggiori della somma dei propri divisori. In altre parole, un numero n è difettivo se $\mathbf{n > s(n)}$.
E' facile verificare che tutti i numeri primi e le loro potenze sono numeri difettivi. Inoltre, tutti i divisori propri dei numeri difettivi e dei numeri perfetti sono a loro volta difettivi.
Esempi di numeri difettivi sono 9, 17, 26, 76, 133.

### Numeri abbondanti

Al contrario di quanto appena visto, i numeri abbondanti sono quelli inferiori alla somma dei propri divisori, cioè i numeri per cui vale la relazione $\mathbf{n < s(n)}$.

[7] Euclide provò che i numeri primi sono infiniti grazie a una dimostrazione per assurdo - semplice e geniale al tempo stesso - rimasta famosa nella storia della matematica. Si può vedere in proposito l'articolo appena citato.
[8] L'ipotesi di Riemann costituisce uno dei 23 problemi elencati da David Hilbert all'inizio del '900. Non è ancora stata dimostrata, anche se si è verificato che è vera per milioni di valori diversi di x. Di questa congettura e del suo stretto legame con la distribuzione dei numeri primi tratta diffusamente *L'enigma dei numeri primi* di De Sautoy (opera indicata nella bibliografia).

I primi numeri abbondanti sono: 12, 18, 20, 24, 30, 36; per trovare il primo abbondante dispari occorre salire fino a 945 (numero che equivale a 35×27, cioè a $3^3$x5x7).
Tutti i multipli interi dei numeri abbondanti e dei numeri perfetti sono a loro volta numeri abbondanti.

**Numeri perfetti**
Dei numeri perfetti si è già parlato diffusamente nel paragrafo 1.2; aggiungiamo soltanto che essi costituiscono, evidentemente, lo "spartiacque" tra numeri difettivi e numeri abbondanti.

**Numeri altamente composti**
I numeri altamente composti sono numeri che hanno più divisori di qualsiasi intero positivo minore.
*Riprendendo quanto detto nel paragrafo 1.1 a proposito della fattorizzazione, se* $n = p_1^a\, p_2^b \dots p_n^z$, *allora la somma dei divisori di n sarà* $(a+1)\,(b+1) \dots (z+1)$.
A partire da questa formula si possono stabilire due regole molto precise; affinché n sia un numero altamente composto è necessario che:

- *i k numeri primi* $p_i$ *siano esattamente i primi k numeri primi (2, 3, 5...), altrimenti potremmo sostituirne uno con un primo minore, ottenendo così un numero minore di n con lo stesso numero di divisori (ad esempio, 10=2×5, ma cambiando il 5 con il 3 si ha 6=2×3; 6 e 10 hanno lo stesso numero di divisori per cui 10 non può essere altamente composto);*
- *la sequenza degli esponenti non deve essere crescente, cioè* $a \geq b \geq c$ *etc., altrimenti, scambiandone due non in ordine si ha un numero minore di n con lo stesso numero di divisori (ad esempio,* $18 = 2^1 \times 3^2$ *può essere trasformato in* $12 = 2^2 \times 3^1$*: dunque, 18 non è di sicuro un numero altamente composto).*

I primi 10 numeri altamente composti sono: 1, 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60 e 120.

Ovviamente, i numeri possono appartenere anche a più di una tipologia ma, a partire dalle stesse definizioni, è facile ricavare che:

- Tutti i numeri primi sono anche difettivi (ma non viceversa).
- Non esistono numeri contemporaneamente difettivi e altamente composti; fanno eccezione i primi due numeri pari, 2 e 4.
- L'unico numero che appartiene a tre categorie è 2 (primi, difettivi, altamente composti).
- Tutti i numeri altamente composti sono anche abbondanti (ma non viceversa).

