PCUT

Sul valore del limite di alcune particolari funzioni

On the value of the limit of some particular functions

di Pasquale Cutolo

SOMMARIO. In questo studio proviamo a definire il valore del limite di alcune particolari funzioni, utilizzando ripetutamente il primo ed il secondo teorema integrale di Cauchy.

ABSTRACT. *In this paper we try to define the value of the limit of some particular functions, using repeatedly the First and the Second Integral Theorem of Cauchy*

1.0. Consideriamo l'integrale $\int_c e^{iz}dz$, ed applichiamo il 1° teorema integrale di Cauchy lungo una curva chiusa *c*, costituita da una semicirconferenza, di raggio *R*, posta nel semipiano y≥0, ed avente il centro coincidente con l'origine degli assi cartesiani, dal tratto rettilineo (-R,R), nonché dalla semicirconferenza di raggio ε.

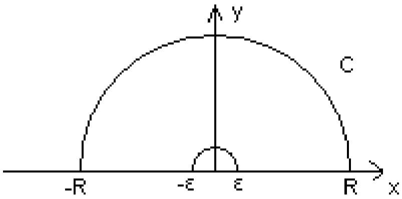

Figura 1

Abbiamo, quindi:

$$(1)\qquad \int_{-R}^{R} e^{ix}dx + \int_0^{\pi} e^{i\,\mathrm{Re}^{i\varphi}}\,\mathrm{Re}^{i\varphi}\,id\varphi + \int_{\pi}^{0} e^{i\varepsilon e^{i\varphi}}\,\varepsilon e^{i\varphi} id\varphi = 0\text{, dove } i=\sqrt{-1}$$

Il 3° integrale del primo membro della (1), tende a 0 per $\varepsilon \to 0$;
il 2° integrale del primo membro della (1) è dato da:

$$(2)\qquad \int_0^{\pi} e^{i\,\mathrm{Re}^{i\varphi}}\,\mathrm{Re}^{i\varphi}\,id\varphi = \int_0^{\pi} e^{iR(Cos\varphi+iSin\varphi)}\,\mathrm{Re}^{i\varphi}\,id\varphi = \int_0^{\pi} e^{iR\cos\varphi - R\sin\varphi}\,\mathrm{Re}^{i\varphi}\,id\varphi$$

Per $0 \le \varphi \le \pi, Sin\varphi \ge 0$, e quindi, per R$\to\infty$, l'ultimo integrale della (2) tende a zero.
Pertanto:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{iz}dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz}dz = \int_0^{\infty} 2Coszdz = 0\text{, cioè:}$$

$$(3)\qquad \int_0^{\infty} Coszdz = 0$$

1.1. Ora applichiamo il 1° teorema integrale di Cauchy allo stesso integrale $\int_c e^{iz}dz$ lungo una curva chiusa *c*, costituita da un arco di circonferenza, di raggio *R*, posto nel 1° quadrante, e dai due lati del settore circolare.

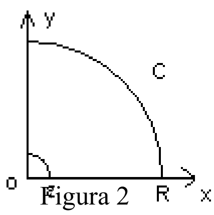

Figura 2

Abbiamo, quindi:

$$(4)\qquad \int_0^{R} e^{ix}dx + \int_0^{\pi/2} e^{i\,\mathrm{Re}^{i\varphi}}\,\mathrm{Re}^{i\varphi}\,id\varphi + \int_R^0 e^{-t}idt = 0$$

Il valore dell'integrale lungo l'arco della circonferenza di raggio ε, per $\varepsilon \to 0$, tende a zero.
Per R$\to\infty$, il 2° integrale del primo membro della (4) tende a 0, mentre il 3° integrale del primo membro della (4) vale *–i*; quindi, dalla (4) ricaviamo:

$$(5)\qquad \int_0^{\infty} e^{ix}dx = \int_0^{\infty} Cosxdx + i\int_0^{\infty} Sinxdx = i$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie, otteniamo:

(5a) $\int_0^\infty Cosxdx = 0$

(5b) $\int_0^\infty Sinxdx = 1$

(cfr.[3, pag.12])

Inoltre, dalla (5) ricaviamo: $\lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{ix} dx = \lim_{R \to \infty} \frac{e^{iR} - 1}{i} = i$, cioè:

(6) $\lim_{R \to \infty} e^{iR} = 0$

da cui:

(6a) $\lim_{R \to \infty} CosR = 0$, $\lim_{R \to \infty} SinR = 0$

Osserviamo che:

$\int_0^R Cosxdx = SinR$, $\int_0^R Sinxdx = -(CosR - 1)$

Passando al limite per R$\to \infty$, utilizzando le (5a) e (5b), ritroviamo le (6a).

