

QUANTI SOLIDI PLATONICI ESISTONO

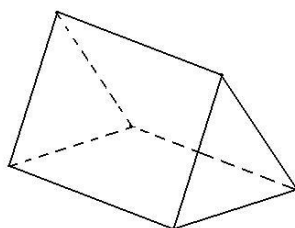
Di Carlo Sintini

Un poliedro è una figura geometrica solida, che viene detta **semplice** se è topologicamente simile¹ ad una sfera, cioè se è senza “buchi”. Si dice poi **regolare** o **platonico** se tutte le facce sono poligoni regolari tutti uguali fra loro, e tutti gli angoloidi interni sono uguali. Infine un poliedro si dice **archimedeo**, se è convesso.

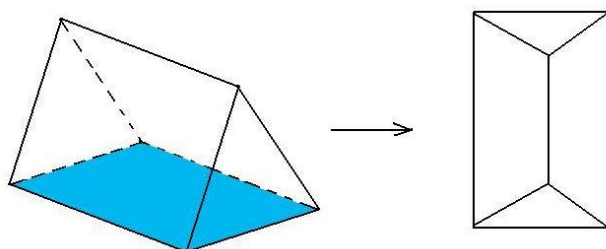
Indicando con V i vertici, con S gli spigoli e con F le facce di un poliedro semplice, e vediamo quanto vale l'espressione:

$$V - S + F$$

Prendiamo in considerazione, per esempio, un prisma.



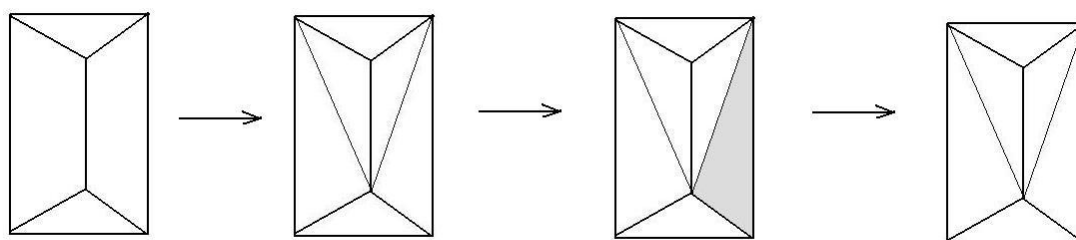
Togliamo al solido una faccia a piacere (per esempio quella di base, colorata).



E sviluppiamo per deformazione il poliedro sul piano (se il poliedro fosse più complesso non sarebbe neanche necessario mantenere i lati rettilinei).

Si ottiene una figura piana con lo stesso numero di spigoli e di vertici del poliedro originario, ma con una faccia in meno.

Ora tracciamo in ogni poligono con più di tre lati delle diagonali, in modo da ottenere un reticolato di triangoli.



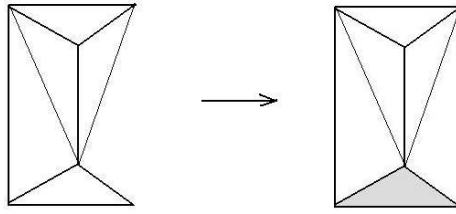
Poiché tracciando ogni diagonale aumenta di uno sia il valore di F che quello di S, l'espressione

$$V - S + F$$

rimane numericamente inalterata.

In ciascun triangolo può accadere che esso abbia **un solo lato sul contorno esterno** (come quello colorato nella figura precedente). E cancellando quel lato sparisce uno spigolo ed una faccia (e quindi $V - S + F$ rimane invariato).

¹ Due figure sono topologicamente equivalenti se è possibile passare dall'una all'altra semplicemente deformando opportunamente una delle due immaginandola realizzata con una sottile pellicola di gomma perfettamente elastica.



Oppure può accadere che abbia **due lati sul contorno esterno** (come nella figura qui sopra). Ed allora cancellando entrambi i lati S diminuisce di 2, V diminuisce di 1 ed F diminuisce di 1 (e ancora una volta $V - S + F$ rimane invariato).

Eliminando così successivamente i triangoli uno alla volta, si resta con un unico triangolo



Per il quale $V - S + F$ ha ancora lo stesso valore. E precisamente risulta $V = 3$, $S = 3$ e $F = 1$. Quindi per ogni poliedro semplice possiamo affermare che

$$(1) \quad \boxed{V - S + F = 2}$$

Che viene detta **formula di Eulero** per i poliedri.

Dopo questa premessa prendiamo in considerazione un poliedro regolare semplice ed indichiamo con n i **lati** e con r **gli spigoli di ciascuna faccia** (da non confondere con gli spigoli S dell'intero poliedro).

Il numero dei lati n moltiplicato per il numero r degli spigoli di ciascuna faccia è sempre uguale al doppio del numero S degli spigoli di tutto il poliedro. Infatti ogni spigolo delle facce sarà contato due volte: una volta per la faccia che stiamo considerando, ed un'altra volta per la faccia adiacente.