# FUNZIONI SUI NUMERI INTERI (Numeri da 1 a 200)

| *n* | *Elenco dei divisori* | *τ (n)* | *σ(n)* | *s(n)* | *φ(n)* | *π(n)* | *Tipologie cui appartiene n* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | difettivi, alt.composti |
| 2 | 1, 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | primi, difettivi, alt.composti |
| 3 | 1, 3 | 2 | 4 | 1 | 2 | 2 | primi, difettivi |
| 4 | 1, 2, 4 | 3 | 7 | 3 | 2 | 2 | difettivi, alt.composti |
| 5 | 1, 5 | 2 | 6 | 1 | 4 | 3 | primi, difettivi |
| 6 | 1, 2, 3, 6 | 4 | 12 | 6 | 2 | 3 | perfetti, alt.composti |
| 7 | 1, 7 | 2 | 8 | 1 | 6 | 4 | primi, difettivi |
| 8 | 1, 2, 4, 8 | 4 | 15 | 7 | 4 | 4 | difettivi |
| 9 | 1, 3, 9 | 3 | 13 | 4 | 6 | 4 | difettivi |
| 10 | 1, 2, 5, 10 | 4 | 18 | 8 | 4 | 4 | difettivi |
| 11 | 1, 11 | 2 | 12 | 1 | 10 | 5 | primi, difettivi |
| 12 | 1, 2, 3, 4, 6, 12 | 6 | 28 | 16 | 4 | 5 | abbondanti, alt.composti |
| 13 | 1, 13 | 2 | 14 | 1 | 12 | 6 | primi, difettivi |
| 14 | 1, 2, 7, 14 | 4 | 24 | 10 | 6 | 6 | difettivi |
| 15 | 1, 3, 5, 15 | 4 | 24 | 9 | 8 | 6 | difettivi |
| 16 | 1, 2, 4, 8, 16 | 5 | 31 | 15 | 8 | 6 | difettivi |
| 17 | 1, 17 | 2 | 18 | 1 | 16 | 7 | primi, difettivi |
| 18 | 1, 2, 3, 6, 9, 18 | 6 | 39 | 21 | 6 | 7 | abbondanti |
| 19 | 1, 19 | 2 | 20 | 1 | 18 | 8 | primi, difettivi |
| 20 | 1, 2, 4, 5, 10, 20 | 6 | 42 | 22 | 8 | 8 | abbondanti |
| 21 | 1, 3, 7, 21 | 4 | 32 | 11 | 12 | 8 | difettivi |
| 22 | 1, 2, 11, 22 | 4 | 36 | 14 | 10 | 8 | difettivi |
| 23 | 1, 23 | 2 | 24 | 1 | 22 | 9 | primi, difettivi |
| 24 | 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 | 8 | 60 | 36 | 8 | 9 | abbondanti, alt.composti |
| 25 | 1, 5, 25 | 3 | 31 | 6 | 20 | 9 | difettivi |
| 26 | 1, 2, 13, 26 | 4 | 42 | 16 | 12 | 9 | difettivi |
| 27 | 1, 3, 9, 27 | 4 | 40 | 13 | 18 | 9 | difettivi |
| 28 | 1, 2, 4, 7, 14, 28 | 6 | 56 | 28 | 12 | 9 | perfetti |
| 29 | 1, 29 | 2 | 30 | 1 | 28 | 10 | primi, difettivi |
| 30 | 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 | 8 | 72 | 42 | 8 | 10 | abbondanti |
| 31 | 1, 31 | 2 | 32 | 1 | 30 | 11 | primi, difettivi |
| 32 | 1, 2, 4, 8, 16, 32 | 6 | 63 | 31 | 16 | 11 | difettivi |
| 33 | 1, 3, 11, 33 | 4 | 48 | 15 | 20 | 11 | difettivi |
| 34 | 1, 2, 17, 34 | 4 | 54 | 20 | 16 | 11 | difettivi |
| 35 | 1, 5, 7, 35 | 4 | 48 | 13 | 24 | 11 | difettivi |
| 36 | 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 | 9 | 91 | 55 | 12 | 11 | abbondanti, alt.composti |
| 37 | 1, 37 | 2 | 38 | 1 | 36 | 12 | primi, difettivi |
| 38 | 1, 2, 19, 38 | 4 | 60 | 22 | 18 | 12 | difettivi |