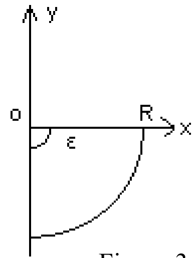

Figura 3

1.2. Ora, applichiamo il 1° teorema integrale di Cauchy all'integrale $\int_c e^{-iz} dz$ lungo la curva chiusa *c*, costituita dallo stesso arco di circonferenza, di raggio R, posto nel quarto quadrante, e dai due lati del settore circolare.

Operando, abbiamo:

(7) $\int_R^0 e^{-ix} dx + \int_{-\pi/2}^0 e^{-i\mathrm{Re}^{i\varphi}} \mathrm{Re}^{i\varphi} id\varphi + \int_0^{-R} e^t idt = 0$

Il valore dell'integrale lungo l'arco della circonferenza di raggio ε, per $\varepsilon \to 0$, tende a zero.

Ora, $\int_0^{-R} e^t idt = -\int_0^R e^{-t} idt$, e, quindi: $-\int_0^\infty e^{-t} idt = -i$;

$\int_{-\pi/2}^0 e^{-i\mathrm{Re}^{i\varphi}} \mathrm{Re}^{i\varphi} id\varphi = \int_0^{\pi/2} e^{-i\mathrm{Re}^{-i\varphi}} \mathrm{Re}^{-i\varphi} id\varphi = \int_0^{\pi/2} e^{-iR(Cos\varphi - iSin\varphi)} \mathrm{Re}^{-i\varphi} id\varphi$;

$\lim_{R \to \infty} \int_0^{\pi/2} e^{-iRCos\varphi - RSin\varphi} \mathrm{Re}^{-i\varphi} id\varphi = 0$

Inoltre, abbiamo:

$\lim_{R \to \infty} \int_R^0 e^{-ix} dx = i$; ma $\int_R^0 e^{-ix} dx = \frac{e^{-iR} - 1}{i}$

e quindi, passando al limite per R$\to \infty$, ricaviamo:

(8) $\lim_{R \to \infty} e^{-iR} = 0$

1.3. Una conferma della (5a) la troviamo utilizzando la seguente applicazione.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iz} dz}{e^z - 1} = \int_0^\infty \frac{e^{iz} dz}{e^z - 1} - \int_0^\infty \frac{e^{-iz} e^z dz}{e^z - 1} = \int_0^\infty \frac{e^{iz} dz}{e^z - 1} - \int_0^\infty \frac{e^{-iz} dz}{e^z - 1} - \int_0^\infty e^{-iz} dz$$

Ora, $\int_0^\infty e^{-iz} dz = \int_0^\infty Coszdz - i\int_0^\infty Sinzdz$

Utilizzando le (5a) e (5b), abbiamo

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iz} dz}{e^z - 1} = \int_0^\infty \frac{2iSinzdz}{e^z - 1} + i$$

da cui:

(9) $$\int_0^\infty \frac{Sinzdz}{e^z-1} = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iz}dz}{e^z-1} - \frac{1}{2}$$

Applicando il 2° teorema integrale di Cauchy all'integrale $\int_c \frac{e^{iz}}{e^z-1}dz$, lungo una curva chiusa *c*, come quella considerata al punto 1.1 (fig.1), troviamo:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}dx}{e^x-1} + \int_\pi^o \frac{e^{i\varepsilon e^{i\varphi}}\varepsilon e^{i\varphi}id\varphi}{e^{\varepsilon e^{i\varphi}}-1} + \int_0^\pi \frac{e^{i\operatorname{Re}^{i\varphi}}\operatorname{Re}^{i\varphi}id\varphi}{e^{\operatorname{Re}^{i\varphi}}-1} =$$

(10) $$= 2\pi i \lim_{z\to z_k} \sum_{k\ge 1} \frac{z-z_k}{e^z-1}e^{iz} \;;\; z_k = 2\pi ik,\ \text{k=1, 2, 3, …}$$

Il 3° integrale del primo membro della (10), per $R\to\infty$, tende a zero;
il 2° integrale del primo membro della (10), per $\varepsilon\to 0$, è uguale a $(-i\pi)$.
Il 2° membro della (10) è uguale a $2\pi i/(e^{2\pi}-1)$.
Pertanto, dalla (10) ricaviamo:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}dx}{e^x-1} = i\pi + \frac{2\pi i}{e^{2\pi}-1},$$

che sostituita nella (9), fornisce:

(11) $$\int_0^\infty \frac{Sinzdz}{e^z-1} = \frac{1}{2}(-1+\pi Coth\pi)$$

Abbiamo ottenuto la (11) utilizzando le (5a) e (5b).
Ma la (11) è una formula nota (vedi [1, pag. 481]) e ciò dimostra che le (5a) e (5b) sono formule vere ed utilizzabili.

2.0. Consideriamo l'integrale $\int_c z^{i-1}dz$, ed applichiamo il 1° teorema integrale di Cauchy lungo la curva chiusa c, di cui al punto 1.1 (figura 1)
Operando, abbiamo:

(12) $$\int_{-R}^R x^{i-1}dx + \int_0^\pi (\operatorname{Re}^{i\varphi})^{i-1}\operatorname{Re}^{i\varphi}id\varphi - \int_0^\pi (\varepsilon e^{i\varphi})^{i-1}\varepsilon e^{i\varphi}id\varphi = 0\,;$$

Per $R\to\infty$, il 2° integrale del primo membro della (12) è nullo, e per $\varepsilon\to 0$, anche il 3° integrale del 1° membro della (12) è nullo.

$$\int_{-R}^R x^{i-1}dx = \int_\varepsilon^R x^{i-1}dx + \int_R^\varepsilon (-x)^{i-1}(-dx) = (1-e^{-\pi})\int_\varepsilon^R x^{i-1}dx\,;$$

Sostituendo nella (12), troviamo:

$$(1-e^{-\pi})\int_\varepsilon^R x^{i-1}dx = -i(1-e^{-\pi})(R^i-\varepsilon^i)$$

cioè:

$$\int_\varepsilon^R x^{i-1}dx = -i(R^i-\varepsilon^i)$$

Passando al limite per $R\to\infty$, ed $\varepsilon\to 0$, e ricordando che

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^i = \lim_{R\to\infty}R^{-i},\ \varepsilon = 1/R,\ \text{troviamo:}$$

(13) $$\int_0^\infty x^{i-1}dx = -i\lim_{R\to\infty}(R^i-R^{-i})$$

Ora, $\int_0^\infty x^{i-1}dx = (x=e^t) = \int_{-\infty}^\infty e^{it}dt = \int_0^\infty e^{it}dt + \int_0^\infty e^{-it}dt = 2\int_0^\infty Costdt$;
utilizzando la (5a), dalla (13) abbiamo:

(14) $$\lim_{R\to\infty}(R^i-R^{-i}) = 0,\ \text{cioè:}\ \lim_{R\to\infty}(e^{i\ln R}-e^{-i\ln R}) = 0$$

Quindi

$$(15)\qquad \lim_{R\to\infty} Sin(\ln R) = 0$$

2.1. Consideriamo, ora, l'integrale $\int_\varepsilon^1 x^{i-1}dx$

Operando, abbiamo:

$$\int_\varepsilon^1 x^{i-1}dx = (\frac{x^i}{i})_\varepsilon^1 = \frac{e^{i\ln 1} - e^{i\ln\varepsilon}}{i} = \frac{1-e^{i\ln\varepsilon}}{i};$$

applicando le (5a) e (5b), abbiamo:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^{i-1}dx = \int_0^1 x^{i-1}dx = (\mathrm{x} = e^{-t}) = \int_0^\infty e^{-it}dt = \int_0^\infty Costdt - i\int_0^\infty Sintdt = -i\,.$$

Pertanto

$$(16)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^i = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{i\ln\varepsilon} = \lim_{R\to\infty} e^{-i\ln R} = \lim_{R\to\infty} R^{-i} = 0$$

Analogamente, partendo dall'integrale $\int_\varepsilon^1 x^{-i-1}dx$, troviamo:

$$(17)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-i} = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{-i\ln\varepsilon} = \lim_{R\to\infty} e^{i\ln R} = \lim_{R\to\infty} R^{i} = 0$$

da cui

$$(18)\qquad \lim_{R\to\infty} Cos(\ln R) = 0\,,\quad \lim_{R\to\infty} Sin(\ln R) = 0$$

2.2. Consideriamo l'integrale $\int_c \frac{z^{i-1}dz}{1+z}$, ed applichiamo il 2° teorema integrale di Cauchy alla curva chiusa *c* di figura 4. La funzione integranda presenta un polo nel punto z=-1.

