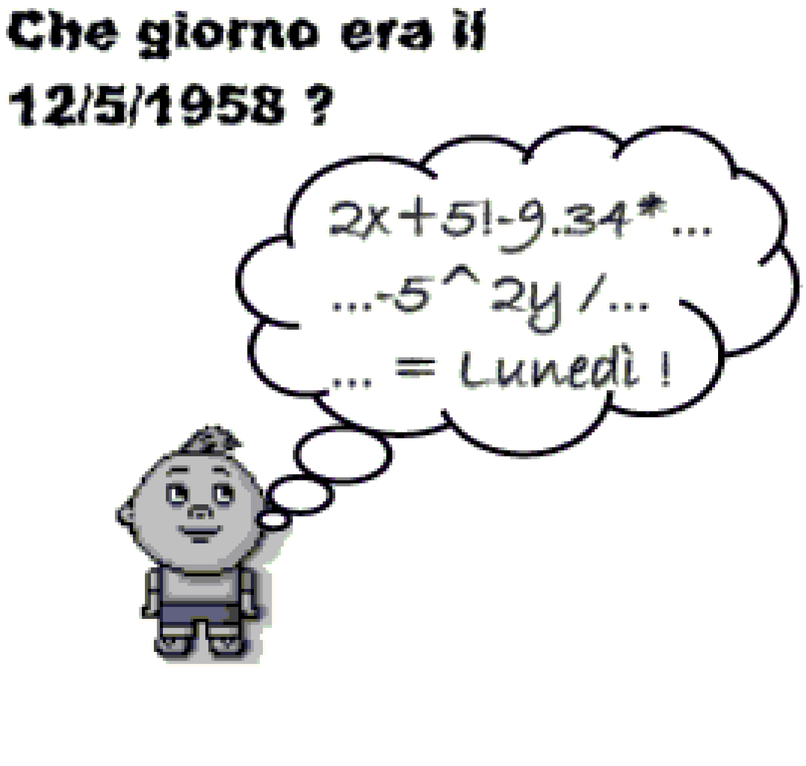
Calendario Perpetuo Mentale



Di Flavio Cimolin

18/01/2003

matematicamente.it

1 - Introduzione

Si chiama calendario perpetuo il procedimento che permette di calcolare in quale giorno della settimana cada una qualsiasi data stabilita.
Tramite un computer, conoscendo l'esatto sistema con cui viene generato il calendario, si può elaborare con facilità un programma che fornisca istantaneamente il risultato. Esistono inoltre varie tabelle, talvolta anche abbastanza complicate, che permettono di ottenere il giorno seguendo un particolare procedimento meccanico che sembra più magico che matematico.
Per svolgere il calcolo a mente il compito si rivela a prima vista decisamente difficile, e questo soprattutto perché il nostro calendario è tutt'altro che semplice.

Qui di seguito esporrò un metodo mentale per eseguire la suddetta operazione, basato sull'aritmetica modulare. Appreso il procedimento, con un po' di esercizio, ti basteranno appena una decina di secondi per rispondere alla domanda "Che giorno della settimana era il 27/5/1765?" Naturalmente esistono altri metodi differenti da quello qui descritto, forse anche più semplici, ma questo mi sembra ben impostato e relativamente facile da comprendere.
Le prossime lezioni sono ancora introduttive, e se già pensi di conoscerle puoi saltare direttamente al punto *4 - Introduzione al procedimento*.

2 - Le regole del nostro calendario

Per applicare il procedimento è importante capire bene come è articolato il nostro complesso calendario.
Fino al 1582 si contavano gli anni secondo il calendario Giuliano, che prescriveva di assegnare 366 giorni anziché 365 agli anni divisibili per 4. Fu scoperto, però, che la lunghezza effettiva degli anni è leggermente superiore ai 365 giorni e 6 ore che prevedeva il calendario Giuliano. Il vero anno è lungo circa 11 minuti e 14

secondi in più, che propagati nei quindici secoli precedenti portano ad un errore tuttaltro che rilevante.
E’ come quando usiamo un orologio che ritarda anche solo di 1 minuto al giorno: all’inizio sembra essere adatto al nostro modo di vedere passare il tempo, ma bastano due mesi perché si scopra essere indietro di un’ora, e dopo un anno esso sarà addirittura indietro di 6 ore! In qualche modo, se non vogliamo cambiare orologio, dobbiamo per forza fare delle correzioni all’ora di tanto in tanto. Lo stesso vale per il calendario.
Per questo il Papa Gregorio, nel 1582 decise di cambiare le regole del calendario (fino allora detto Giuliano) per "riparare" l'errore temporale che ammontava ormai ad una decina di giorni. In questo modo, eliminando i giorni "sbagliati" che non avrebbero dovuto esserci, aveva fatto seguire al 4 ottobre del 1582 il 15 ottobre, stabilendo così le nuove regole:

- Un anno comune ha 365 giorni
- Un anno divisibile per 4 ne ha 366 (è bisestile)
- Un anno divisibile per 100 non è considerato bisestile
- Un anno divisibile per 400 è invece considerato bisestile

Come è facile immaginare, il metodo per il calcolo del giorno della settimana di una data qualsiasi è completamente differente se in quella data si utilizzava il calendario Giuliano e quello Gregoriano. In questa sezione ci limiteremo ad analizzare il calendario Gregoriano, dato che è abbastanza discutibile l’utilità di calcolare quale fosse il giorno della settimana di una data di quello Giuliano.

Una prima cosa che abbiamo imparato è quindi che se qualcuno ti chiede: “Che giorno era il 7 ottobre 1582?”, avrete ben poche speranze di rispondere, dato che quel giorno non è mai esistito!

3 - L’aritmetica modulare

Sebbene la parola possa apparire incomprensibile ai non matematici, in realtà in concetto è familiare a tutti, e ognuno di noi ne ha a che fare quando guarda l'orologio o conta sulle dita di una mano. Se ad esempio ti chiedo: "Dove sarà la lancetta dei minuti del tuo orologio fra 1 ora?", o "Che ora sarà fra esattamente 48 ore?", o ancora "Che giorno della settimana sarà fra 3 settimane?". La risposta è sempre la stessa, cioè che tutto sarà di nuovo esattamente com'è adesso.

In matematica la proprietà di essere nella stessa condizione dopo un intervallo fisso di n passi è detta **congruenza modulo n**. Quindi i minuti sono congruenti modulo 60, le ore modulo 24, i giorni della settimana modulo 7. La proprietà principale delle congruenze modulo n è che si possono applicare per semplificare le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione: di quanti minuti si sposta la lancetta dei minuti se passano 65 minuti? Di 5 minuti, ed il risultato si può ottenere dall'operazione **mod**: 65 mod 60 = 5.
L'operazione **a mod b** significa: qual è il resto della divisione fra a e b? Non ci interessa il risultato, ma solo il resto!

Un ultimo esempio per chiarire il concetto, applicato proprio all'argomento in questione: "Che giorno della settimana sarà fra 49, 71, n giorni?" Basta risolvere i calcoli modulo 7: 49 mod 7 = 0, quindi sarà lo stesso giorno che è oggi; 71 mod 7 = 1, quindi sarà lo stesso giorno di domani; in generale n mod 7 dice di quanti giorni mi devo spostare da oggi per avere il risultato.
Ora puoi iniziare ad apprendere il procedimento: avrai bisogno di imparare a memoria alcuni dati (possono bastare anche solo i 12 valori per i mesi!), ma non scoraggiarti, perché alla fine la soddisfazione sarà notevole!

4 - Introduzione al procedimento

Il procedimento si basa completamente sulle regole fondamentali dell'aritmetica modulare. In particolare è importante ricordare che si può aggiungere o sottrarre ad un numero (in un modulo k qualsiasi) qualunque multiplo di k stesso. Dato che siamo interessati al calendario, per il momento lavoreremo sempre in aritmetica modulo 7, come 7 sono i giorni della settimana.
Associamo fin dall'inizio ogni risultato modulo 7 ad un giorno della settimana:

0	Domenica
1	Lunedì
2	Martedì
3	Mercoledì
4	Giovedì
5	Venerdì
6	Sabato

In questo modo qualsiasi numero può essere ricondotto ad un giorno della settimana. Ad esempio 47 è Venerdì, perché 47 mod 7 = 5 (dato che 47 diviso per 7 fa 6 con resto 5), e 5 è Venerdì; ancora 34 è Sabato perché 34 mod 7 = 6.
E' molto importante avere ben presente questa prima corrispondenza fra i giorni ed i primi 7 numeri naturali, dato che sarà la base di tutto.
Si può a questo punto suddividere il calcolo in due parti: nella prima si determinerà a quale giorno della settimana corrisponde una data gg/mm di un ipotetico anno che inizi di Lunedì (quindi con Lunedì 1 Gennaio), e nella seconda si determinerà con quale giorno inizia effettivamente l'anno.