| 39 | 1, 3, 13, 39 | 4 | 56 | 17 | 24 | 12 | difettivi |
| 40 | 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 | 8 | 90 | 50 | 16 | 12 | abbondanti |
| 41 | 1, 41 | 2 | 42 | 1 | 40 | 13 | primi, difettivi |
| 42 | 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42 | 8 | 96 | 54 | 12 | 13 | abbondanti, |
| 43 | 1, 43 | 2 | 44 | 1 | 42 | 14 | primi, difettivi |
| 44 | 1, 2, 4, 11, 22, 44 | 6 | 84 | 40 | 20 | 14 | difettivi |
| 45 | 1, 3, 5, 9, 15, 45 | 6 | 78 | 33 | 24 | 14 | difettivi |
| 46 | 1, 2, 23, 46 | 4 | 72 | 26 | 22 | 14 | difettivi |
| 47 | 1, 47 | 2 | 48 | 1 | 46 | 15 | primi, difettivi |
| 48 | 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 | 10 | 124 | 76 | 16 | 15 | abbondanti, alt.composti |
| 49 | 1, 7, 49 | 3 | 57 | 8 | 42 | 15 | difettivi |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 1, 2, 5, 10, 25, 50 | 6 | 93 | 43 | 20 | 15 | difettivi |
| 51 | 1, 3, 17, 51 | 4 | 72 | 21 | 32 | 15 | difettivi |
| 52 | 1, 2, 4, 13, 26, 52 | 6 | 98 | 46 | 24 | 15 | difettivi |
| 53 | 1, 53 | 2 | 54 | 1 | 52 | 16 | primi, difettivi |
| 54 | 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54 | 8 | 120 | 66 | 18 | 16 | abbondanti |
| 55 | 1, 5, 11, 55 | 4 | 72 | 17 | 40 | 16 | difettivi |
| 56 | 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56 | 8 | 120 | 64 | 24 | 16 | abbondanti |
| 57 | 1, 3, 19, 57 | 4 | 80 | 23 | 36 | 16 | difettivi |
| 58 | 1, 2, 29, 58 | 4 | 90 | 32 | 28 | 16 | difettivi |
| 59 | 1, 59 | 2 | 60 | 1 | 58 | 17 | primi, difettivi |
| 60 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 | 12 | 168 | 108 | 16 | 17 | abbondanti, alt.composti |
| 61 | 1, 61 | 2 | 62 | 1 | 60 | 18 | primi, difettivi |
| 62 | 1, 2, 31, 62 | 4 | 96 | 34 | 30 | 18 | difettivi |
| 63 | 1, 3, 7, 9, 21, 63 | 6 | 104 | 41 | 36 | 18 | difettivi |
| 64 | 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 | 7 | 127 | 63 | 32 | 18 | difettivi |
| 65 | 1, 5, 13, 65 | 4 | 84 | 19 | 48 | 18 | difettivi |
| 66 | 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66 | 8 | 144 | 78 | 20 | 18 | abbondanti |
| 67 | 1, 67 | 2 | 68 | 1 | 66 | 19 | primi, difettivi |
| 68 | 1, 2, 4, 17, 34, 68 | 6 | 126 | 58 | 32 | 19 | difettivi |
| 69 | 1, 3, 23, 69 | 4 | 96 | 27 | 44 | 19 | difettivi |
| 70 | 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70 | 8 | 144 | 74 | 24 | 19 | abbondanti |
| 71 | 1, 71 | 2 | 72 | 1 | 70 | 20 | primi, difettivi |
| 72 | 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72 | 12 | 195 | 123 | 24 | 20 | abbondanti |
| 73 | 1, 73 | 2 | 74 | 1 | 72 | 21 | primi, difettivi |
| 74 | 1, 2, 37, 74 | 4 | 114 | 40 | 36 | 21 | difettivi |
| 75 | 1, 3, 5, 15, 25, 75 | 6 | 124 | 49 | 40 | 21 | difettivi |
| 76 | 1, 2, 4, 19, 38, 76 | 6 | 140 | 64 | 36 | 21 | difettivi |
| 77 | 1, 7, 11, 77 | 4 | 96 | 19 | 60 | 21 | difettivi |
| 78 | 1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78 | 8 | 168 | 90 | 24 | 21 | abbondanti |
| 79 | 1, 79 | 2 | 80 | 1 | 78 | 22 | primi, difettivi |
| 80 | 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80 | 10 | 186 | 106 | 32 | 22 | abbondanti |
| 81 | 1, 3, 9, 27, 81 | 5 | 121 | 40 | 54 | 22 | difettivi |
| 82 | 1, 2, 41, 82 | 4 | 126 | 44 | 40 | 22 | difettivi |
| 83 | 1, 83 | 2 | 84 | 1 | 82 | 23 | primi, difettivi |
| 84 | 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84 | 12 | 224 | 140 | 24 | 23 | abbondanti |
| 85 | 1, 5, 17, 85 | 4 | 108 | 23 | 64 | 23 | difettivi |
| 86 | 1, 2, 43, 86 | 4 | 132 | 46 | 42 | 23 | difettivi |
| 87 | 1, 3, 29, 87 | 4 | 120 | 33 | 56 | 23 | difettivi |
| 88 | 1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88 | 8 | 180 | 92 | 40 | 23 | abbondanti |
| 89 | 1, 89 | 2 | 90 | 1 | 88 | 24 | primi, difettivi |
| 90 | 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90 | 12 | 234 | 144 | 24 | 24 | abbondanti |
| 91 | 1, 7, 13, 91 | 4 | 112 | 21 | 72 | 24 | difettivi |
| 92 | 1, 2, 4, 23, 46, 92 | 6 | 168 | 76 | 44 | 24 | difettivi |
| 93 | 1, 3, 31, 93 | 4 | 128 | 35 | 60 | 24 | difettivi |
| 94 | 1, 2, 47, 94 | 4 | 144 | 50 | 46 | 24 | difettivi |
| 95 | 1, 5, 19, 95 | 4 | 120 | 25 | 72 | 24 | difettivi |
| 96 | 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96 | 12 | 252 | 156 | 32 | 24 | abbondanti |
| 97 | 1, 97 | 2 | 98 | 1 | 96 | 25 | primi, difettivi |
| 98 | 1, 2, 7, 14, 49, 98 | 6 | 171 | 73 | 42 | 25 | difettivi |
| 99 | 1, 3, 9, 11, 33, 99 | 6 | 156 | 57 | 60 | 25 | difettivi |
| 100 | 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 | 9 | 217 | 117 | 40 | 25 | abbondanti |
| 101 | 1, 101 | 2 | 102 | 1 | 100 | 26 | primi, difettivi |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 102 | 1, 2, 3, 6, 17, 34, 51, 102 | 8 | 216 | 114 | 32 | 26 | abbondanti |
| 103 | 1, 103 | 2 | 104 | 1 | 102 | 27 | primi, difettivi |
| 104 | 1, 2, 4, 8, 13, 26, 52, 104 | 8 | 210 | 106 | 48 | 27 | abbondanti |
| 105 | 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105 | 8 | 192 | 87 | 69 | 27 | difettivi |
| 106 | 1, 2, 53, 106 | 4 | 162 | 56 | 52 | 27 | difettivi |
| 107 | 1, 107 | 2 | 108 | 1 | 106 | 28 | primi, difettivi |
| 108 | 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108 | 12 | 280 | 172 | 36 | 28 | abbondanti |
| 109 | 1, 109 | 2 | 110 | 1 | 108 | 29 | primi, difettivi |
| 110 | 1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110 | 8 | 216 | 106 | 40 | 29 | difettivi |
| 111 | 1, 3, 37, 111 | 4 | 152 | 41 | 72 | 29 | difettivi |
| 112 | 1, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 56, 112 | 10 | 248 | 136 | 48 | 29 | abbondanti |
| 113 | 1, 113 | 2 | 114 | 1 | 112 | 30 | primi, difettivi |
| 114 | 1, 2, 3, 6, 19, 38, 57, 114 | 8 | 240 | 126 | 36 | 30 | abbondanti |
| 115 | 1, 5, 23, 115 | 4 | 144 | 29 | 88 | 30 | difettivi |
| 116 | 1, 2, 4, 29, 58, 116 | 6 | 210 | 94 | 58 | 30 | difettivi |
| 117 | 1, 3, 9, 13, 39, 117 | 6 | 182 | 65 | 72 | 30 | difettivi |
| 118 | 1, 2, 59, 118 | 4 | 180 | 62 | 58 | 30 | difettivi |
| 119 | 1, 7, 17, 119 | 4 | 144 | 25 | 96 | 30 | difettivi |
| 120 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120 | 16 | 360 | 240 | 32 | 30 | abbondanti, alt.composti |
| 121 | 1, 11, 121 | 3 | 133 | 12 | 110 | 30 | difettivi |
| 122 | 1, 2, 61, 122 | 4 | 186 | 64 | 60 | 30 | difettivi |
| 123 | 1, 3, 41, 123 | 4 | 168 | 45 | 80 | 30 | difettivi |
| 124 | 1, 2, 4, 31, 62, 124 | 6 | 224 | 100 | 60 | 30 | difettivi |
| 125 | 1, 5, 25, 125 | 4 | 156 | 31 | 100 | 30 | difettivi |
| 126 | 1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126 | 12 | 312 | 186 | 36 | 30 | abbondanti |
| 127 | 1, 127 | 2 | 128 | 1 | 126 | 31 | primi, difettivi |
| 128 | 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 | 8 | 255 | 127 | 64 | 31 | difettivi |
| 129 | 1, 3, 43, 129 | 4 | 176 | 47 | 84 | 31 | difettivi |
| 130 | 1, 2, 5, 10, 13, 26, 65, 130 | 8 | 252 | 122 | 81 | 31 | difettivi |
| 131 | 1, 131 | 2 | 132 | 1 | 130 | 32 | primi, difettivi |
| 132 | 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 22, 33, 44, 66, 132 | 12 | 336 | 204 | 40 | 32 | abbondanti |
| 133 | 1, 7, 19, 133 | 4 | 160 | 27 | 108 | 32 | difettivi |
| 134 | 1, 2, 67, 134 | 4 | 204 | 70 | 66 | 32 | difettivi |
| 135 | 1, 3, 5, 9, 15, 27, 45, 135 | 8 | 240 | 105 | 72 | 32 | difettivi |
| 136 | 1, 2, 4, 8, 17, 34, 68, 136 | 8 | 270 | 134 | 64 | 32 | difettivi |
| 137 | 1, 137 | 2 | 138 | 1 | 136 | 33 | primi, difettivi |
| 138 | 1, 2, 3, 6, 23, 46, 69, 138 | 8 | 288 | 150 | 44 | 33 | abbondanti |
| 139 | 1, 139 | 2 | 140 | 1 | 138 | 34 | primi, difettivi |
| 140 | 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70, 140 | 12 | 336 | 196 | 48 | 34 | abbondanti |
| 141 | 1, 3, 47, 141 | 4 | 192 | 51 | 92 | 34 | difettivi |
| 142 | 1, 2, 71, 142 | 4 | 216 | 74 | 70 | 34 | difettivi |
| 143 | 1, 11, 13, 143 | 4 | 168 | 25 | 120 | 34 | difettivi |
| 144 | 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144 | 15 | 403 | 259 | 48 | 34 | abbondanti |
| 145 | 1, 5, 29, 145 | 4 | 180 | 35 | 112 | 34 | difettivi |
| 146 | 1, 2, 73, 146 | 4 | 222 | 76 | 72 | 34 | difettivi |
| 147 | 1, 3, 7, 21, 49, 147 | 6 | 228 | 81 | 84 | 34 | difettivi |
| 148 | 1, 2, 4, 37, 74, 148 | 6 | 266 | 118 | 72 | 34 | difettivi |
| 149 | 1, 149 | 2 | 150 | 1 | 148 | 35 | primi, difettivi |
| 150 | 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150 | 12 | 372 | 222 | 40 | 35 | abbondanti |
| 151 | 1, 151 | 2 | 152 | 1 | 150 | 36 | primi, difettivi |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 152 | 1, 2, 4, 8, 19, 38, 76, 152 | 8 | 300 | 148 | 72 | 36 | difettivi |
| 153 | 1, 3, 9, 17, 51, 153 | 6 | 234 | 81 | 96 | 36 | difettivi |
| 154 | 1, 2, 7, 11, 14, 22, 77, 154 | 8 | 288 | 134 | 60 | 36 | difettivi |
| 155 | 1, 5, 31, 155 | 4 | 192 | 37 | 120 | 36 | difettivi |
| 156 | 1, 2, 3, 4, 6, 12, 13, 26, 39, 52, 78, 156 | 12 | 392 | 236 | 48 | 36 | abbondanti |
| 157 | 1, 157 | 2 | 158 | 1 | 156 | 37 | primi, difettivi |
| 158 | 1, 2, 79, 158 | 4 | 240 | 82 | 78 | 37 | difettivi |
| 159 | 1, 3, 53, 159 | 4 | 216 | 57 | 104 | 37 | difettivi |
| 160 | 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160 | 12 | 378 | 218 | 64 | 37 | abbondanti |
| 161 | 1, 7, 23, 161 | 4 | 192 | 31 | 132 | 37 | difettivi |
| 162 | 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 81, 162 | 10 | 363 | 201 | 54 | 37 | abbondanti |
| 163 | 1, 163 | 2 | 164 | 1 | 162 | 38 | primi, difettivi |
| 164 | 1, 2, 4, 41, 82, 164 | 6 | 294 | 130 | 80 | 38 | difettivi |
| 165 | 1, 3, 5, 11, 15, 33, 55, 165 | 8 | 288 | 123 | 80 | 38 | difettivi |
| 166 | 1, 2, 83, 166 | 4 | 252 | 86 | 82 | 38 | difettivi |
| 167 | 1, 167 | 2 | 168 | 1 | 166 | 39 | primi, difettivi |
| 168 | 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 21, 24, 28, 42, 56, 84, 168 | 16 | 480 | 312 | 48 | 39 | abbondanti |
| 169 | 1, 13, 169 | 3 | 183 | 14 | 156 | 39 | difettivi |
| 170 | 1, 2, 5, 10, 17, 34, 85, 170 | 8 | 324 | 154 | 64 | 39 | difettivi |
| 171 | 1, 3, 9, 19, 57, 171 | 6 | 260 | 89 | 108 | 39 | difettivi |
| 172 | 1, 2, 4, 43, 86, 172 | 6 | 308 | 136 | 84 | 39 | difettivi |
| 173 | 1, 173 | 2 | 174 | 1 | 172 | 40 | primi, difettivi |
| 174 | 1, 2, 3, 6, 29, 58, 87, 174 | 8 | 360 | 186 | 56 | 40 | abbondanti |
| 175 | 1, 5, 7, 25, 35, 175 | 6 | 248 | 73 | 120 | 40 | difettivi |
| 176 | 1, 2, 4, 8, 11, 16, 22, 44, 88, 176 | 10 | 372 | 196 | 80 | 40 | abbondanti |
| 177 | 1, 3, 59, 177 | 4 | 240 | 63 | 116 | 40 | difettivi |
| 178 | 1, 2, 89, 178 | 4 | 270 | 92 | 88 | 40 | difettivi |
| 179 | 1, 179 | 2 | 180 | 1 | 178 | 41 | primi, difettivi |
| 180 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180 | 18 | 546 | 366 | 48 | 41 | abbondanti, alt.composti |
| 181 | 1, 181 | 2 | 182 | 1 | 180 | 42 | primi, difettivi |
| 182 | 1, 2, 7, 13, 14, 26, 91, 182 | 8 | 336 | 154 | 72 | 42 | difettivi |
| 183 | 1, 3, 61, 183 | 4 | 248 | 65 | 120 | 42 | difettivi |
| 184 | 1, 2, 4, 8, 23, 46, 92, 184 | 8 | 360 | 176 | 88 | 42 | difettivi |
| 185 | 1, 5, 37, 185 | 4 | 228 | 43 | 107 | 42 | difettivi |
| 186 | 1, 2, 3, 6, 31, 62, 93, 186 | 8 | 384 | 198 | 60 | 42 | abbondanti |
| 187 | 1, 11, 17, 187 | 4 | 216 | 29 | 160 | 42 | difettivi |
| 188 | 1, 2, 4, 47, 94, 188 | 6 | 336 | 148 | 92 | 42 | difettivi |
| 189 | 1, 3, 7, 9, 21, 27, 63, 189 | 8 | 320 | 131 | 108 | 42 | difettivi |
| 190 | 1, 2, 5, 10, 19, 38, 95, 190 | 8 | 360 | 170 | 72 | 42 | difettivi |
| 191 | 1, 191 | 2 | 192 | 1 | 190 | 43 | primi, difettivi |
| 192 | 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 192 | 14 | 508 | 316 | 64 | 43 | abbondanti |
| 193 | 1, 193 | 2 | 194 | 1 | 192 | 44 | primi, difettivi |
| 194 | 1, 2, 97, 194 | 4 | 294 | 100 | 96 | 44 | difettivi |
| 195 | 1, 3, 5, 13, 15, 39, 65, 195 | 8 | 336 | 141 | 96 | 44 | difettivi |
| 196 | 1, 2, 4, 7, 14, 28, 49, 98, 196 | 9 | 399 | 203 | 84 | 44 | abbondanti |
| 197 | 1, 197 | 2 | 198 | 1 | 196 | 45 | primi, difettivi |
| 198 | 1, 2, 3, 6, 9, 11, 18, 22, 33, 66, 99, 198 | 12 | 468 | 270 | 60 | 45 | abbondanti |
| 199 | 1, 199 | 2 | 200 | 1 | 198 | 46 | primi, difettivi |
| 200 | 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200 | 12 | 465 | 265 | 80 | 46 | abbondanti |

**BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA**

Tra i numerosi possibili riferimenti sul tema trattato, si segnalano:


- Gardner M., *Mathematical Magic Show: More Puzzles, Games, Diversions…*, Vintage 1978
- Gardner M., *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*, Freeman 1989
- Conway J.H., Guy R.K., *The Book of Numbers,* Springer-Verlag 1996
- Du Sautoy M., *L'enigma dei numeri primi*, BUR 2005
- Jones G.A., Jones J.M., *Elementary Number Theory*, Springer 2005

- Salvalaggio G., *Dai numeri primi alla crittografia*, articolo sul Magazine n. 15 del sito www.matematicamente.it
- Politecnico di Torino, progetto *Polymath*, sito http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/index.htm