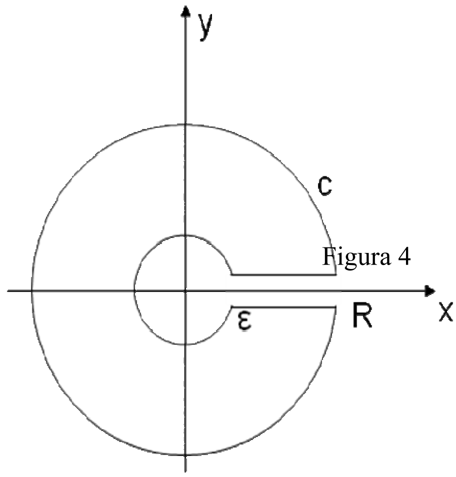

Figura 4

Operando, abbiamo:

$$\int_\varepsilon^R \frac{x^{i-1}dx}{1+x} + \int_0^{2\pi}\frac{(\mathrm{Re}^{i\varphi})^{i-1}\,\mathrm{Re}^{i\varphi}\,id\varphi}{1+\mathrm{Re}^{i\varphi}}$$

$$-\int_\varepsilon^R \frac{(xe^{2\pi i})^{i-1}e^{2\pi i}dx}{1+x} - \int_0^{2\pi}\frac{(\varepsilon e^{i\varphi})^{i-1}\varepsilon e^{i\varphi}id\varphi}{1+\varepsilon e^{i\varphi}} =$$

$$(19)\qquad 2\pi i \lim_{z\to -1}\frac{z-(-1)}{1+z}z^{i-1} = -2\pi i e^{-\pi}$$

Il 2° integrale del primo membro della (19), per $R \to \infty$, diventa:

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^{2\pi} \frac{(\mathrm{Re}^{i\varphi})^{i-1}\,\mathrm{Re}^{i\varphi}\, id\varphi}{1+\mathrm{Re}^{i\varphi}} = \lim_{R \to \infty} iR^{i-1} \int_0^{2\pi} e^{-\varphi - i\varphi} d\varphi = 0,$$

in quanto: $\lim_{R \to \infty} R^{i-1} = 0$.

Il 4° integrale del primo membro della (19) tende a zero, in quanto $\mathop{Lim}_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^i = 0$

La somma algebrica del 1° e del 3° integrale del primo membro della (19), è data da:

$$\int_\varepsilon^R \frac{x^{i-1}dx}{1+x} - \int_\varepsilon^R \frac{(xe^{2\pi i})^{i-1} e^{2\pi i} dx}{1+x} = (1-e^{-2\pi}) \int_\varepsilon^R \frac{x^{i-1}dx}{1+x};$$

passando al limite, per $R \to \infty$, e per $\varepsilon \to 0$, troviamo:

$(1-e^{-2\pi}) \int_0^\infty \frac{x^{i-1}dx}{1+x} = -2\pi i e^{-\pi}$, da cui:

$$(20) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{i-1}dx}{1+x} = -2\pi i e^{-\pi} \frac{1}{1-e^{-2\pi}} = \frac{-i\pi}{Sinh\pi}$$

Troviamo lo stesso risultato se consideriamo l'integrale $\int_0^\infty \frac{x^{i-1}dx}{1+x} = (\mathrm{x} = e^t) = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{it}dt}{1+e^t}$ lungo la curva chiusa *c* di Fig.1, applicando il 2° teorema integrale di Cauchy.
Infatti, operando, abbiamo:

$$\lim_{R \to \infty} [\int_{-R}^R \frac{e^{ix}dx}{1+e^x} + \int_0^\pi \frac{(\mathrm{Re}^{i\varphi})^{i-1}\,\mathrm{Re}^{i\varphi}\, id\varphi}{1+\mathrm{Re}^{i\varphi}}] = 2\pi i \lim_{x \to x_k} \sum_{k \geq 0} \frac{x-x_k}{e^x+1} e^{ix};$$

$x_k = i\pi(2k+1)$, k = 0,1,2,3,…;

passando al limite, per $R \to \infty$, troviamo:

$$(21) \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{it}dt}{1+e^t} = \int_0^\infty \frac{x^{i-1}dx}{1+x} = 2\pi i \sum_{k \geq 0} \frac{1}{-1} e^{i[i\pi(2k+1)]} = -2\pi i e^{-\pi} \frac{1}{1-e^{-2\pi}} = \frac{-i\pi}{Sinh\pi}$$

Risultato identico a quello della (20), ottenuto ponendo:

$\lim_{R \to \infty} R^{i-1} = 0$, e $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^i = 0$

Inoltre, sappiamo che:

$$(22) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{Sin(\pi\alpha)} \qquad \text{(vedi [2, pag. 330]).}$$

Ponendo nella (22), $\alpha = i$, troviamo:

$$(23) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{i-1}dx}{1+x} = \frac{-i\pi}{Sinh\pi}$$

Risultato identico a quello ottenuto dalla (20).
Dalla (21) ricaviamo:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{it}dt}{1+e^t} = \int_{-\infty}^\infty \frac{(Cos(t)+iSin(t)dt}{1+e^t} = \int_0^\infty \frac{Cos(t)dt}{1+e^t} + \int_0^\infty \frac{Cos(t)dt}{1+e^{-t}} + \mathrm{i}(\int_0^\infty \frac{Sin(t)dt}{1+e^t} - \int_0^\infty \frac{Sin(t)dt}{1+e^{-t}}) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{Cos(t)dt}{1+e^t} + \int_0^\infty \frac{(e^t+1-1)Cos(t)dt}{1+e^t} + \mathrm{i}[\int_0^\infty \frac{Sin(t)dt}{1+e^t} - \int_0^\infty \frac{(e^t+1-1)Sin(t)dt}{1+e^t}] =$$

$$= \int_0^\infty Cos(t)dt - i\int_0^\infty Sin(t)dt + 2i\int_0^\infty \frac{Sin(t)dt}{1+e^t}$$

In virtù delle (5a) e (5b), nonché della (21), otteniamo:

$$\int_0^\infty \frac{Sin(t)dt}{1+e^t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{Sinh\pi}$$, formula nota, (vedi [1, pag.481]).

Abbiamo così dimostrato, ancora una volta, che utilizzando le (5a) e (5b), otteniamo formule note.

Riepilogando, possiamo affermare che utilizzando successivamente il 1° ed il 2° teorema integrale di Cauchy, abbiamo ottenuto, oltre le ben note formule (5a) e (5b), le seguenti formule:

$$\lim_{R\to\infty} e^{iR} = 0, \quad \lim_{R\to\infty} CosR = 0, \quad \lim_{R\to\infty} SinR = 0, \quad \lim_{R\to\infty} e^{-iR} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{i} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} e^{i\ln\varepsilon} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} Cos\ln\varepsilon = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} Sin\ln\varepsilon = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-i} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} e^{-i\ln\varepsilon} = 0,$$

$$\lim_{R\to\infty} R^{i} = 0, \quad \lim_{R\to\infty} e^{i\ln R} = 0, \quad \lim_{R\to\infty} Cos(\ln R) = 0, \quad \lim_{R\to\infty} Sin(\ln R) = 0$$

$$\lim_{R\to\infty} R^{-i} = 0, \quad \lim_{R\to\infty} e^{-i\ln R} = 0,$$

In conclusione, le formule (5a) e (5b) sono vere ed utilizzabili, mentre le formule (6), (6a), (8), (16), (17) e (18) forniscono i valori dei limiti delle funzioni prese in esame.

Per i limiti suddetti, le formule trovate rappresentano solamente espressioni matematiche, ottenute applicando il primo ed il secondo teorema integrale di Cauchy, prescindendo dal concetto di limite.

Secondo il concetto di limite le espressioni:

$$(24) \qquad \lim_{R\to\infty} SinR, \quad \lim_{R\to\infty} CosR, \quad \lim_{R\to\infty} Sin(\ln R), \text{ e } \lim_{R\to\infty} Cos(\ln R)$$

presentano valori indeterminati che variano da -1 a +1.

Per le espressioni indicate nella (24), coesistono i valori +1 e -1

Ringrazio vivamente il Prof. Ing. Filippo Aluffi Pentini, dell' Università di Roma "La Sapienza", per i suoi utilissimi suggerimenti.

RIFERIMENTI

[1] I.S.Gradshteyn, I.M.Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press Inc., London, 1980.

[2] A. Ghizzetti, L. Marchetti, A. Ossicini, *Lezioni di complementi di matematica*, Università degli Studi di Roma, 1972.

[3] G. H. Hardy, *Divergent Series*, MacMillan And Co, London, 1949.

Agosto 2010

Pasquale Cutolo
p.cutolo@inwind.it