5 - Prima parte

Per determinare a quale giorno della settimana corrisponde una data, occorre anzitutto vedere con che giorno inizia ogni singolo mese di un ipotetico anno che inizia per Lunedì. Una tabella che ora non dovreste aver problemi a comprendere potrà essere molto utile al nostro scopo (n.b: l'anno è di 365 giorni):

Mese	Somma dall'1/1	Giorno	N da ricordare
Gennaio	1	1	0
Febbraio	32	4	3
Marzo	60	4	3
Aprile	91	0	6
Maggio	121	2	1
Giugno	152	5	4
Luglio	182	0	6
Agosto	213	3	2
Settembre	244	6	5
Ottobre	274	1	0
Novembre	305	4	3
Dicembre	335	6	5

A questo punto occorre memorizzare i 12 numeri relativi ai mesi. Nessuno può dire di non essere capace perché basta veramente scriverli in un foglietto e leggerli per neanche 10 minuti, pensandoci con attenzione, magari rifacendo la stessa cosa il giorno dopo; e già saranno memorizzati nel più profondo della mente (provare per credere).
Chiameremo d'ora in poi N(mm) il numero corrispondente al mese mm (ad esempio aprile è il mese 04, dunque N(04)=6).

Per ottenere il giorno della settimana in cui cade la data gg/mm, (sempre ipotizzando che il 1 gennaio sia Lunedì), basterà a questo punto fare la somma gg + N(mm) e ridurla modulo 7. Questo perché il numero relativo ad ogni mese rappresenta il "giorno 0" di quel mese, e quindi ogni giorno in più aggiunto ad esso fornisce il vero giorno della settimana della data.

Bisogna sempre ricordare inoltre che **se l'anno è bisestile, nel caso il mese in questione sia da Marzo in poi, occorre aggiungere 1 al valore**.
Questa è una regola che “rovina” un po’ i calcoli, che altrimenti sarebbero molto più semplici, ma tutto sommato basterà rifletterci un attimo per ricordarsi di aggiungere quell’uno agli anni bisestili.

Facciamo un esempio: per conoscere il giorno in cui cade il 24 Settembre di un anno che inizia per Lunedì, basta fare: 24 + N(settembre) = 24 + 5 = 29 = 1 (mod 7). Quindi il 24 Settembre di quell'anno è Lunedì.
Se però sappiamo che quell’anno è bisestile, allora il risultato sarebbe 24 + 5 + 1 = 30 = 2 (mod 7), e dunque il giorno è Martedì.

Una volta imparati a memoria questi numeri relativi ai mesi e conoscendo con che giorno inizia l'anno in questione, è veramente semplice determinare in pochi istanti il giorno della settimana di una qualsiasi data di quell’anno. Il calcolo può essere velocizzato ulteriormente utilizzando immediatamente anziché il giorno del mese, il suo valore modulo 7 (questo è il bello dell’aritmetica modulare!).
Ad esempio, per calcolare il giorno in cui cade il 24 Settembre di un anno che inizia per Lunedì, basta fare (24 mod 7) + (5) = 3 + 5 = = 8 mod 7 = 1, ovvero Lunedì.

Mentalmente questi passaggi, con un po' di allenamento, diventano istantanei, e quindi è bene imparare a utilizzare e a maneggiare i trucchetti dell'aritmetica modulare al più presto.

Per chi volesse fermarsi a questo punto, riporto in una tabella i valori che bisogna addizionare al numero ottenuto per avere valori corretti, limitati agli anni più vicini al nostro: l'operazione da fare per ottenere il giorno della data gg/mm/aaaa risulterà quindi gg + N(mm) + K(aaaa) mod 7.

Anno	**K da ricordare**
1996	0
1997	2
1998	3
1999	4
2000	5
2001	0
2002	1
2003	2
2004	3
2005	5
2006	6

Ad esempio, per calcolare che giorno era il 26/7/2000, basta fare:

$$(26) + (6 + 1) + (5)$$

(l'1 è aggiunto perché l'anno è bisestile), che risolto a mente può semplicemente essere fatto così: 5 -1 +1 +5 = 10 = 3, quindi si tratta di un Mercoledì. Il 14 Marzo 1997 invece era un Venerdì perché 0 + 3 + 2 = 5.

6 - Esercizi sulla prima parte

Bene, è ora di mettersi al lavoro e di provare a calcolare qualche data a mente. Non preoccuparti della velocità per il momento, perché quella verrà da sé con il tempo. L'importante è a questo punto esser certi di aver capito bene come funziona il procedimento mentale, per poi potersi dedicare a fare i passaggi a mente sempre più velocemente.
Ricordati quando puoi di usare le scorciatoie dell'aritmetica modulare: ogni volta che c'è un 7 lo puoi togliere (vale 0), così come i suoi multipli 14, 21, 28; allo stesso modo se trovi un 8 pensa subito 1, mentre se trovi 6 pensi -1, e così via…
Ultimo avvertimento, non dimenticare di aggiungere un 1 se l'anno è bisestile ed il mese è successivo a Febbraio!
Ora sei pronto: prova a calcolare in che giorno della settimana cadono queste date (le soluzioni sono nella prossima pagina):

- 27/5/1998
- 12/10/2004
- 7/1/2000
- 14/2/1996
- 31/12/1999

Ed ecco le soluzioni:

- Mercoledì
- Martedì
- Venerdì
- Mercoledì
- Venerdì

Avevi calcolato il giorno giusto?

7 - Seconda parte

Scopo di questa seconda sezione è di conoscere il giorno della settimana del 1 Gennaio di ogni anno. Per la precisione perché i calcoli funzionino al meglio sarà utile ottenere l'ipotetico giorno 0 Gennaio, infatti sommando ad esso (analogamente a come era stato fatto fra mesi e giorni) il numero già trovato si ottiene direttamente il risultato.
Ancora una volta occorre fare un'altra separazione (ma è l'ultima volta!), infatti conviene sapere con che giorno della settimana inizia il centenario in questione e poi aggiungere il resto. La parte relativa al centenario è decisamente facile, infatti, secondo il calendario Gregoriano i possibili giorni iniziali sono solo quattro, e si ottengono dal risultato modulo 4 del centenario secondo questa regola:

Centenario	Giorno iniziale	Numero C da ricordare
4k (1600-2000-2400-...)	Sabato	5-6
4k+1 (1700-2100-2500-...)	Venerdì	4
4k+2 (1800-2200-2600-...)	Mercoledì	2
4k+3 (1900-2300-2700-...)	Lunedì	0

I centenari bisestili sono particolari (compaiono due valori), perché durante gli stessi viene aggiunto un giorno.
In altre parole, dato che gli anni 1600, 2000, 2400, … sono di per sé bisestili, per essi e per essi soli si userà il 5, mentre già a partire

dagli anni immediatamente successivi si userà il 6 (1601, 1602, 2001, ...).
A meno che non si stia calcolando una data degli anni 1600, 2000, 2400, … il numero da conoscere relativo a quel centenario è quindi di fatto 6.

A questo punto siamo veramente ad un passo dall'apprendimento del metodo per determinare il giorno della settimana di una data qualsiasi: manca ormai solo la determinazione della costante relativa alle ultime due cifre dell'anno.
Esse conducono ad un calcolo un po' più complesso, in quanto la serie di giorni di inizio anno, essendoci un bisestile ogni 4, si ripete ogni 28 anni. Per convincervi di questo provate a pensare a quando è caduto il vostro compleanno nel passato o quando cadrà nel futuro: se non ci fossero anni bisestili ogni 7 anni si ripeterebbe un ciclo, ma dato che ogni 4 anni c'è "un salto", il ciclo è dato dal minimo comune multiplo di 4 e 7, ed esso è 28. Al di là di questo conto di matematica astratta, quello che interessa sapere è che la storia si fa un po' più complessa a causa dei cicli di ordine 28 anziché 7.

Per questo motivo, la prima cosa da fare è ridurre l'anno modulo 28 (basta sottrarre ogni volta 30 ed aggiungere 2, finché non si ottiene un numero minore di 28, questo è molto facile). A questo punto, dato l'anno aa mod 28, basta eseguire l'operazione:

$$aa + [(aa - 1) / 4] \bmod 7$$

dove $[(aa - 1) / 4]$ è la parte intera della divisione di aa-1 per 4.

In effetti questo calcolo non è proprio facile da fare le prime volte, ma con un po' di allenamento e utilizzando il più possibile gli accorgimenti precedentemente descritti, si può fare anche in pochi secondi.

Se poi volete essere davvero efficienti il consiglio sarebbe di imparare a memoria questi 28 valori (ma ripeto che non è assolutamente necessario), che sono:

Anno modulo 28	Valore K(aa) da ricordare
1	1
2	2
3	3
4	4
5	6
6	0
7	1
8	2
9	4
10	5
11	6
12	0
13	2
14	3
15	4
16	5
17	0
18	1
19	2
20	3
21	5
22	6
23	0
24	1
25	3
26	4
27	5
28-0	6

A questo punto abbiamo tutte le informazioni per ottenere il giorno della settimana di qualsiasi data appartenente al calendario Gregoriano. I calcoli presentati possono apparire al primo impatto difficili da eseguire a mente, ma basta un po' di pratica per sbrigarli in pochi secondi, ricordando che in qualunque punto della somma dei valori, per semplificare i calcoli, si può sottrarre il numero 7.

8 - Ricapitolazione del procedimento

Ecco qui un semplice schemino riassuntivo del procedimento mentale da eseguire per calcolare il giorno della settimana della data **gg/mm/AAaa**:

- Calcolare il valore **G** relativo al giorno del mese, ovvero gg mod 7
- Calcolare il valore **N(mm)** relativo al mese
- Calcolare il valore K relativo all'anno **K(aa)**
- Calcolare il valore **C(AA)** relativo al centenario
- Stabilire con le regole del calendario se l'anno è bisestile, e se lo è porre **B = 1**, altrimenti **B = 0**
- Il giorno della settimana è **G + N + K + C + B**

9 - Ricapitolazione delle tabelle

Tabella relativa alla determinazione della costante del mese:

Mese	N
Gennaio	0
Febbraio	3
Marzo	3
Aprile	6
Maggio	1
Giugno	4
Luglio	6
Agosto	2
Settembre	5
Ottobre	0
Novembre	3
Dicembre	5

Tabella relativa alla determinazione della costante del secolo:

Centenario	Giorno iniziale	Numero C da ricordare
4k (1600-2000-2400-...)	Sabato	5-6
4k+1 (1700-2100-2500-...)	Venerdì	4
4k+2 (1800-2200-2600-...)	Mercoledì	2
4k+3 (1900-2300-2700-...)	Lunedì	0

Tabella relativa alla determinazione della costante dell'anno (ultime due cifre ridotte modulo 28):

Anno modulo 28	**Valore K(aa) da ricordare**
1	1
2	2
3	3
4	4
5	6
6	0
7	1
8	2
9	4
10	5
11	6
12	0
13	2
14	3
15	4
16	5
17	0
18	1
19	2
20	3
21	5
22	6
23	0
24	1
25	3
26	4
27	5
28-0	6

10 - Esempi

1) *Data da cercare: 22/11/1982*

G = 22 mod 7 = 1
N(11) = 3
K(82) = K(82 mod 28) = K(26) = 26 + [25/4] mod 7 = -2 + 6 = 4
C(19) = 0
L'anno non era bisestile, quindi facendo la somma dei valori si ha:
(1 + 3 + 4) mod 7 = 1
Il giorno della settimana era quindi Lunedì.

2) *Data da cercare: 1/3/1624*

G = 1
N(3) = 3
K(24) = 24 + [23/4] mod 7 = 3 + 5 mod 7 = 1
C(16) = 6 (sarebbe 5 solo se ci trovassimo nel 1600 esatto)
L'anno era bisestile, quindi occorre aggiungere 1 alla somma dei valori:
1 + (1 + 3 + 1 + 6) mod 7 = 5, ovvero Venerdì.

3) *Data da cercare: 27/8/2193*

G = 27 mod 7 = -1
N(8) = 2
K(93) = K(93 mod 28) = K(9) = 9 + [8/4] mod 7 = 2 + 2 = 4
C(21) = 4
L'anno non è fra i bisestili, quindi facendo la somma dei valori si ha:
(-1 + 2 + 4 + 4) mod 7 = 2
Il giorno della settimana sarà quindi Martedì.

4) *Data da cercare: 12/5/1958*

G = 12 mod 7 = -2
N(5) = 1
K(58) = K(58 mod 28) = K(2) = 2
C(19) = 0
L'anno non era bisestile, quindi la somma dei valori è:
(-2 + 1 + 2) mod 7 = 1, ovvero Lunedì.

11 - Esercizi

Prova ad esercitarti calcolando il giorno della settimana di queste 5 date:

- 14/6/1921
- 30/9/2354
- 11/1/2111
- 14/2/4124
- 29/2/2000

Ecco le soluzioni dei cinque esercizi:

- 14/6/1921 --> Martedì
- 30/9/2354 --> Giovedì
- 11/1/2111 --> Domenica
- 14/2/4124 --> Lunedì
- 29/2/2000 --> Martedì

A questo punto hai appreso appieno il procedimento per il calcolo della data, ma per riuscire ad eseguire le operazioni in tempi brevi ti occorrerà ancora parecchio allenamento. Vedrai però come stupirai i colleghi e gli amici, quando invece di tirare fuori l'agendina, dirai immediatamente il giorno della settimana in modo assolutamente naturale e ineccepibile. Per esercitarti inizia a chiedere a tutti se scommettono qualcosa sul fatto che tu puoi "indovinare" in quale giorno della settimana sono nati!