In formule si avrà

$$(2) \quad n F = 2 S \quad \rightarrow \quad F = \frac{2S}{n}$$

Inoltre in ogni vertice convergono r spigoli. Ed **il numero degli spigoli r di ciascuna faccia moltiplicato per il numero dei vertici V del poliedro è sempre uguale al doppio del numero S degli spigoli di tutto il poliedro.** Infatti ogni spigolo che converge in un vertice sarà contato due volte: una volta per lo spigolo che stiamo considerando, ed un'altra volta per lo spigolo adiacente.

In formule

$$(3) \quad r V = 2 S \quad \rightarrow \quad V = \frac{2S}{r}$$

Ora sostituiamo la (2) e la (3) nella (1) in modo da ottenere una relazione contenente la sola variabile S .

$$\frac{2S}{r} - S + \frac{2S}{n} = 2$$

Dividiamo entrambi i membri per $2S$

$$(4) \quad \boxed{\frac{1}{r} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{S}}$$

Inoltre ogni faccia del poliedro deve avere almeno 3 lati, ed ogni vertice deve avere almeno 3 spigoli, cioè deve essere

$$\begin{cases} n \geq 3 \\ r \geq 3 \end{cases}$$

contemporaneamente.

Distinguiamo le seguenti tre possibilità:

- 1) $\begin{cases} n > 3 \\ r > 3 \end{cases}$ supponiamo allora $\begin{cases} n = 4 \\ r = 4 \end{cases}$ Sostituendo nella (4) avremo

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{S} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{S} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{S} = 0$$

che è chiaramente impossibile a meno di non supporre un numero infinito di spigoli S. Con n ed r maggiori di 4 avremmo addirittura ottenuto valori negativi per 1/S.

- 2) $\begin{cases} n = 3 \\ r \geq 3 \end{cases}$ sostituendo nella (4) avremo $\frac{1}{r} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{S}$ cioè $\boxed{\frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{S}}$

inoltre, poiché 1/S è sicuramente positivo, è anche $\frac{1}{r} - \frac{1}{6} > 0$ da cui si ricava

$r < 6$ (ma deve anche essere $r \geq 3$) e dunque i possibili valori (interi) di r sono

$$3, 4 \text{ e } 5. \text{ Sostituendoli nell'ultima relazione incorniciata, si ha } \begin{cases} r = 3 \rightarrow S = 6 \\ r = 4 \rightarrow S = 12 \\ r = 5 \rightarrow S = 30 \end{cases}$$

che corrispondono rispettivamente al **tetraedro**, **all'ottaedro** e **all'icosaedro**.

- 3) $\begin{cases} n \geq 3 \\ r = 3 \end{cases}$ sostituendo nella (4) avremo $\frac{1}{3} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{S}$ cioè $\boxed{\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{S}}$

inoltre, poiché 1/S è sicuramente positivo, è anche $\frac{1}{n} - \frac{1}{6} > 0$ da cui si ricava

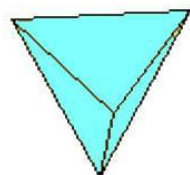
$n < 6$ (ma deve anche essere $n \geq 3$) e come prima i possibili valori (interi) di r sono

3, 4 e 5. Ora ricavando S dall'ultima relazione incorniciata, si ha $S = \frac{6n}{6-n}$ da cui si

$$\text{ottiene } \begin{cases} n = 3 \rightarrow S = 6 \\ n = 4 \rightarrow S = 12 \\ n = 5 \rightarrow S = 30 \end{cases} \text{ che corrispondono rispettivamente al } \mathbf{tetraedro}, \mathbf{al cubo} \text{ e } \mathbf{al}$$

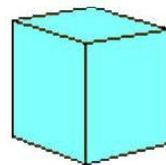
dodecaedro.

Concludendo si ottengono complessivamente solo **cinque poliedri regolari** possibili, detti anche solidi **platonici**. Ecco le loro configurazioni



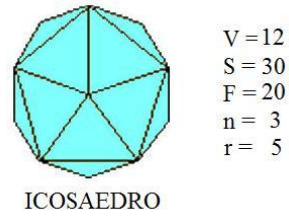
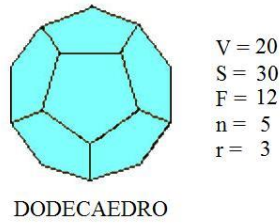
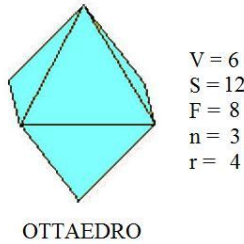
TETRAEDRO

$$\begin{aligned} V &= 4 \\ S &= 6 \\ F &= 4 \\ n &= 3 \\ r &= 3 \end{aligned}$$



CUBO
(o ESAEDRO)

$$\begin{aligned} V &= 8 \\ S &= 12 \\ F &= 6 \\ n &= 4 \\ r &= 3 \end{aligned}$$



Ma esistono anche i poliedri archimedei

Si possono troncare i 5 poliedri platonici con dei piani, in modo però che **tutti gli spigoli abbiano la stessa lunghezza**.

Si ottengono così i poliedri **archimedei** o **poliedri semiregolari**. Sono in tutto tredici:

