Cut-Der-3apc

<u>Una nota sullo studio di alcune particolari funzioni.</u>

<u>Considerazioni ed osservazioni</u>

di Pasquale Cutolo

p.cutolo@inwind.it

A note on the Study of some particular Functions.

Considerations and observations

By Pasquale Cutolo

Sommario: In questo lavoro viene preso in esame lo studio delle seguenti Funzioni:

$$(e^z+1)^{-1};(e^z-1)^{-1};(e^z+1)^{-p};(e^z-1)^{-p};(e^z+u)^{-p}$$

Abstract: In this work we examine the study of the Functions:

$$(e^z+1)^{-1};(e^z-1)^{-1};(e^z+1)^{-p};(e^z-1)^{-p};(e^z+u)^{-p}$$

A.1.01 Prendiamo in esame la Funzione:

$$F(z)=(e^z+1)^{-1} \tag{A.1.01}$$

Sviluppando in serie la (A.1.01), abbiamo:

$$F(z)=(e^z+1)^{-1}=e^{-z}\sum_{k\ge 0}(-1)^k e^{zk}=\sum_{k\ge 0}(-1)^k e^{-z(1+k)} \tag{A.1.02}$$

La (A.1.02) è definita nel semipiano complesso $R_e z \ge 0$ ad eccezione

dei punti in cui $e^z=-1$

Derivando la (A.1.02), n volte, rispetto a z, otteniamo:

$$F^{(n)}(z)=\sum_{k\ge 0}(-1)^k(-1-k)^n e^{-z(1+k)}=(-1)^n\sum_{k\ge 0}(-1)^k(1+k)^n e^{-z(1+k)} \tag{A.1.03}$$

Lo sviluppo della Funzione $((e^z+1)^{-1})^{(n)}$ può essere espresso nella forma:

$$F^{(n)}(z)=((e^z+1)^{-1})^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}A_k(e^z+1)^{-1-k} \tag{A.1.04}$$

Le costanti A_k rappresentano i coefficienti del polinomio indicato nell'ultimo membro

a destra della (A.1.04); detti coefficienti dipendono da n e k, per cui abbiamo ritenuto

opportuno indicarli, usando una forma più espressiva, con $C_1(n,k)$.

Pertanto la (A.1.04) diventa:

$$F^{(n)}(z)=((e^z+1)^{-1})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_1(n,k)(e^z+1)^{-1-k} \qquad \text{(A.1.05)}$$

Dal confronto tra la (A.1.03) e la (A.1.05), ricaviamo:

$$(-1)^n \sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+k)^n e^{-z(1+k)} = \sum_{k=0}^{n} C_1(n,k)(e^z+1)^{-1-k} \qquad \text{(A.1.06)}$$

Abbiamo ritenuto utile calcolare i coefficienti $C_1(n,k)$, per n = 0,1,2,3,4,5,6, ottenendo

Il seguente triangolo (T1):

n=0, 1

n=1, -1 1

n=2, 1 -3 2

n=3, -1 7 . -12 6 (T1)

n=4, 1 -15 50 -60 24

n=5, -1 31 -180 390 -360 120

n=6, 1 -63 602 -2100 3360 -2520 720

A.2.01. Considerazioni ed osservazioni sul triangolo (T1)

Dall'esame del triangolo (T1), osserviamo che:

a) la somma dei valori indicati in ciascuna riga orizzontale, per n da 1 a 6, è uguale a zero;

b) $C_1(n,n)$ = n!, come risulta osservando i valori indicati sul lato destro del triangolo (T1), per n da 1 a 6 ;

c) $C_1(n,1)=(-1)^{n-1}(2^n-1)$, come risulta osservando i valori indicati sulla prima riga parallela al lato sinistro del triangolo (T1); $C_1(n,0)=(-1)^n$;

d) i valori indicati sulla prima riga parallela al lato destro del triangolo (T1), sono dati da:

$$C_1(n,n-1)=(n+1)C_1(n-1,n-2)=(n+1)nC_1(n-2,n-3);$$

applicando detta osservazione a tutti i valori precedenti fino a $C_1(2,1)$

otteniamo la relazione:

$$C_1(n,n-1) = (n+1)n(n-1)...C_1(2,1) = (n+1)n(n-1)...(-3) = -\frac{(n+1)!}{2} \qquad \text{(A.2.01)}$$

Nello svolgimento dei calcoli, abbiamo individuato due tipi di sviluppi in serie:

il primo è quello indicato dalla (A.1.02) che definiamo di tipo (a), l'altro, di tipo (b),

è quello che conduce ad una serie i cui termini presentano un fattore e^{kz}, con $k \geq 0$

A.2.02 Considerazioni sullo sviluppo in serie di tipo (a) della Funzione $(e^z+1)^{-1}$

Ponendo, nel membro a sinistra della (A.1.06), z = 0, troviamo:

$$(-1)^n \sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+k)^n = (-1)^{n-1}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^n \quad ;$$

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^n = \sum_{k\geq 1}(2k)^n - \sum_{k\geq 1}(2k-1)^n - \sum_{k\geq 1}(2k)^n + \sum_{k\geq 1}(2k)^n =$$

$$= 2^{n+1}\sum_{k\geq 1}k^n - \sum_{k\geq 1}k^n = (2^{n+1}-1)\sum_{k\geq 1}k^n \quad ; \qquad \text{(A.2.02)}$$

Quindi, per la (A.1.06), abbiamo:

$$(-1)^{n-1}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^n = (-1)^{n-1}(2^{n+1}-1)\sum_{k\geq 1}k^n = \sum_{k=0}^{n} C_1(n,k)2^{-1-k} \qquad \text{(A.2.03)}$$

Consideriamo il caso di n dispari.

Sostituendo, quindi, 2n-1 ad n, nella (A.2.02), abbiamo:

$$(2^{2n}-1)\sum_{k\geq 1}k^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} C_1(2n-1,k)2^{-1-k} \quad , \ n=1,2,3,...$$

Ricordando che la serie, che figura nel primo membro della relazione precedente,

viene rappresentata da:

$$\sum_{k\geq 1}k^{2n-1} = Z(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}, \qquad \text{(A.2.04)}$$

otteniamo:
$$(2^{2n}-1)\sum_{k\geq 1}k^{2n-1} = -\frac{B_{2n}}{2n}(2^{2n}-1)$$

Tenendo presente la (A.2.03), abbiamo:

$$(2^{2n}-1)\frac{-B_{2n}}{2n} = (2^{2n}-1)\sum_{k\geq 1}k^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} C_1(2n-1,k)2^{-1-k} \qquad \text{(A.2.05)}$$

essendo B_{2n} il numero di Bernoulli d'indice 2n, e Z(s) la funzione Zeta di Riemann.

Osserviano che non sempre la serie $\sum_{k\geq 1} k^{2n-1}$ è rappresentata da Z(1-2n),

come vedremo in seguito.

Possiamo verificare la (A.2.05) ponendo 2n = 6, ricordando che $B_6 = \frac{1}{42}$

e utilizzando i coefficienti del triangolo (T1); così operando abbiamo:

$$-63\frac{1}{42}\frac{1}{6} = -2^{-1} + 31(2)^{-2} - 180(2)^{-3} + 390(2)^{-4} - 360(2)^{-5} + 120(2)^{-6} = -\frac{1}{4}$$

Per n pari, sostituendo 2n ad n, dalla (A.2.02) ricaviamo:

$$-\sum_{k\geq 0}(-1)^k k^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_1(2n,k)2^{-1-k} \qquad \text{(A.2.06)}$$

Ricordando che $\sum_{k\geq 1} k^{2n} = Z(-2n) = 0$, dalla precedente relazione ricaviamo:

$$\sum_{k=0}^{2n} C_1(2n,k)2^{-1-k} = 0 \qquad \text{(A.2.07)}$$

Ponendo 2n = 6, utilizzando i coefficienti del triangolo (T1) e applicando la (A.2.07),

possiamo facilmente verificare che:

$$2^{-1} - 63(2)^{-2} + 602(2)^{-3} - 2100(2)^{-4} + 3360(2)^{-5} - 2520(2)^{-6} + 720(2)^{-7} = 0$$

Ponendo, nella (A.1.06), $z = i\pi$, ($i = \sqrt{-1}$), troviamo:

$$(-1)^n \sum_{k\geq 0}(-1)^k (1+k)^n (-1)^{1+k} = (-1)^{n-1}\sum_{k\geq 1} k^n = (-1)^{n-1}\infty,$$

in quanto $e^{i\pi} + 1 = 0$, relazione che rappresenta la famosissima formula di Eulero.

Osserviamo che in questo caso la serie $\sum_{k\geq 1} k^n$

non è più rappresentata dal valore finito fornito da Z(-n), ma la serie in parola assume

il suo valore naturale, cioè infinito.

Moltiplicando per $(e^z+1)^{n+1}$ ambo i membri della (A.1.06), otteniamo:

$$(-1)^n (e^z+1)^{n+1} \sum_{k\ge 0} (-1)^k (1+k)^n e^{-z(1+k)} = \sum_{k=0}^{n} C_1(n,k)(e^z+1)^{n-k}$$

Passando al limite per $z \to i\pi$, troviamo:

$$(-1)^n \lim_{z\to i\pi} (e^z+1)^{n+1} \sum_{k\ge 0} (-1)^k (1+k)^n e^{-z(1+k)} = C_1(n,n) = n! \qquad \text{(A.2.08)}$$

Il limite, per $z \to i\pi$, della serie $\sum_{k\ge 0} (-1)^k (1+k)^n e^{-z(1+k)}$ non può avere un valore finito;

se così fosse, il limite indicato nel membro a sinistra della (A.2.08) sarebbe uguale a zero,

ma sappiamo che esso presenta un valore finito; quindi:

$$\lim_{z\to i\pi} \sum_{k\ge 0} (-1)^k (1+k)^n e^{-z(1+k)} = \sum_{k\ge 0} (-1)^k (1+k)^n (-1)^{1+k} = -\sum_{k\ge 1} k^n = -\infty,$$

cioè $\sum_{k\ge 1} k^n = \infty$

La (A.2.08) rappresenta un limite notevole.

Integrando, tra i limiti 0 ed infinito, i due membri della (A.1.02), otteniamo:

$$\int_0^\infty (e^z+1)^{-1} dz = \sum_{k\ge 0} (-1)^k \int_0^\infty e^{-z(1+k)} dz = \sum_{k\ge 0} \frac{(-1)^k}{1+k}, \text{ ma:}$$

$$\int_0^\infty (e^z+1)^{-1} dz = \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{1+e^{-z}} dz = (e^{-z}=t) = \int_0^1 \frac{dz}{1+z} = \ln 2,$$

Abbiamo, quindi: $\sum_{k\ge 0} \frac{(-1)^k}{1+k} = \ln 2$

formula ben nota

A.2.03 Considerazioni sullo sviluppo di tipo (b) della Funzione $(e^z+1)^{-1}$

Riprendendo la (A.1.01), e sviluppando la F(z) in modo diverso dalla (A.1.02), otteniamo:

$$F(z) = (e^z+1)^{-1} = \sum_{k\ge 0} \binom{-1}{k} e^{zk} = \sum_{k\ge 0} (-1)^k e^{zk} \qquad \text{(A.2.09)}$$

La serie indicata nell'ultimo membro della (A.2.09) è definita nel semipiano complesso

$R_e z \le 0$, ad eccezione dei punti nei quali $e^z = -1$

Passando al limite per $z \to -\infty$, la serie $\sum_{k \geq 0} (-1)^k e^{zk}$ tende a zero per k>0;

ma per $k \to 0$, $z \to -\infty$,abbiamo $e^{-0\infty} \to 1$, quindi

$$\lim_{z \to -\infty} \sum_{k \geq 0} (-1)^k e^{zk} = 1$$

Derivando la (A.2.09), n volte, rispetto a z, ricaviamo:

$$((e^z + 1)^{-1})^{(n)} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k k^n e^{zk} = \sum_{k \geq 1} (-1)^k k^n e^{zk}$$

Tenendo presente la (A.1.05), otteniamo:

$$\sum_{k \geq 1} (-1)^k k^n e^{zk} = \sum_{k=0}^{n} C_1(n,k)(e^z + 1)^{-1-k} \qquad \textit{(A.2.10)}$$

Per, $z \to -\infty$, dalla (A.2.10) troviamo che il primo membro è uguale a zero, e quindi:

$$\sum_{k=0}^{n} C_1(n,k) = 0 \qquad \text{(A.2.11)}$$

Rimane così confermata l’osservazione indicata nella lettera a) di cui al punto **A.2.01**

Ponendo, nella (A.2.10), $z = i\pi$, troviamo:

$$\sum_{k \geq 1} k^n = \infty \qquad \text{(A.2.12)}$$

Anche in questo caso la serie a sinistra della (A.2.12) riprende il suo valore naturale.

Pertanto la serie $\sum_{k \geq 1} k^n$ a volte è rappresentata da un valore finito ed altre volte assume un valore infinito.

Sarebbe, quindi, interessante conoscere, a priori, quando la serie $\sum_{k \geq 1} k^n$ assume un valore finito, e quando assume il valore infinito.

Moltiplicando, ambo i membri della (A.2.10), per $(e^z + 1)^{1+n}$, e passando al limite per $z \to i\pi$, troviamo:

$$\lim_{z \to i\pi} (e^z + 1)^{1+n} \sum_{k \geq 1} (-1)^k k^n e^{zk} = C_1(n,n) = n! \qquad \text{(A.2.13)}$$

La (A.2.13) rappresenta un altro limite notevole.

A.3.01 -Calcolo dei coefficienti $C_1(n,k)$

Ponendo, nella (A.1.06), $e^z+1=t^{-1}$,cioè $e^z=\dfrac{1-t}{t}$, ricaviamo:

$$(-1)^n\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+k)^n t^{1+k}(1-t)^{-1-k}=\sum_{k=0}^{n}C_1(n,k)t^{1+k}$$, da cui

$$(-1)^n\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+k)^n t^{k}(1-t)^{-1-k}=\sum_{k=0}^{n}C_1(n,k)(t)^{k} \qquad \text{(A.3.01)}$$

Derivando, la (A.3.01), m volte, $(m\leq n)$, rispetto a t, e ponendo dopo t = 0, otteniamo:

$$(-1)^n\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+k)^n\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}(t^k)^{(p)}((1-t)^{-1-k})^{(m-p)}=\sum_{k=0}^{n}C_1(n,k)(t^k)^{(m)}$$

Ricordando che $(t^k)^{(p)}$, nel punto t=0, è diverso da zero solamente quando p = k, ricaviamo:

$$(-1)^n\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+k)^n\binom{m}{k}k!\frac{\Gamma(m-k+1+k)}{\Gamma(k+1)}=C_1(n,m)m! \qquad \text{(A.3.02)}$$

da cui
$$C_1(n,m)=(-1)^n\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k(1+k)^n \qquad \text{(A.3.03)}$$

Per m = n, troviamo: $C_1(n,n)=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(1+k)^n=n!$

cioè:
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(1+k)^n=(-1)^n n! \qquad \text{(A.3.04)}$$

Per m = n -1, abbiamo: $C_1(n,n-1)=(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k(1+k)^n$ (A.3.05)

Tenendo presente quanto indicato nella lettera d) delle osservazioni (punto **A.2.01**),

che si concretizza nella relazione (A.2.01), ricaviamo la seguente interessante formula:

$$C_1(n,n-1)=(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k(1+k)^n=-\frac{(n+1)!}{2} \qquad \text{(A.3.06)}$$

Per m =0, $C_1(n,0)=(-1)^n$

Per m = 1, abbiamo: $C_1(n,1)=(-1)^n\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}(-1)^k(1+k)^n=(-1)^n(1-2^n)=(-1)^{n-1}(2^n-1)$

valore identico a quello indicato nella lettera c) delle osservazioni.

Per m > n, otteniamo: $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k(1+k)^n = 0$ (A.3.07)

Nel calcolo della Funzione $((1-t)^{-1-k})^{(m-k)}$ abbiamo applicata la formula

$((1-t)^{-s})^{(p)} = \frac{\Gamma(p+s)}{\Gamma(s)}(1-t)^{-s-p}$, essendo $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^t dt$, $R_e z > 0$

la quale rappresenta la Funzione di Eulero di seconda specie.

Tenendo presente la (A.2.05) e la (A.3.03), otteniamo:

$$B_{2n} = \frac{2n}{2^{2n}-1}\sum_{k=0}^{2n-1}2^{-1-k}C_1(2n-1,k) = \frac{n}{2^{2n}-1}\sum_{k=0}^{2n-1}2^{-k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j(1+j)^{2n-1} \quad \text{(A.3.08)}$$

Per n = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, troviamo che

$$B_{2n} = \frac{1}{6},-\frac{1}{30},\frac{1}{42},-\frac{1}{30},\frac{5}{66},-\frac{691}{2730},\frac{7}{6},-\frac{3617}{510},\frac{43867}{798},-\frac{174611}{330}$$

Utilizzando la (A.3.03), dalla (A.1.05) ricaviamo:

$$((e^z+1)^{-1})^{(n)} = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}(e^z+1)^{-1-k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(1+j)^n \quad \text{(A.3.09)}$$

Le formule (A.3.04), (A.3.05), (A.3.06), (A.3.07), (A.3.08), (A.3.09), sono state verificate

con apposito programma.

A.4.01 Ulteriori considerazioni ed osservazioni sulla Funzione $(e^z+1)^{-1}$

E' noto che:

$$\frac{1}{e^z+1} = \frac{1}{e^z-1} - \frac{2}{e^{2z}-1} \quad \text{(A.4.01)}$$

Applicando la nota relazione:

$$\frac{1}{e^z-1} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{z}+2\int_0^\infty \frac{Sin(zt)}{e^{2\pi t}-1}dt \quad \text{(A.4.02)}$$

troviamo: $$\frac{1}{e^z+1} = \frac{1}{2}+2\int_0^\infty \frac{Sin(zt)-2Sin(2zt)}{e^{2\pi t}-1}dt \quad \text{(A.4.03)}$$

Passando al limite per $z \to 0$, ovviamente abbiamo:

$$\lim_{z \to 0} \int_0^{\infty} \frac{Sin(zt) - 2Sin(2zt)}{e^{2\pi} - 1} dt = 0$$

Dalla (A.4.03), passando al limite per $z \to -\infty$, troviamo:

$$\lim_{z \to -\infty} \int_0^{\infty} \frac{Sin(zt) - 2Sin(2zt)}{e^{2\pi} - 1} dt = \frac{1}{4} \tag{A.4.04}$$

Dalla (A.4.03), passando al limite per $z \to \infty$, abbiamo:

$$\lim_{z \to \infty} \int_0^{\infty} \frac{Sin(zt) - 2Sin(2zt)}{e^{2\pi} - 1} dt = -\frac{1}{4} \tag{A.4.04'}$$

Derivando la (A.4.03), 2n volte, (n intero positivo), rispetto a z, ricaviamo:

$$((e^z + 1)^{-1})^{(2n)} = \sum_{k=0}^{2n} C_1(2n,k)(e^z + 1)^{-1-k} = 2(-1)^n \int_0^{\infty} \frac{t^{2n}(Sin(zt) - 2^{2n+1} Sin(2zt))}{e^{2\pi} - 1} dt \tag{A.4.05}$$

Dalla (A.4.05), passando al limite per $z \to 0$, troviamo:

$$\sum_{k=0}^{2n} C_1(2n,k) 2^{-1-k} = 2(-1)^n \lim_{z \to 0} \int_0^{\infty} \frac{t^{2n}(Sin(zt) - 2^{2n+1} Sin(2zt))}{e^{2\pi} - 1} dt$$

Tenendo presente la (A.2.07), otteniamo:

$$\lim_{z \to 0} \int_0^{\infty} \frac{t^{2n}(Sin(zt) - 2^{2n+1} Sin(2zt))}{e^{2\pi} - 1} dt = 0$$

Dalla (A.4.05), passando al limite per $z = -\infty$, abbiamo:

$$\sum_{k=0}^{2n} C_1(2n,k) = 2(-1)^n \lim_{z \to -\infty} \int_0^{\infty} \frac{t^{2n}(Sin(zt) - 2^{2n+1} Sin(2zt))}{e^{2\pi} - 1} dt$$

Tenendo presente la (A.2.11), ricaviamo:

$$\lim_{z \to -\infty} \int_0^{\infty} \frac{t^{2n}(Sin(zt) - 2^{2n+1} Sin(2zt))}{e^{2\pi} - 1} dt = 0 \tag{A.4.06}$$

Derivando la (A.4.03), 2n-1 volte, (n intero > 0), rispetto a z, otteniamo:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} C_1(2n-1,k)(e^z + 1)^{-1-k} = 2(-1)^{n-1} \int_0^{\infty} \frac{t^{2n-1}(Cos(zt) - 2^{2n} Cos(2zt))}{e^{2\pi} - 1} dt \tag{A.4.07}$$

Dalla (A.4.07), passando al limite, per $z \to 0$, troviamo:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} C_1(2n-1,k) 2^{-1-k} = 2(-1)^{n-1} \lim_{z \to 0} \int_0^{\infty} \frac{t^{2n-1}(Cos(zt) - 2^{2n} Cos(2zt))}{e^{2\pi} - 1} dt$$

Tenendo presente la (A.2.05), otteniamo:

$$\lim_{z \to 0} \int_0^\infty \frac{t^{2n-1}(Cos(zt) - 2^{2n} Cos(2zt))}{e^{2\pi t} - 1} dt = (-1)^n (2^{2n} - 1) \frac{B_{2n}}{4n} \tag{A.4.08}$$

Dalla (A.4.07), passando al limite, per $z \to -\infty$, troviamo:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} C_1(2n-1, k) = 2(-1)^{n-1} \lim_{z \to -\infty} \int_0^\infty \frac{t^{2n-1}(Cos(zt) - 2^{2n} Cos(2zt))}{e^{2\pi t} - 1} dt$$

Tenendo presente la (A.2.11), abbiamo

$$\lim_{z \to -\infty} \int_0^\infty \frac{t^{2n-1}(Cos(zt) - 2^{2n} Cos(2zt))}{e^{2\pi t} - 1} dt = 0 \tag{A.4.09}$$

B.1.01 Prendiamo ora in esame la Funzione $(e^z - 1)^{-1}$

Eseguendo lo sviluppo in serie di tipo (a) della Funzione $(e^z - 1)^{-1}$, otteniamo:

$$(e^z - 1)^{=1} = \sum_{k \ge 0} e^{-z(1+k)} \tag{B.1.01}$$

La (B.1.01) è definita nel semipiano $\mathrm{Re}(z) \ge 0$, ad eccezione dei punti nei quali $e^z = 1$

Derivando la (B.1.01), n volte, rispetto a z, troviamo:

$$((e^z - 1)^{=1})^{(n)} = (-1)^n \sum_{k \ge 0} (1+k)^n e^{-z(1+k)} = (-1)^n \sum_{k \ge 1} k^n e^{-zk} = \sum_0^n C_{-1}(n,k)(e^z - 1)^{-1-k} \tag{B.1.02}$$

Abbiamo ritenuto utile calcolare i coefficienti $C_{-1}(n,k)$ per n = 0,1,2,3,4,5,6, ottenendo

Il seguente triangolo (T2):

n=0,	1						
n=1,	-1	-1					
n=2,	1	3	2				
n=3,	-1	-7 .	-12	-6			
n=4,	1	15	50	60	24		
n=5,	-1	-31	-180	-390	-360	-120	
n=6,	1	63	602	2100	3360	2520	720

(T2)

Moltiplicando, ambo i membri della (B.1.01), per $e^{-pz} - 1$,

ed integrando, rispetto a z, tra i limiti 0 ed infinito, ricaviamo:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-pz}-1}{e^z-1}dz = \sum_{k\geq 0}\int_0^\infty (e^{-z(1+p+k)}-e^{-z(1+k)})dz = \sum_{k\geq 0}(\frac{1}{1+p+k}-\frac{1}{1+k})$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-pz}-1}{e^z-1}dz = \int_0^\infty \frac{e^{-z(1+p)}-e^{-z}}{1-e^{-z}}dz = (e^{-z}=t) = \int_0^1 \frac{t^p-1}{1-t}dt = -\Psi(p+1)-C$$

da cui: $$\sum_{k\geq 0}(\frac{1}{1+k}-\frac{1}{1+p+k}) = \Psi(p+1)+C \qquad \text{(B.1.03)}$$

essendo $\Psi(p+1)=\dfrac{\Gamma'(p+1)}{\Gamma(p+1)}$, e C è la costante di Mascheroni-Eulero.

Dalla (B.1.03), per p = 0, abbiamo: $\Psi(1)=-C$

Sussistono le seguenti relazioni:

$$\Psi'(p+1)=\Psi'(p)+\frac{1}{(p+1)^2}$$

$$\Psi'(p+1)=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(1+p+k)^2}$$

$$C=-\int_0^\infty e^{-z}\ln z dz\ , \qquad C=\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n) = 0{,}577215649$$

$$C=\frac{1}{2}+2\int_0^\infty \frac{z}{1+z^2}\frac{dz}{e^{2\pi z}-1}\ , \qquad C=\lim_{s\to 1}(Z(s)-\frac{1}{s-1})$$

B.2.01- Considerazioni ed osservazioni sul triangolo (T2)

Dall'esame del triangolo (T2), osserviamo che:

a) la somma dei valori delle righe orizzontali, per n da 1 a 6, non è uguale a zero; per n pari, i valori $C_{-1}(n,k)$ sono tutti positivi, mentre per n dispari essi risultano tutti negativi;

b) $C_{-1}(n,n)=(-1)^n n!$, come risulta osservando i valori indicati sul lato destro del triangolo (T2), per n da 1 a 6 ;

c) $C_{-1}(n,1)=(-1)^n(2^n-1)$, come risulta osservando i valori indicati sulla prima riga parallela al lato sinistro del triangolo (T2); $C_{-1}(n,0)=(-1)^n$

d) i valori indicati sulla prima riga parallela al lato destro del triangolo (T2), sono dati da:

$$C_{-1}(n,n-1)=-(n+1)C_{-1}(n-1,n-2)=(n+1)nC_{-1}(n-2,n-3);$$

partendo dal valore $C_{-1}(2,1)=3$, otteniamo la relazione:

$$C_{-1}(n,n-1)=3(-4)(5)(-6)...((-1)^n(n+1))=(-1)^n\frac{(n+1)!}{2} \qquad \text{(B.2.00)}$$

L'ultimo membro della (B.2.00) deriva dall'osservazione dei valori della prima riga parallela al lato destro del triangolo (T2).

B.2.02) Considerazione sullo sviluppo di tipo (a) della Funzione $(e^z-1)^{-1}$

Riprendiamo la (B.1.02)

$$((e^z-1)^{=1})^{(n)}=(-1)^n\sum_{k\geq 0}(1+k)^n e^{-z(1+k)}=\sum_0^n C_{-1}(n,k)(e^z-1)^{-1-k}$$

Ponendo, $z=i\pi$, troviamo:

$$(-1)^n\sum_{k\geq 0}(1+k)^n(-1)^{1+k}=(-1)^n\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^n=\sum_0^n C_{-1}(n,k)(-2)^{-1-k} \qquad \text{(B.2.01)}$$

Dalla (A.2.02) rileviamo che:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^n=(2^{n+1}-1)\sum_{k\geq 1}k^n$$

da cui:
$$\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n-1}=(2^{2n}-1)\sum_{k\geq 1}k^{2n-1}=-(2^{2n}-1)\frac{B_{2n}}{2n} \qquad \text{(B.2.02)}$$

Quindi:
$$(-1)^n\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^n=(-1)^n(2^{n+1}-1)\sum_{k\geq 1}k^n=\sum_0^n C_{-1}(n,k)(-2)^{-1-k} \qquad \text{(B.2.03)}$$

Sostituendo, nella (B.2.03), 2n-1 ad n, e tenendo presente la (B.2.02), abbiamo:

$$-\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n-1}=-(2^{2n}-1)\sum_{k\geq 1}k^{2n-1}=(2^{2n}-1)\frac{B_{2n}}{2n}=\sum_0^{2n-1}C_{-1}(2n-1,k)(-2)^{-1-k} \qquad \text{(B.2.04)}$$

Possiamo verificare la formula precedente ponendo, ad es., 2n = 6, utilizzando i valori

Indicati nel triangolo (T2); ricordando che $B_6=\frac{1}{42}$ abbiamo:

$$63\frac{1}{42}\frac{1}{6}=$$

$$=(-1)(-2)^{-1}+(-31)(-2)^{-2}+(-180)(-2)^{-3}+(-390)(-2)^{-4}+(-360)(-2)^{-5}+(-120)(-2)^{-6}=\frac{1}{4}$$

Per n pari, sostituendo 2n ad n nella (B.2.03), troviamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n} = (2^{2n+1}-1)\sum_{k\geq 1}k^{2n} = \sum_{0}^{2n} C_{-1}(2n,k)(-2)^{-1-k} = 0 \qquad \text{(B.2.05)}$$

essendo $$\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n} = (2^{2n+1}-1)Z(-2n) = 0 \qquad \text{(B.2.05')}$$

Ponendo, nella (B.2.05), 2n = 6, possiamo facilmente verificare che:

$$(-2)^{-1} + 63(-2)^{-2} + 602(-2)^{-3} + 2100(-2)^{-4} + 3360(-2)^{-5} + 2520(-2)^{-6} + 720(-2)^{-7} = 0$$

Ponendo, nella (B.1.02), z = 0, troviamo:

$$(-1)^n \sum_{k\geq 0}(1+k)^n = (-1)^n \sum_{k\geq 1}k^n = (-1)^n \infty \text{ , cioè: } \sum_{k\geq 1}k^n = \infty$$

Osserviamo che anche in questo caso la serie $\sum_{k\geq 1}k^n$ non è più rappresentata

dal valore fornito da Z(-n), ma essa assume il suo valore naturale, cioè infinito.

Moltiplicando, ambo i membri della (B.1.02), per $(e^z-1)^{n+1}$, e passando al limite per

$z \to 0$, troviamo:

$$\lim_{z\to 0}(e^z-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n} C_{-1}(n,k)(e^z-1)^{-1-k} = C_{-1}(n,n) = (-1)^n n!$$

Quindi: $$\lim_{z\to 0}(e^z-1)^{n+1}\sum_{k\geq 1}k^n e^{-zk} = n! \qquad \text{(B.2.06)}$$

Il limite $\lim_{z\to 0}\sum_{k\geq 1}k^n e^{-zk}$ non può assumere un valore finito; se così fosse, il limite

a sinistra della (B.2.06) sarebbe uguale a zero, ma sappiamo che esso presenta

un valore finito, e quindi deve essere $\lim_{z\to 0}\sum_{k\geq 1}k^n e^{-zk} = \infty$, cioè $\sum_{k\geq 1}k^n = \infty$

Osserviamo che anche in questo caso $\sum_{k\geq 1}k^n = \infty$

La (B.2.06') rappresenta un altro limite notevole.

B.2.03 Considerazioni sullo sviluppo di tipo (b) della Funzione $(e^z-1)^{-1}$

Sviluppando la Funzione $(e^z-1)^{-1}$ in modo diverso dalla (B.1.01), abbiamo:

$$(e^z-1)^{-1}=-\sum_{k\ge 0}\binom{-1}{k}(-1)^k e^{kz}=-\sum_{k\ge 0}e^{kz} \qquad \text{(B.2.07)}$$

La serie a destra della (B.2.07) è definita nel semipiano complesso $R_e z \le 0$,

ad eccezione dei punti nei quali $e^z=1$.

Passando al limite per $z\to-\infty$, la serie $\sum_{k\ge 0}e^{kz}$, per k > 0, tende a zero,

ma per $k\to 0$, $z\to-\infty$, $e^{-0\infty}\to 1$; quindi

$$\lim_{z\to-\infty}\sum_{k\ge 0}e^{zk}=1$$

D'altra parte: $$\lim_{z\to-\infty}\sum_{k\ge 0}e^{zk}=\lim_{z\to-\infty}\frac{1}{1-e^z}=1$$

Derivando la (B.2.07), n volte, rispetto a z, ricaviamo:

$$((e^z-1)^{-1})^{(n)}=-\sum_{k\ge 0}k^n e^{zk}=-\sum_{k\ge 1}k^n e^{zk}$$

Tenendo presente la (B.1.02), troviamo:

$$((e^z-1)^{=1})^{(n)}=-\sum_{k\ge 1}k^n e^{kz}=\sum_0^n C_{-1}(n,k)(e^z-1)^{-1-k} \qquad \text{(B.2.08)}$$

Passando al limite per $z\to-\infty$, ricaviamo:

$$\sum_0^n C_{-1}(n,k)(-1)^{-1-k}=0 \qquad \text{(B.2.09)}$$

Possiamo verificare la (B.2.09) tenendo presente il triangolo (T2);

ponendo, ad es., n = 6, troviamo:

$$-1+63(-1)^{-2}+602(-1)^{-3}+2100(-1)^{-4}+3360(-1)^{-5}+2520(-1)^{-6}+720(-1)^{-7}=0$$

Ponendo, nella (B.2.08), $z=i\pi$, ricaviamo:

$$-\sum_{k\ge 1}k^n(-1)^k=\sum_0^n C_{-1}(n,k)(-2)^{-1-k} \qquad \text{(B.2.10)}$$

Ricordando che: $\sum_{k\ge 1}k^n(-1)^k=(2^{n+1}-1)\sum_{k\ge 1}k^n$, troviamo:

$$-\sum_{k\ge 1}k^n(-1)^k=-(2^{n+1}-1)\sum_{k\ge 1}k^n=\sum_0^n C_{-1}(n,k)(-2)^{-1-k} \qquad \text{(B.2.11)}$$

Sostituendo, nella (B.2.11), 2n-1 ad n, troviamo:

$$-(2^{2n}-1)\sum_{k\geq 1} k^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} C_{-1}(2n-1,k)(-2)^{-1-k} \qquad \text{(B.2.12)}$$

Ricordando che: $(2^{2n}-1)\sum_{k\geq 1} k^{2n-1} = -\frac{B_{2n}}{2n}(2^{2n}-1)$ otteniamo:

$$-(2^{2n}-1)\sum_{k\geq 1} k^{2n-1} = (2^{2n}-1)\frac{B_{2n}}{2n} = \sum_{0}^{2n-1} C_{-1}(2n-1,k)(-2)^{-1-k} \qquad \text{(B.2.13)}$$

Possiamo verificare la (B.2.13) ponendo, ad es., 2n=6;

con i valori del triangolo (T2), abbiamo:

$$63\frac{1}{42}\frac{1}{6} = -1(-2)^{-1} - 31(-2)^{-2} - 180(-2)^{-3} - 390(-2)^{-4} - 360(-2)^{-5} - 120(-2)^{-6} = \frac{1}{4}$$

B.3.01 Calcolo dei coefficienti $C_{-1}(n,k)$

Ponendo, nella (B.1.02), $e^z - 1 = t^{-1}$, da cui $e^z = \frac{1+t}{t}$, ricaviamo:

$$(-1)^n \sum_{k\geq 0}(1+k)^n \left(\frac{t}{1+t}\right)^{1+k} = \sum_{0}^{n} C_{-1}(n,k)t^{1+k}$$

da cui: $(-1)^n \sum_{k\geq 0}(1+k)^n t^k (1+t)^{-1-k} = \sum_{0}^{n} C_{-1}(n,k)t^k$

Derivando, m volte, $m \leq n$, rispetto a t, e ponendo dopo t = 0, abbiamo:

$$(-1)^n \sum_{k\geq 0}(1+k)^n \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(t^k)^{(j)}((1+t)^{-1-k})^{(m-j)} = \sum_{0}^{n} C_{-1}(n,k)(t^k)^{(m)}$$

Sviluppando, otteniamo:

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{m}(1+k)^n \binom{m}{k} k!\frac{\Gamma(m-k+1+k)}{\Gamma(1+k)}(-1)^{m-k} = C_{-1}(n,m)m!$$

Cioè: $$(-1)^{n+m}\sum_{k=0}^{m}(1+k)^n\binom{m}{k}(-1)^k = C_{-1}(n,m) \qquad \text{(B.3.01)}$$

Confrontando la (B.3.01) con la (A.3.00), troviamo:

$$C_{-1}(n,m) = (-1)^m C_1(n,m) \qquad \text{(B.3.02)}$$

Per, m = n, ricaviamo:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(1+k)^n = C_{-1}(n,n) = (-1)^n n!$$

Ritroviamo così la (A.3.04);

per, m = n -1, tenendo presente la (B.2.00), troviamo:

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k(1+k)^n = C_{-1}(n,n-1) = \frac{(n+1)!}{2}(-1)^n$$

Ritroviamo così la (A.3.06).

Dalla (B.2.13) ricaviamo:

$$B_{2n} = \frac{2n}{2^{2n}-1}\sum_{k=0}^{2n-1} C_{-1}(2n-1,k)(-2)^{-1-k}$$

Tenendo presente la (B.3.01), otteniamo:

$$B_{2n} = \frac{n}{2^{2n}-1}\sum_{k=0}^{2n-1} 2^{-k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j(j+1)^{2n-1}$$

Ritroviamo così la (A.3.08).

B.4.01 -Ulteriori considerazioni ed osservazioni sulla Funzione $(e^z-1)^{-1}$

Riprendiamo la relazione (A.4.01)

$$\frac{1}{e^z-1} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{z}+2\int_0^\infty \frac{Sin(zt)}{e^{2\pi t}-1}dt \qquad \text{(B.4.01)}$$

La relazione (B.4.01) è dovuta a Legendre (ved. [5], pag. 71).

Adrien-Marie Legendre, matematico francese, (Parigi 18.09.1752 - Parigi 10.01.1813).

E' abbastanza facile ricavare la (B.4.01), applicando all'integrale $\int_c \frac{e^{izt}}{e^{2\pi t}-1}dt$

il secondo teorema integrale di Cauchy lungo una curva chiusa c, costituita da una semicirconferenza, di raggio R, posta nel semipiano $y \geq 0$, con centro nell'origine degli assi cartesiani, nonchè da una semicirconferenza di raggio ε, (Fig.1), e facendo tendere $R \to \infty, \varepsilon \to 0$.

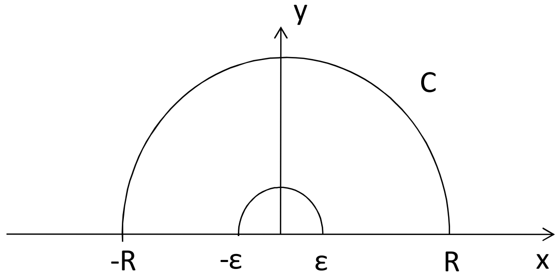

Fig. 1

Così operando, otteniamo:

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{izt}dt}{e^{2\pi}-1}+\int_{\pi}^{0}\frac{e^{iz\varepsilon e^{i\varphi}}i\varepsilon e^{i\varphi}d\varphi}{e^{2\pi\varepsilon e^{i\varphi}}-1}+\int_{0}^{\pi}\frac{e^{iz\mathrm{R}e^{i\varphi}}Rie^{i\varphi}d\varphi}{e^{2\pi\mathrm{R}e^{i\varphi}}-1}=2\pi i\lim_{t\to ik}\sum_{k\geq1}\frac{t-ik}{e^{2\pi t}-1}e^{izt} \qquad \text{(B.4.02)}$$

Passando al limite, per $R\to\infty$, il terzo integrale della (B.4.02)

si annulla, mentre per $\varepsilon\to0$ il secondo integrale della (B.4.02) è uguale a -i/2,

per cui abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{izt}dt}{e^{2\pi}-1}=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{izt}dt}{e^{2\pi}-1}+\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-izt}dt}{e^{-2\pi}-1}=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{izt}dt}{e^{2\pi}-1}-\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-izt}e^{2\pi}dt}{e^{2\pi}-1}==\int_{0}^{\infty}\frac{e^{izt}dt}{e^{2\pi}-1}-\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-izt}(e^{2\pi}-1+1)dt}{e^{2\pi}-1}=$$
$$=2i\int_{0}^{\infty}\frac{Sin(zt)dt}{e^{2\pi}-1}-\int_{0}^{\infty}e^{-izt}dt$$

Per z reale, abbiamo: $\int_{0}^{\infty}e^{-izt}dt=\frac{1}{iz}\int_{0}^{\infty}e^{-u}du=\frac{-i}{z}$

$$2\pi i\lim_{t\to ik}\sum_{k\geq1}\frac{t-ik}{e^{2\pi t}-1}e^{izt}=2\pi i\sum_{k\geq1}\frac{1}{2\pi}e^{izik}=i\sum_{k\geq1}e^{-kz}=i\frac{e^{-z}}{1-e^{-z}}=i\frac{1}{e^{z}-1}$$

Pertanto, in definitiva, otteniamo:

$$2i\int_{0}^{\infty}\frac{Sin(zt)dt}{e^{2\pi}-1}+\frac{i}{z}-\frac{i}{2}=\frac{i}{e^{z}-1}$$

Cioè: $$2\int_{0}^{\infty}\frac{Sin(zt)dt}{e^{2\pi}-1}+\frac{1}{z}-\frac{1}{2}=\frac{1}{e^{z}-1}$$

Derivando, la (B.4.01), 2n volte, rispetto a z, otteniamo:

$$((e^{z}-1)^{-1})^{(2n)}=(2n)!z^{-1-2n}+(-1)^{n}2\int_{0}^{\infty}\frac{t^{2n}Sin(zt)}{e^{2\pi}-1}dt=\sum_{k=0}^{2n}C_{-1}(2n,k)(e^{z}-1)^{-1-k}$$, da cui:

$$2\int_{0}^{\infty}\frac{t^{2n}Sin(zt)}{e^{2\pi}-1}dt=(-1)^{n-1}(2n)!z^{-1-2n}+(-1)^{n}\sum_{k=0}^{2n}C_{-1}(2n,k)(e^{z}-1)^{-1-k}=$$

$$= (-1)^{n-1}(2n)!z^{-1-2n} + (-1)^n \sum_{k=0}^{2n} (e^z-1)^{-1-k}(-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1+j)^{2n}(-1)^j \tag{B.4.03}$$

Derivando, invece, la (B.4.01), 2n-1 volte, n > 0, rispetto a z, otteniamo:

$$((e^z-1)^{-1})^{(2n-1)} = -(2n-1)!z^{-2n} + (-1)^{n-1}2\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}Cos(zt)}{e^{2\pi t}-1}dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_{-1}(2n-1,k)(e^z-1)^{-1-k}$$

da cui $2\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}Cos(zt)}{e^{2\pi t}-1}dt =$

$$= (-)^{n-1}(2n-1)!z^{-2n} + (-1)^n \sum_{k=0}^{2n-1} (e^z-1)^{-1-k}(-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j (1+j)^{2n-1} \tag{B.4.04}$$

Esaminando la (B.4.04), osserviamo che, per $z \to \infty$, abbiamo:

$$\lim_{z \to \infty} \int_0^\infty \frac{t^{2n} Sin(zt)dt}{e^{2\pi t}-1} = 0 \tag{B.4.05}$$

Per $z \to -\infty$, sappiamo che: $\sum_{k=0}^{2n} C_{-1}(2n,k)(-1)^{-1-k} = 0$

come risulta dalla (B.2.09), per cui:

$$\lim_{z \to -\infty} \int_0^\infty \frac{t^{2n} Sin(zt)dt}{e^{2\pi t}-1} = 0 \tag{B.4.06}$$

Moltiplicando per z^{2n+1} i primi due membri della (B.4.03), e ponendo dopo z=0, troviamo:

$C_{-1}(2n,2n) = (2n)!,$ ciò anche in applicazione della (B.3.01).

Applicando il primo teorema integrale di Cauchy all'integrale $\int_c e^{-iu}du$ lungo una curva chiusa c,

costituita da un arco di circonferenza, di raggio R, posto nel quarto quadrante del piano complesso,

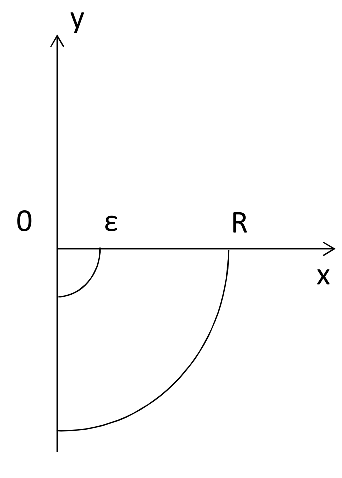

Fig.2

e da due lati del settore circolare (Fig.2), otteniamo:

$$\int_R^0 e^{-iu}du + \int_0^{-R} e^{-iit}idt + \int_{-\pi/2}^0 e^{-i\mathrm{Re}^{i\alpha}}\,\mathrm{Re}^{i\alpha}id\alpha + \int_0^{-\pi/2} e^{-i\varepsilon e^{i\alpha}}\varepsilon e^{i\alpha}id\alpha = 0$$

Per $R \to \infty, \varepsilon \to 0$, il 3° ed il 4° integrale della precedenre relazione sono uguali a zero.

Pertanto, abbiamo: $\int_0^\infty e^{-iz}dz = -i\int_0^\infty e^{-t}dt = -i$, da cui:

$$\int_0^\infty Cos(z)dz - i\int_0^\infty Sin(z)dz = -i$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie, ricaviamo:

$$\int_0^\infty Cos(z)dz = 0 \quad , \quad \int_0^\infty Sin(z)dz = 1 \qquad \text{(B.4.07)}$$

cioè: $$(Sin(z))\Big|_0^\infty = \lim_{z\to\infty} Sin(z) = 0$$

$$(-Cos(z))\Big|_0^\infty = -\lim_{z\to\infty} Cos(z) + 1 = 1$$

quindi: $$\lim_{z\to\infty} Cos(z) = 0$$

Le formule precedenti discendono dall'applicazione del primo teorema integrale di Cauchy,

ma possiamo asserire con certezza che i valori di $\lim_{z\to\infty} Sin(z)$ e di $\lim_{z\to\infty} Cos(z)$,

sono compresi tra -1 e +1.

Esaminando la (B.4.01), osserviamo che:

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{2}$$

mentre $$\lim_{z\to\infty}\int_0^\infty \frac{Sin(zt)dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{1}{4} \qquad \text{(B.4.08)}$$

Dalla (B.4.03) ricaviamo:

$$\lim_{z\to 0}\left(\sum_{k=0}^{2n} C_{-1}(2n,k)(e^z-1)^{-1-k} - (2n)!z^{-1-2n}\right) = 0$$

cioè: $$\lim_{z\to 0}\left(((e^z-1)^{-1})^{(2n)} - (2n)!z^{-1-2n}\right) = 0 \qquad \text{(B.4.09)}$$

Ponendo, $z = i\pi$, nella (B.4.03, troviamo:

$$2i\int_0^{\infty}\frac{t^{2n}Sh(\pi t)}{e^{2\pi t}-1}dt=(-1)^n\sum_{K=0}^{2n}C_{-1}(2n,k)(-2)^{-1-k}-(-1)^n(2n)!(i\pi)^{-1-2n}$$

Uguagliando le parti immaginarie, ricaviamo:

$$\int_0^{\infty}\frac{t^{2n}Sh(\pi t)}{e^{2\pi t}-1}dt=\frac{1}{2}(2n)!\pi^{-1-2n}$$

Ponendo $\pi t=u$,otteniamo:

$$\int_0^{\infty}\frac{u^{2n}Shu}{e^{2u}-1}dt=\frac{1}{2}(2n)! \qquad \text{(B.4.10)}$$

Le relazioni (B.4.05), (B.4.09) e (B.4.10) sono state verificate con apposito programma

B.5.01 – Applicazioni

Cosideriamo la Funzione $\frac{1}{Sinhz}$

Operando lo sviluppo di tipo (b), otteniamo:

$$\frac{1}{Sinhz}=-2e^{z}\sum_{k\geq 0}e^{2zk}=-2\sum_{k\geq 0}e^{z(1+2k)}=\frac{1}{e^{z}-1}+\frac{1}{e^{z}+1} \qquad \text{(B.5.01)}$$

Dervivando, n volte, rispetto a z, i membri della (B.5.01), troviamo:

$$-2\sum_{k\geq 0}(1+2k)^n e^{z(1+2k)}=\sum_{k=0}^{n}C_{-1}(n,k)(e^{z}-1)^{-1-k}+\sum_{k=0}^{n}C_{1}(n,k)(e^{z}+1)^{-1-k} \qquad \text{(B.5.02)}$$

Ponendo, nella (B.5.02), $z=-\infty$, troviamo:

$$\sum_{k=0}^{n}C_{-1}(n,k)(-1)^{-1-k}+\sum_{k=0}^{n}C_{1}(n,k)=0$$

cioè: $$\sum_{k=0}^{n}C_{-1}(n,k)(-1)^{k}=\sum_{k=0}^{n}C_{1}(n,k) \qquad \text{(B.5.03)}$$

Dal confronto tra la (A.3.03) e la (B.3.01), ricaviamo:

$$C_{-1}(n,k)=C_{1}(n,k)(-1)^{k} \qquad \text{(B.5.04)}$$

Esaminando i triangoli (T1) e (T2), riscontriamo che la (B.5.04) risulta verificata.

Inoltre, abbiamo:

$$\left(\frac{1}{Sinhz}\right)^{(n)}=\left(\frac{2e^{x}}{e^{2z}-1}\right)^{(n)}=2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}((e^{2z}-1)^{-1})^{(k)}e^{z}=-2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k}\sum_{h\geq 0}e^{z+2zh}(h)^{k}=$$

$$=2e^{z}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k}\sum_{j=0}^{k}C_{-1}(k,j)(e^{2z}-1)^{-1-j}$$, da cui:

$$-2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k}\sum_{h\geq 0}e^{2zh}(h)^{k}=2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k}\sum_{j=0}^{k}C_{-1}(k,j)(e^{2z}-1)^{-1-j}$$

Per $z=-\infty$, k = 0, h=0, il primo membro della precedente relazione risulta uguale a -2, e quindi:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k}\sum_{j=0}^{k}C_{-1}(k,j)(-1)^{-j}=1$$

Per la (B.3.01), abbiamo:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k}\sum_{v=0}^{j}(-1)^{v}\binom{j}{v}(1+v)^{k}=1 \qquad \text{(B.5.05)}$$

La (B.5.05) è stata verificata con apposito programma

C.1.01- Prendiamo ora in esame la Funzione $(e^{z}+1)^{-p}$

F(p,z) = $(e^{z}+1)^{-p}$, (p > 0). (C.1.01)

Eseguendo lo sviluppo di tipo (a) della (C.1.01), otteniamo:

F(p,z) = $(e^{z}+1)^{-p}=e^{-pz}(1+e^{-z})^{-p}=e^{-pz}\sum_{k\geq 0}\binom{-p}{k}e^{-zk}=\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^{k}e^{-z(p+k)}$, (C.1.02)

La serie a destra della (C.1.02) è definita nel semipiano $R_{e}z\geq 0$, ad eccezione

dei punti per i quali $e^{z}=-1$.

Derivando i membri della (C.1.02), n volte, rispetto a z, abbiamo:

$$((e^{z}+1)^{-p})^{(n)}=(-1)^{n}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^{k}(p+k)^{n}e^{-z(p+k)}=\sum_{k=0}^{n}C_{1,p}(n,k)(e^{z}+1)^{-p-k} \qquad \text{(C.1.03)}$$

Abbiamo posto: $((e^{z}+1)^{-p})^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_{1,p}(n,k)(e^{z}+1)^{-p-k}$,

dove $C_{1,p}(n,k)$ rappresentano i coefficienti del polinomio indicato a destra della (C.1.03);

è chiaro che detti coefficienti dipendono da n, k, p.

Ponendo, nella (C.1.03), z = 0, troviamo:

$$(-1)^n \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k (p+k)^n = \sum_{k=0}^{n} C_{1,p}(n,k) 2^{-p-k} \qquad \text{(C.1.04)}$$

La serie indicata a sinistra della (C.1.04), chiaramente, è una serie divergente,

ma è rappresentata dal valore della sommatoria indicata a destra della (C.1.04).

Ponendo, nella (C.1.03), $e^z = -1$, troviamo che il membro a destra della (C.1.03)

assume il valore infinito.

Moltiplicando i membri della (C.1.03) per $(e^z+1)^{n+p}$, e passando al limite per $z \to i\pi$,

otteniamo:

$$(-1)^n \lim_{z \to i\pi} (e^z+1)^{n+p} \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k (p+k)^n e^{-z(p+k)} = C_{1,p}(n,n) =$$

= -p(-p-1)(-p-2)...(-p-n+1)(-1)^n = $\binom{-p}{n} n!(-1)^n = \binom{p+n-1}{n} n!$, (C.1.05)

Abbiamo quindi: $C_{1,p}(n,n) = \binom{-p}{n} n!(-1)^n = \binom{p+n-1}{n} n!$ (C.1.06)

Inoltre, osserviamo che:

$$\lim_{z \to i\pi} \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k (p+k)^n e^{-z(p+k)} = (-1)^{-p} \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (p+k)^n = (-1)^{-p} \infty$$

C.2.01 Sviluppo di tipo (b) della Funzione F(z,p) = $(e^z+1)^{-p}$ **, p > 0**

Eseguendo lo sviluppo di tipo (b) della Funzione F(z,p) = $(e^z+1)^{-p}$, abbiamo:

$$F(z,p) = (e^z+1)^{-p} = \sum_{k\geq 0} \binom{-p}{k} e^{zk} = \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k e^{kz} \qquad \text{(C.2.01)}$$

La serie a destra della (C.2.01) è definita nel semipiano complesso $R_e z \leq 0$,

ad eccezione dei punti per i quali $e^z = -1$.

Derivando i membri della (C.2.01), n volte, rispetto a z, otteniamo:

$$((e^z+1)^{-p})^{(n)} = \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k k^n e^{zk} = \sum_{k=0}^{n} C_{1,p}(n,k)(e^z+1)^{-p-k} , \qquad \text{(C.2.02)}$$

Ponendo, nella (C.2.02), z = 0, troviamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k k^n = \sum_{k=0}^{n} C_{1,p}(n,k)2^{-p-k}, \qquad \text{(C.2.03)}$$

La serie a sinistra della (C.2.03) è una serie chiaramente divergente,

ma è rappresentata dal valore finito della sommatoria indicata a destra della (C.2.03).

Ponendo, nella (C.2.02), $e^z = 0$, cioè $z = -\infty$, abbiamo:

$$\sum_{k=0}^{n} C_{1,p}(n,k) = 0 \qquad \text{(C.2.04)}$$

C.3.01 Calcolo dei coefficiento $C_{1,p}(n,k)$

Ponendo, nella (C.1.03), $e^z + 1 = t^{-1}$, cioè $e^z = \dfrac{1-t}{t}$, ricaviamo:

$$(-1)^n \sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k (p+k)^n \left(\frac{t}{1-t}\right)^{p+k} = \sum_{k=0}^{n} C_{1,p}(n,k)t^{p+k}$$

da cui $$(-1)^n \sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k (p+k)^n t^k (1-t)^{-p-k} = \sum_{k=0}^{n} C_{1,p}(n,k)t^k \qquad \text{(C.3.01)}$$

Derivando, m volte, $m \leq n$, rispetto a t, la (C.3.01), e ponendo dopo t = 0, abbiamo:

$$(-1)^n \sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k (p+k)^n \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(t^k)^{(j)}((1-t)^{-p-k})^{(m-j)} = \sum_{k=0}^{n} C_{1,p}(n,k)(t^k)^{(m)}$$

Ricordando che $(t^k)^{(j)}$, nel punto t=0, è diverso da zero solamente quando j = k, otteniamo:

$$(-1)^n \sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k (p+k)^n \binom{m}{k} k! \frac{\Gamma(m-k+p+k)}{\Gamma(p+k)} = C_{1,p}(n,m)m!,$$ da cui:

$$C_{1,p}(n,m) = (-1)^n \binom{m+p-1}{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k (p+k)^n \qquad \text{(C.3.02)}$$

Per m = n, abbiamo

$$C_{1,p}(n,n) = (-1)^n \binom{n+p-1}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k (p+k)^n \qquad \text{(C.3.03)}$$

$$C_{1,p}(n,0) = (-p)^n$$

$$C_{1,p}(n,1) = (-1)^n p(p^n - (p+1)^n) = (-1)^{n-1} p\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}p^k$$

Dala (C.3.03), tenendo presente la (C.1.07), troviamo:

$$(-1)^n \binom{n+p-1}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (p+k)^n = \binom{n+p-1}{n} n! \quad \text{, per cui:}$$

$$C_{1,p}(n,n) = \binom{n+p-1}{n} n!$$

Pertanto, dalla (C.3.03) ricaviamo:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (p+k)^n = (-1)^n n! \qquad \text{(C.3.04)}$$

E' sorprendente osservare che la sommatoria indicata nel membro a sinistra della (C.3.04) risulta indipendente da p.

La (C.3.04) è stata verificata con un opportuno programma.

Integrando i membri della (C.1.02), rispetto a z, tra i limiti 0 ed infinito, ricaviamo:

$$\int_0^\infty e^{-pz}(1+e^{-z})^{-p}\,dz = \sum_{k\ge 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k \int_0^\infty e^{-z(p+k)}\,dz = \sum_{k\ge 0} \binom{p+k-1}{k} \frac{(-1)^k}{p+k}$$

$$\int_0^\infty e^{-pz}(1+e^{-z})^{-p}\,dz = (e^{-z} = t) = \int_0^1 \frac{t^{p-1}dt}{(1+t)^p}$$

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}dt}{(1+t)^p} = \int_0^1 \left(\frac{t+1-1}{t+1}\right)^{p-1} \frac{dt}{t+1} = \ln 2 + \sum_{k\ge 1} \binom{p-1}{k} (-1)^k \frac{1-2^{-k}}{k}$$

Pertanto: $$\sum_{k\ge 0} \binom{p+k-1}{k} \frac{(-1)^k}{p+k} = \ln 2 + \sum_{k\ge 1} \binom{p-1}{k} (-1)^k \frac{1-2^{-k}}{k} \qquad \text{(C.3.05)}$$

Moltiplicando i membri della (C.1.02) per e^{-qz} , ed integrando, rispetto a z,

tra i limiti 0 ed infinito, troviamo:

$$\int_0^\infty e^{-pz}e^{-qz}(1+e^{-z})^{-p}\,dz = \sum_{k\ge 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k \int_0^\infty e^{-z(p+q+k)}\,dz = \sum_{k\ge 0} \binom{p+k-1}{k} \frac{(-1)^k}{p+q+k};$$

$$\int_0^\infty e^{-pz}e^{-qz}(1+e^{-z})^{-p}\,dz = (e^{-z} = t) = \int_0^1 \frac{t^{p+q-1}dt}{(1+t)^p};$$

$$\int_0^1 \frac{t^{p+q-1}dt}{(1+t)^p} = \int_0^1 \left(\frac{t+1-1}{t+1}\right)^{p+q-1} \frac{dt}{(t+1)^{-q+1}} = \sum_{k\ge 1} \binom{p+q-1}{k} (-1)^k \int_0^1 (t+1)^{q-1-k}\,dt =$$

$$= \sum_{k\ge 1} \binom{p+q-1}{k} (-1)^k \frac{1-2^{q-k}}{k-q}$$

Per q non intero, abbiamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}\frac{(-1)^k}{p+q+k}=\sum_{k\geq 1}\binom{p+q-1}{k}(-1)^k\,\frac{1-2^{q-k}}{k-q} \qquad \text{(C.3.06)}$$

Per q = n, intero positivo, troviamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}\frac{(-1)^k}{p+n+k}=\binom{p+n-1}{n}(-1)^n\ln 2+\sum_{k\geq 1,k\neq n}\binom{p+n-1}{k}(-1)^k\,\frac{1-2^{n-k}}{k-n} \qquad \text{(C.3.07)}$$

Per p - 1 = m, (intero positivo), abbiamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{m+k}{k}\frac{(-1)^k}{m+1+n+k}=\binom{m+n}{n}(-1)^n\ln 2+\sum_{k\geq 1,k\neq n}\binom{m+n}{k}(-1)^k\,\frac{1-2^{n-k}}{k-n} \qquad \text{(C.3.08)}$$

C.4.01- Applicazioni

Consideriamo la Funzione $(\frac{1}{Cosh(z)})^p$

CA1) Caso di p = 1

Per p = 1, abbiamo: $$\frac{1}{Cosh(z)}=\sum_{k\geq 0}E_k\,\frac{z^k}{k!} \qquad \text{(C.4.01)}$$

dove E_k sono i ben noti numeri di Eulero, con $E_0=1, E_1=0, E_2=-1, E_3=0, E_4=5$,....

I numeri E_n si ottengono derivando, n volte, rispetto a z, i membri della (C.4.01),

e ponendo dopo z = 0. Abbiamo cioè:

$$(\frac{1}{Cosh(z)})^{(n)}=(\frac{2e^z}{e^{2z}+1})^{(n)}=2\sum_{k=0}^{n}(e^z)^{(n-k)}((e^{2z}+1)^{-1})^{(k)}$$

Applicando la (C.1.03), e passando al limite per z tendente a 0, troviamo:

$$\lim_{z\to 0}(\frac{1}{Cosh(z)})^{(n)}=2\lim_{z\to 0}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^z)^{(n-k)}((e^{2z}+1)^{-1})^{(k)}=2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\sum_{j=0}^{k}C_1(k,j)(2)^{-1-j}$$

Applicando la (A.3.03), abbiamo:

$$C_1(k,j)=(-1)^k\sum_{v=0}^{j}\binom{j}{v}(-1)^v(1+v)^k \qquad \text{(C.4.02)}$$

Quindi:

$$E_n=\lim_{z\to 0}(\frac{1}{Cosh(z)})^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2)^k\sum_{j=0}^{k}2^{-j}\sum_{v=0}^{j}(-1)^v\binom{j}{v}(1+v)^k \qquad \text{(C.4.03)}$$

$E_{4n}>0, E_{4n+2}<0$

$E_{2n+1} = 0$ per n = 0,1,2,...

Si dimostra facilmente che $\sum_{k\geq 0} E_{2k} = \ln 2$

Dalla (C.4.01), eseguendo lo sviluppo di tipo (a), e di tipo (b), rispettivamente, ricaviamo:

$$\frac{1}{Cosh(z)} = 2\sum_{k\geq 0}(-1)^k e^{-z(1+2k)} = \sum_{k\geq 0} E_k \frac{z^k}{k!}$$

$$\frac{1}{Cosh(z)} = 2\sum_{k\geq 0}(-1)^k e^{z(1+2k)} = \sum_{k\geq 0} E_k \frac{z^k}{k!}$$

Dalle due precedenti relazioni, derivando, n volte, rispetto a z, e ponendo dopo z = 0, ricaviamo:

$$\sum_{K\geq 0}(-1)^k (1+2k)^n = \frac{(-1)^n E_n}{2}$$

$$\sum_{K\geq 0}(-1)^k (1+2k)^n = \frac{E_n}{2}$$

Può sembrare strano che i secondi membri delle due precedenti relazioni presentino valori diversi, ma osserviamo che per n = 0, 1, 2, ..., $E_{2n+1} = 0$, e che per n pari detti membri presentano gli stessi valori; più precisamente, abbiamo:

$$\sum_{K\geq 0}(-1)^k (1+2k)^{2n+1} = 0 \qquad \text{(C.4.03a)}$$

$$\sum_{K\geq 0}(-1)^k (1+2k)^{2n} = \frac{E_{2n}}{2} \qquad \text{(C.4.03b)}$$

(Ved. [18], Pagg. 21-25)

Dalla (C.4.03a) ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0}(4k+1)^{2n+1} - \sum_{k\geq 1}(4k-1)^{2n+1} = 0 \qquad \text{(C.4.03c)}$$

Provvediano a dimostrare analiticamente la (C.4.03a)

F(n) = $\sum_{K\geq 0}(-1)^k (1+2k)^{2n+1} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}(2k)^j = \sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}2^j \sum_{k\geq 0}(-1)^k k^j$

Per j = 0 , abbiamo: $\sum_{k\geq 0}(-1)^k = \frac{1}{2}$

Quindi : F(n) = $\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}2^j\sum_{k\ge 0}(-1)^k k^j$

Per j pari, (j > 0), $\sum_{k\ge 0}(-1)^k k^{2j}=0$

Pertanto F(n) = $\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{n+1}\binom{2n+1}{2j-1}2^{2j-1}\sum_{k\ge 0}(-1)^k k^{2j-1}$

Ricordando la (B.2.02), abbiamo:

$$F(n) = \frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{n+1}\binom{2n+1}{2j-1}2^{2j-1}(2^{2j}-1)\frac{B_{2j}}{2j}=0$$

Ovvero:

$$\sum_{j=1}^{n+1}\binom{2n+1}{2j-1}2^{2j-1}(2^{2j}-1)\frac{B_{2j}}{j}=1 \qquad \text{(C.4.03c')}$$

valida per n =0, e per qualsiasi valore di n intero positivo.

Resta quindi dimostrata la (C.4.03a)

La (C.4.03c') può essere espressa nella seguente forma:

$$\sum_{j=1}^{n}\binom{2n-1}{2j-1}2^{2j-1}(2^{2j}-1)\frac{B_{2j}}{j}=1 \qquad \text{(C.4.03d)}$$

valida per ogni n > 0, (n intero pos.)

Dalla (C.4.03b), otteniamo:

$$\sum_{K\ge 0}(-1)^k(1+2k)^{2n}=\sum_{k=0}(-1)^k\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}(2k)^j=\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}2^j\sum_{k\ge 0}(-1)^k k^j$$

Pertanto dalla (C.4.03b) ricaviamo:

$$E_{2n}=2\sum_{K\ge 0}(-1)^k(1+2k)^{2n}=1-\sum_{j=1}^{n}\binom{2n}{2j-1}2^{2j-1}(2^{2j}-1)\frac{B_{2j}}{j} \qquad \text{(C.4.03e)}$$

La (C.4.03b), la (C.4.03d) e la (C.4.03e) sono state verificate con apposito programma.

CA2) Caso p > 0

Per p > 0, abbiamo:

$$\left(\frac{1}{Cosh(z)}\right)^p=\sum_{k\ge 0}E_{k,p}\frac{z^k}{k!} \qquad \text{(C.4.04)}$$

$E_{k,p}$ rappresentano i coefficienti dei termini dello sviluppo in serie del membro a sinistra della (C.4.04).

Per p = 3, n = 0,1,2.,..., $E_{o,3}=1, E_{2,3}=-\frac{3}{2}, E_{4,3}=\frac{11}{8}, E_{6,3}=-\frac{241}{240},....$

Per p = 5, n = 0,1,2,... $E_{o,5}=1, E_{2,5}=-\frac{5}{2}, E_{4,5}=\frac{85}{24}, E_{6,5}=-\frac{541}{144},...$

Per p = 1/5, $E_{o,p}=1, E_{2,p}=-\frac{1}{10}, E_{4,p}=\frac{13}{600}, E_{6,p}=-\frac{113}{18000},...$

Per p = 1/8, $E_{o,p}=1, E_{2,p}=-\frac{1}{16}, E_{4,p}=\frac{19}{1536}, E_{6,p}=-\frac{1279}{368640},...$

Per p = 1/9 $E_{o,p}=1, E_{2,p}=-\frac{1}{18}, E_{4,p}=\frac{7}{648}, E_{6,p}=-\frac{527}{174960},...$

Derivando la (C.4.04), n volte, rispetto a z, ricaviamo:

$$((\frac{1}{Cosh(z)})^{p})^{(n)}=((2e^{z})^{p}(e^{2z}+1)^{-p})^{(n)}=2^{p}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}((e^{z})^{p})^{(n-k)}((e^{2z}+1)^{-p})^{(k)} \qquad \text{(C.4.05)}$$

Per z = 0, troviamo:

$$E_{n,p}=\lim_{z\to 0}((\frac{1}{Cosh(z)})^{p})^{(n)}=2^{p}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^{n-k}\sum_{j=0}^{k}C_{1,p}(k,j)2^{-p-j}2^{k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^{n-k}(-2)^{k}\sum_{j=0}^{k}2^{-j}\binom{j+p-1}{j}\sum_{v=0}^{j}(-1)^{v}\binom{j}{v}(p+v)^{k} \qquad \text{(C.4.06)}$$

Nello sviluppo delle due precedenti relazioni abbiamo applicato la (C.1.03) e la (C.4.02).

Osserviamo che per p > 0, e n = 0,1,2,3,..., $E_{2n+1,p}=0$; abbiamo quindi:

$$E_{2n+1,p}=\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}p^{2n+1-k}(-2)^{k}\sum_{j=0}^{k}2^{-j}\binom{j+p-1}{j}\sum_{v=0}^{j}(-1)^{v}\binom{j}{v}(p+v)^{k}=0 \qquad \text{(C.4.06a)}$$

$$E_{2n,p}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}p^{2n-k}(-2)^{k}\sum_{j=0}^{k}2^{-j}\binom{j+p-1}{j}\sum_{v=0}^{j}(-1)^{v}\binom{j}{v}(p+v)^{k} \qquad \text{(C.4.06b)}$$

Operando lo sviluppo di tipo (a) del primo membro della (C.4.04), otteniamo:

$$(\frac{1}{Cosh(z)})^{p}=(\frac{2e^{-z}}{e^{-2z}+1})^{p}=2^{p}e^{-zp}\sum_{k\geq 0}\binom{-p}{k}e^{-2zk}=2^{p}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^{k}e^{-z(p+2k)}$$

Derivando, n volte, rispetto a z, i membri della precedente relazione, e ponendo dopo, z = 0,

ricaviamo:

$$E_{n,p} = \lim_{z \to 0}\left(\left(\frac{1}{Cosh(z)}\right)^p\right)^{(n)} = (-1)^n 2^p \sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k (p+2k)^n \qquad \text{(C.4.07)}$$

La serie indicata nell'ultimo membro della (C.4.07) è certamente divergente, ma

è rappresentata da $(-1)^n 2^{-p} E_{n,p}$

$$E_{2n+1,p} = -2^p \sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k (p+2k)^{2n+1} = 0 \qquad \text{(C.4.07')}$$

Operando, invece, lo sviluppo di tipo (b) del primo membro della (C.4.04), ricaviamo:

$$\left(\frac{1}{Cosh(z)}\right)^p = \left(\frac{2e^z}{e^{2z}+1}\right)^p = 2^p e^{zp} \sum_{k\geq 0}\binom{-p}{k} e^{2zk} = 2^p \sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k e^{z(p+2k)}$$

Derivando, n volte, rispetto a z, i membri della precedente relazione, e ponendo dopo, z = 0,

ricaviamo:

$$E_{n,p} = \lim_{z \to 0}\left(\left(\frac{1}{Cosh(z)}\right)^p\right)^{(n)} = 2^p \sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k (p+2k)^n \qquad \text{(C.4.08)}$$

La serie indicata nel secondo membro della (C.4.08) è certamente divergente,

ma è rappresentata dal valore $2^{-p} E_{n,p}$

Le serie (C.4.07) e (C.4.08), per n dispari, sembra che presentino valori opposti, ma per n pari

presentano gli stessi valori, e per n dispari presentano ancora gli stessi valori in quanto $E_{2n+1,p} = 0$

Per n = 0, dalla (C.4.08) abbiamo: $2^p \sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k = 1$,

cioè: $\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k = 2^{-p}$ formula ben nota.

Dall'esame della (C.4.07) e della (C.4.08) troviamo che:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k (p+2k)^{2n+1} = 0 \qquad \text{(C.4.09)}$$

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k (p+2k)^{2n} = 2^{-p} E_{2n,p} \qquad \text{(C.4.10)}$$

Le relazioni (C.4.03), (C.4.06), e (C.4.6a) sono state verificate con un apposito programma.

Possiamo trasformare la (C.4.09); operando abbiamo:

$$\sum_{k\ge 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k(p+2k)^{2n+1} = p^{2n+1}\sum_{k\ge 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k\sum_{h=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{h}(\frac{2k}{p})^h =$$

$$= p^{2n+1}\sum_{h=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{h}2^h p^{-h}\sum_{k\ge 0}\binom{-p}{k}k^h$$

Ora, $\sum_{k\ge 0}\binom{-p}{k}k^h = \lim_{z\to 0}((e^z+1)^{-p})^{(h)} = \sum_{j=0}^{h}C_{1,p}(h,j)2^{-p-j}$

Applicando la (C.3.02), rivaviamo:

$$\sum_{k\ge 0}\binom{-p}{k}k^h = \sum_{j=0}^{h}2^{-p-j}(-1)^h\binom{j+p-1}{j}\sum_{v=0}^{j}\binom{j}{v}(-1)^v(p+v)^h$$

In definitiva abbiamo:

$$\sum_{k\ge 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k(p+2k)^{2n+1} = p^{2n+1}\sum_{h=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{h}2^h p^{-h}\sum_{k\ge 0}\binom{-p}{k}k^h =$$

$$= p^{2n+1}\sum_{h=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{h}2^h p^{-h}\sum_{j=0}^{h}2^{-p-j}(-1)^h\binom{j+p-1}{j}\sum_{v=0}^{j}\binom{j}{v}(-1)^v(p+v)^h = 0 \qquad \text{(C.4.11)}$$

Riprendiamo la relazione:

$$2^p\sum_{k\ge 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k e^{-z(p+2k)} = \sum_{k\ge 0}E_{k,p}\frac{z^k}{k!}$$

Ponendo, z = qy, nella precedente relazione, e moltiplicando ambo i membri della stessa relazione per $e^{y(pq-1)}$, otteniamo:

$$2^p\sum_{k\ge 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k e^{-y(1+2qk)} = \sum_{k\ge 0}E_{k,p}\frac{(qy)^k}{k!}e^{y(pq-1)} \qquad \text{(C.4.12)}$$

Derivando, n volte, rispetto a y, la (C.4.12), e ponendo dopo y=0, troviamo:

$$2^p(-1)^n\sum_{k\ge 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k(1+2qk)^n = \sum_{k\ge 0}E_{k,p}q^k\binom{n}{k}(pq-1)^{n-k}$$

Sostituendo 2n ad n, e poi 2n+1 ad n, ricaviamo:

$$\sum_{k\ge 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k(1+2qk)^{2n} = 2^{-p}\sum_{k=0}^{n}E_{2k,p}q^{2k}\binom{2n}{2k}(pq-1)^{2n-2k} \qquad \text{(C.4.13)}$$

$$\sum_{k\ge 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k(1+2qk)^{2n+1} = 2^{-p}\sum_{k=0}^{n}E_{2k,p}q^{2k}\binom{2n+1}{2k}(pq-1)^{2n+1-2k} \qquad \text{(C.4.14)}$$

Moltiplicando ambo i membri della (C.4.04) per e^{-z} ed integrando, rispetto a z, tra i limiti 0 e ∞, otteniamo:

$$\sum_{k\geq 0} E_{k,p} = \int_0^\infty \left(\frac{2e^{-z}}{1+e^{-2z}}\right)^p e^{-z} dz = (e^{-z} = y) = \int_0^1 \left(\frac{2y}{1+y^2}\right)^p dy = (y^2 = u) = 2^{p-1} \int_0^1 \frac{u^{\frac{p-1}{2}}}{(1+u)^p} du =$$

$$= (1+u = t) = 2^{p-1}(-1)^{\frac{p-1}{2}} \int_1^2 \frac{(1-t)^{\frac{p-1}{2}}}{t^p} dt = 2^{p-1}(-1)^{\frac{p-1}{2}} \sum_{k\geq 0} \binom{\frac{p-1}{2}}{k} (-1)^k \frac{2^{k+1-p}-1}{k+1-p}$$

Cioè: $$\sum_{k\geq 0} E_{k,p} = 2^{p-1}(-1)^{\frac{p-1}{2}} \sum_{k\geq 0} \binom{\frac{p-1}{2}}{k} (-1)^k \frac{2^{k+1-p}-1}{k+1-p}$$,(p non intero) (C.4.15)

Per p = n, intero positivo, abbiamo:

$$\sum_{k\geq 0} E_{k,n} = 2^{n-1}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\sum_{k\geq 0, k\neq n-1} \binom{\frac{n-1}{2}}{k} (-1)^k \frac{2^{k+1-n}-1}{k+1-n} + \binom{\frac{n-1}{2}}{n-1} (-1)^{n-1} \ln 2 \right)$$

C.4.16)

Per p = 1+2m, (m intero pos.), ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0} E_{k,1+2m} = 2^{2m}(-1)^{m-1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \frac{2^{k-2m}-1}{2m-k}$$ (C.4.16’)

La (C.4.16’) è stata verificata con apposito programma

CA3) Esaminiamo ora la Funzione $\left(\frac{2z}{e^z+1}\right)^p$

Per p =1, abbiamo la Funzione F(z) = $\frac{2z}{e^z+1} = \sum_{K\geq 0} G_k \frac{z^k}{k!}$ (C.4.17)

dove G_k rappresentano i ben noti numeri di Genocchi,

essendo $G_0 = 0, G_1 = 1, G_2 = -1, G_3 = 0, G_4 = 1, G_5 = 0, G_6 = 17, \ldots$

$G_{2n+1} = 0, G_{4n} > 0, G_{4n-2} < 0, n = 1,2,3,\ldots$

$G_{2n} = 2(1-2^{2n})B_{2n}$ $\qquad \sum_{k\geq 1} G_{2k} = 1 - \frac{\pi^2}{6}$ (ved. [18], pag. 26)

Derivando, n volte, rispetto a z, la (C.4.12), e ponendo dopo z = 0, otteniamo:

$$G_n = \lim_{z\to 0} \left(\frac{2z}{e^z+1}\right)^{(n)} = 2 \lim_{z\to 0} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z)^{(k)} ((e^z+1)^{-1})^{(n-k)} = 2n \sum_{k=0}^{n-1} C_1(n-1,k) 2^{-1-k}$$

Applicando la (A.3.03), con n > 0, ricaviamo:

$$G_n = n(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(1+j)^{n-1} \tag{C.4.18}$$

Sostituendo, 2n+1 ad n, abbiamo:

$$G_{2n+1} = (2n+1)\sum_{k=0}^{2n} 2^{-k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(1+j)^{2n} = 0 \tag{C.4.18'}$$

La relazione (C.4.18') è stata verificata con apposito programma.

Per p > 1, otteniamo:

$$(\frac{2z}{e^z+1})^p = \sum_{k\geq 0} G_{k,p}\frac{z^k}{k!} \tag{C.4.19}$$

Naturalmente i coefficienti $G_{k,p}$ dipendono da k e p.

Derivando, n volte, rispetto a z, i membri della (C.4.19), e ponendo dopo z = 0,

ricaviamo:

$$G_{n,p} = \lim_{z\to 0}((\frac{2z}{e^z+1})^p)^{(n)} = 2^p \lim_{z\to 0}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(z^p)^{(n-k)}((e^z+1)^{-p})^{(k)}$$

Ricordando che, per z = 0, $(z^p)^{(n-k)}$ è diverso da zero solamente quando p = n – k,

otteniamo:

$$G_{n,p} = 2^p\binom{n}{n-p}p!\sum_{j=0}^{n-p} C_{1,p}(n-p,j)2^{-p-j} \text{ , (p intero positivo, } 0 < p \leq n)$$

Applicando la (C.3.02), ricaviamo:

$$G_{n,p} = \frac{n!(-1)^{n-p}}{(n-p)!}\sum_{j=0}^{n-p}2^{-j}\binom{j+p-1}{j}\sum_{v=0}^{j}(-1)^v\binom{j}{v}(p+v)^{n-p} \tag{C.4.20}$$

La (C.4.18) e la (C.4.20) sono state verificate con apposito programma.

Inoltre:

$$G_{n,p} = \lim_{z\to 0}((\frac{2z}{e^z+1})^p)^{(n)} = 2^p\binom{n}{n-p}p!\sum_{j\geq 0}(-1)^j\binom{j+p-1}{j}(p+j)^{n-p} \text{ , } (0 < p \leq n)\text{, (p intero pos.)}$$

Cioè:

$$\sum_{j\geq 0}(-1)^j\binom{j+p-1}{j}(p+j)^{n-p} = 2^{-p}\frac{(n-p)!}{n!}G_{n,p} \tag{C.4.21}$$

La serie a sinistra della (C.4.21) è certamente divergente, ma è rappresentata dal valore del membro a destra della medesima relazione.

Per p = n, abbiamo:

$$\sum_{j\geq 0}\binom{j+n-1}{j}(-1)^j = \frac{2^{-n}}{n!}G_{n,n} \tag{C.4.22}$$

Poichè: $\sum_{j\geq 0}\binom{j+n-1}{j}(-1)^j = 2^{-n}$

Dalla (C.4.22) ricaviamo che: $G_{n,n} = n!$, cioè:

$$G_{n,n} = \lim_{z\to 0}((\frac{2z}{e^z+1})^n)^{(n)} = n! \tag{C.4.23}$$

La (C.4.23) è stata verificata con apposito programma

D.1.01- Prendiamo in esame la Funzione $(e^z-1)^{-p}$ **,** p > 0

Eseguendo lo sviluppo in serie di tipo (a) della Funzione $(e^z-1)^{-p}$, troviamo:

$$(e^z-1)^{-p} = e^{-pz}\sum_{k\geq 0}\binom{-p}{k}(-1)^k e^{-zk} = \sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}e^{-z(p+k)} \tag{D.1.01}$$

La serie a destra della (D.1.01) è definita nel semipiano $R_e z \geq 0$,

ad eccezione dei punti nei quali $e^z = 1$

Derivando la (D.1.01), n volte, rispetto a z, ricaviamo:

$$((e^z-1)^{-p})^{(n)} = (-1)^n\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(p+k)^n e^{-z(p+k)} = \sum_{k=0}^{n} C_{-1,p}(n,k)(e^z-1)^{-p-k} \tag{D.1.02}$$

Ponendo, nella (D.1.02), $z = i\pi$, troviamo:

$$(-1)^n\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(p+k)^n(-1)^{-p-k} = \sum_{k=0}^{n} C_{-1,p}(n,k)(-2)^{-p-k}$$, da cui:

$$(-1)^n\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k(p+k)^n = \sum_{k=0}^{n} C_{-1,p}(n,k)(-1)^k 2^{-p-k} \tag{D.1.03}$$

La serie $\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k(p+k)^n$ è chiaramente divergente, ma è rappresentata

dal valore finito della sommatoria $\sum_{k=0}^{n} C_{-1,p}(n,k)(-1)^{n-k} 2^{-p-k}$

Ponendo, nella (D.1.02), z = 0, il valore del membro a destra della (D.1.03), prescindendo dal segno, diventa infinito.

Moltiplicando i membri della (D.1.02) per $(-1)^n (e^z - 1)^{p+n}$, e passando al limite per z = 0, ricaviamo:

$$\lim_{z \to 0} (e^z - 1)^{p+n} \sum_{k \geq 0} \binom{p+k-1}{k} (p+k)^n e^{-z(p+k)} =$$
$$= \lim_{z \to 0} (e^z - 1)^{p+n} \sum_{k=0}^{n} C_{-1,p}(n,k)(e^z - 1)^{-p-k} = (-1)^n C_{-1,p}(n,n)$$

Possiamo affermare che:

$$C_{-1,p}(n,0) = (-p)^n$$

$$C_{-1,p}(n,n) = -p(-p-1)...(-p-n+1) =$$

$$= (-1)^n p(p+1)...(p+n-1) = (-1)^n \binom{p+n-1}{n} n!$$

Cioè: $$C_{-1,p}(n,n) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-p)^k$$

Quindi: $$\lim_{z \to 0} (e^z - 1)^{p+n} \sum_{k=0}^{n} C_{-1,p}(n,k)(e^z - 1)^{-p-k} = \binom{p+n-1}{n} n! \qquad \text{(D.1.04)}$$

cioè $$\lim_{z \to 0} (e^z - 1)^{p+n} \sum_{k \geq 0} \binom{p+k-1}{k} (p+k)^n e^{-z(p+k)} = \binom{p+n-1}{n} n! \qquad \text{(D.1.05)}$$

La (D.1.05) rappresenta un altro limite notevole.

s(n,k) rappresenta il numero di Stirling di prima specie.

La (D.1.04) è stata verificata con apposito programma.

Dalla (D.1.05) ricaviamo:

$$\lim_{z \to 0} \sum_{k \geq 0} \binom{p+k-1}{k} (p+k)^n e^{-z(p+k)} = \sum_{k \geq 0} \binom{p+k-1}{k} (p+k)^n = \infty \qquad \text{(D.1.06)}$$

Integrando la (D.1.01) tra i limiti 0 ed infinito, troviamo:

$$\int_0^\infty (e^z - 1)^{-p} dz = \sum_{k \geq 0} \binom{p+k-1}{k} \int_0^\infty e^{-z(p+k)} dz = \sum_{k \geq 0} \binom{p+k-1}{k} \frac{1}{p+k};$$

$$\int_0^\infty (e^z - 1)^{-p} dz = \int_0^\infty e^{-pz} \frac{dz}{(1-e^{-z})^p} = (e^{-z} = t) = -\int_1^0 t^{p-1}(1-t)^{-p} dt = \Gamma(p)\Gamma(1-p);$$

Pertanto: $\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}\frac{1}{p+k}=\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{Sin(\pi p)},(0<p<1)$ (D.1.07)

Per p intero, il valore della serie indicata a sinistra della (D.1.07) diventa infinito.

Per $p=\frac{1}{2}$, $\sum_{k\geq 0}\binom{\frac{1}{2}+k-1}{k}\frac{1}{1+2k}=\frac{\pi}{2}$

Ricordando che: $\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})$, otteniamo:

$\binom{\frac{1}{2}+k-1}{k}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+k)\Gamma(k+1)}{k!\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(k+1)}=\frac{\Gamma(2k+1)\sqrt{\pi}}{2^{2k}(k!)^2\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}$, e quindi:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{2k}{k}\frac{2^{-2k}}{1+2k}=\frac{\pi}{2} \qquad \text{(D.1.08)}$$

Moltiplicando ambo i membri della (D.1.01), per e^{-qz},

ed integrando, rispetto a z, tra i limiti 0 ed infinito, troviamo:

$$\int_0^\infty (e^z-1)^{-p}e^{-qz}dz=\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}\int_0^\infty e^{-z(q+p+k)}dz=\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}\frac{1}{q+p+k}$$

$$\int_0^\infty (e^z-1)^{-p}e^{-qz}dz=\int_0^\infty e^{-pz}e^{-qz}\frac{dz}{(1-e^{-z})^p}=(e^{-z}=t)=-\int_1^0 t^{q+p-1}(1-t)^{-p}dt=\frac{\Gamma(q+p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(q+1)};$$

Pertanto: $\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}\frac{1}{q+p+k}=\frac{\Gamma(q+p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(q+1)},(0<p<1,q>0)$ (D.1.09)

Per p = q = 1/2, troviamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{2k}{k}\frac{2^{-2k}}{1+k}=2 \qquad \text{(D.1.10)}$$

Per p = ½, q = n, ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{2k}{k}\frac{2^{-2k}}{2n+1+2k}=2^{-2n}\binom{2n}{n}\frac{\pi}{2} \qquad \text{(D.1.11)}$$

Le relazioni (D.1.08), (D.1.10) e (D.1.11) sono state verificate con apposito programma.

D.2.01- Considerazioni sullo sviluppo in serie di tipo (b) della Funzione $(e^z-1)^{-p}$

Eseguendo lo sviluppo in serie di tipo (b) della Funzione $(e^z-1)^{-p}$, otteniamo:

$$(e^z-1)^{-p}=(-1)^{-p}\sum_{k\geq 0}\binom{-p}{k}(-1)^k e^{kz}=(-1)^{-p}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}e^{kz} \qquad \text{(D.2.01)}$$

La serie a destra della (D.2.01) è definita nel semipiano complesso $R_e z\leq 0$, ad eccezione

dei punti nei quali $e^z=1$

Derivando, n volte, rispetto a z, i membri della (D.2.01), otteniamo:

$$((e^z-1)^{-p})^{(n)}=(-1)^p\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}k^n e^{kz}=\sum_{k=0}^{n}C_{-1,p}(n,k)(e^z-1)^{-p-k} \qquad \text{(D.2.02)}$$

Per $z=i\pi$, troviamo:

$$(-1)^{-p}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k k^n=\sum_{k=0}^{n}C_{-1,p}(n,k)(-2)^{-p-k}$$, da cui:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k k^n=\sum_{k=0}^{n}C_{-1,p}(n,k)(-1)^k 2^{-p-k} \qquad \text{(D.2.03)}$$

Ponendo, z = 0, nella (D.2.02), troviamo che la serie $\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}k^n$ assume,

prescindendo dal valore di $(-1)^{-p}$, il valore infinito.

Possiamo porre la (D.2.02) nella forma seguente:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}k^n e^{kz}=\sum_{k=0}^{n}C_{-1,p}(n,k)(-1)^k(1-e^z)^{-p-k} \qquad \text{(D.2.04)}$$

Moltiplicando i membri della (D.2.04) per $(1-e^z)^{p+n}$, e passando al limite

per z = 0, abbiamo:

$$\lim_{z\to 0}(1-e^z)^{p+n}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}k^n e^{kz}=(-1)^n C_{-1,p}(n,n) \qquad \text{(D.2.05)}$$

La (D.2.05) rappresenta un altro limite notevole.

Ponendo, nella (D.2.02), $z=-\infty$, troviamo:

$$\sum_{k=0}^{n}C_{-1,p}(n,k)(-1)^k=0 \qquad \text{(D.2.06)}$$

Dalla validità della (D.2.05), deriva che:

$$\lim_{z\to 0}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}k^n e^{kz}=\sum_{k\geq =}\binom{p+k-1}{k}k^n=\infty \qquad \text{(D.2.07)}$$

D.3.01- Calcolo dei coefficienti $C_{-1,p}(n,k)$

Ponendo, nella (D.1.02), $e^z - 1 = t^{-1}$, da cui $e^z = \frac{1+t}{t}$, ricaviamo:

$$(-1)^n \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (p+k)^n (\frac{t}{1+t})^{p+k} = \sum_{k=0}^{n} C_{-1,p}(n,k) t^{p+k}$$

cioè:

$$(-1)^n \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (p+k)^n (t)^k (1+t)^{-p-k} = \sum_{k=0}^{n} C_{-1,p}(n,k) t^k$$

Derivando, m volte, $m \leq n$, rispetto a t, la precedente relazione, e ponendo dopo t=0, otteniamo:

$$(-1)^n \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (p+k)^n \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (t^k)^{(j)} ((1+t)^{-p-k})^{(m-j)} = C_{-1,p}(n,m)(t^k)^{(m)}$$

Ricordando che, nel punto t = 0, $(t^k)^{(j)}$ è diverso da zero solo quando j = k, ricaviamo:

$$(-1)^n \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (p+k)^n \binom{m}{k} k! \frac{\Gamma(m-k+p+k)}{\Gamma(p+k)} (-1)^{m-k} = C_{-1,p}(n,m) m!$$, cioè:

$$(-1)^{n+m} \binom{m+p-1}{m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k (p+k)^n = C_{-1,p}(n,m) \qquad \text{(D.3.05)}$$

Per m = n, troviamo:

$$\binom{n+p-1}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (p+k)^n = C_{-1,p}(n,n) = (-1)^n \binom{n+p-1}{n} n!$$, da cui:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (p+k)^n = (-1)^n n! \qquad \text{(D.3.06)}$$

Ritroviamo così la (C.3.04).

Sostituendo la (D.3.05) nella (D.2.03), ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k k^n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} 2^{-p-k} \binom{k+p-1}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j (p+j)^n \qquad \text{(D.3.07)}$$

La serie a sinistra della (D.3.07) risulta certamente divergente, ma è rappresentata

dal valore finito della doppia sommatoria indicata a destra della (D.3.07).

Per p = 1 ricadiamo nei casi previsti dalla sezione (B)

Sostituendo, nella (D.3.07), p=2, e, 2n ad n, troviamo che:

$$\sum_{k\ge 0}\binom{2+k-1}{k}(-1)^k k^{2n} = \sum_{k\ge 0}(k+1)(-1)^k k^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} 2^{-2-k}(k+1)\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j (2+j)^{2n} =$$

$$= \sum_{k\ge 0}(-1)^k k^{2n+1} + \sum_{k\ge 0}(-1)^k k^{2n} \tag{D.3.08}$$

Ricordando la (B.2.02) e la (B.2.06), abbiamo:

$$-(2^{2n+2}-1)\frac{B_{2n+2}}{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n} 2^{-2-k}(k+1)\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j (2+j)^{2n}$$

Sostituendo, nella precedente relazione, n ad n+1, otteniamo:

$$-(2^{2n}-1)\frac{B_{2n}}{2n} = \sum_{k=0}^{2n-2} 2^{-2-k}(k+1)\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j (2+j)^{2n-2} \tag{D.3.09}$$

Sostituendo, nella (D.3.07), p=2, e, 2n-1 ad n, troviamo che:

$$\sum_{k\ge 0}\binom{k+1}{k}(-1)^k k^{2n-1} = -\sum_{k=0}^{2n-1} (2)^{-2-k}(k+1)\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j (2+j)^{2n-1} =$$

$$= \sum_{k\ge 0}(-1)^k k^{2n} + \sum_{k\ge 0}(-1)^k k^{2n-1}$$

Applicando la (B.2.02) e la (B.2.06), otteniamo:

$$(2^{2n}-1)\frac{B_{2n}}{2n} = \sum_{k=0}^{2n-1} 2^{-2-k}(k+1)\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j (2+j)^{2n-1} \tag{D.3.10}$$

Sommando membro a membro la (D.3.09) e la (D.3.10), troviamo:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} 2^{-2-k}(k+1)\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j (2+j)^{2n-1} + \sum_{k=0}^{2n-2} 2^{-2-k}(k+1)\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j (2+j)^{2n-2} = 0$$

Le relazioni (D.3.09) e (D.3.10) sono state verificate con apposito programma.

Sostituendo, nella (D.3.07), p = m+1, (m intero positivo), e 2n ad n, troviamo:

$$\sum_{k\ge 0}\binom{m+k}{k}(-1)^k k^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (2)^{-m-1-k}\binom{m+k}{m}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j (m+1+j)^{2n} \tag{D.3.11}$$

$$\binom{m+k}{m} = (m+k)(m+k-1)(m+k-2)...(m+k-m+1)\frac{1}{m!} = \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m} s(m,j)(m+k)^j \tag{D.3.12}$$

Ripetiamo che s(m,j) rappresenta il numero di Stirling di prima specie.

Quindi: $$\sum_{k\ge 0}\binom{m+k}{k}(-1)^k k^{2n} = \frac{1}{m!}\sum_{k\ge 0}(-1)^k k^{2n}\sum_{j=0}^{m} s(m,j)(m+k)^j =$$

$$= \frac{1}{m!}\sum_{k\geq 0}(-1)^k k^{2n}\sum_{j=0}^{m} s(m,j) m^j \sum_{v=0}^{j}\binom{j}{v}(\frac{k}{m})^v =$$

$$= \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m} s(m,j) m^j \sum_{v=0}^{j}\binom{j}{v} m^{-v}\sum_{k\geq 0}(-1)^k k^{2n+v} \qquad \text{(D.3.13)}$$

Ricordiamo che: $\sum_{k\geq 0}(-1)^k k^{2n+2v} = 0$

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k k^{2n+2v-1} = \sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n+2v-1} = -(2^{2n+2v}-1)\frac{B_{2n+2v}}{2n+2v}$$

Pertanto, dalla (D.3.11) e (D.3.13) otteniamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{m+k}{k}(-1)^k k^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} 2^{-m-1-k}\binom{m+k}{m}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j (m+1+j)^{2n} =$$

$$= \frac{-1}{m!}\sum_{j=0}^{m} s(m,j)\sum_{v=1}^{[j/2]}\binom{j}{2v-1} m^{j-2v+1}(2^{2n+2v}-1)\frac{B_{2n+2v}}{2n+2v}$$, da cui:

$$\sum_{j=0}^{m} s(m,j)\sum_{v=1}^{[j/2]}\binom{j}{2v-1} m^{j-2v+1}(2^{2n+2v}-1)\frac{B_{2n+2v}}{2n+2v} =$$

$$= -m!\sum_{k=0}^{2n} 2^{-m-1-k}\binom{m+k}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j (m+1+j)^{2n} \qquad \text{(D.3.14)}$$

Sostituendo, invece, nella (D.3.07), p = m+1, (m intero positivo), e 2n-1 ad n, troviamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{m+k}{k}(-1)^k k^{2n-1} = -\sum_{k=0}^{2n-1} 2^{-m-1-k}\binom{m+k}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j (m+1+j)^{2n-1}$$

Applicando la (D.3.12), abbiamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{m+k}{k}(-1)^k k^{2n-1} = \frac{1}{m!}\sum_{K\geq 0}(-1)^k k^{2n-1}\sum_{j=0}^{m} s(m,j)(m+k)^j =$$

$$= \frac{1}{m!}\sum_{K\geq 0}(-1)^k k^{2n-1}\sum_{j=0}^{m} s(m,j) m^j \sum_{v=0}^{j}\binom{j}{v} m^{-v} k^v = \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m} s(m,j) m^j \sum_{v=0}^{j}\binom{j}{v} m^{-v}\sum_{k\geq 0}(-1)^k k^{v+2n-1}$$

Per v pari, otteniamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k k^{2n+2v-1} = -(2^{2n+2v}-1)\frac{B_{2n+2v}}{2n+2v}$$

Quindi: $\sum_{k\geq 0}\binom{m+k}{k}(-1)^k k^{2n-1} = \frac{-1}{m!}\sum_{j=0}^{m} s(m,j) m^j \sum_{v=0}^{[j/2]}\binom{j}{2v} m^{-2v}(2^{2n+2v}-1)\frac{B_{2n+2v}}{2n+2v} =$

$$= -\sum_{k=0}^{2n-1} 2^{-m-1-k} \binom{k+m}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j (p+j)^{2n-1}$$, da cui:

$$\sum_{j=0}^{m} s(m,j) \sum_{v=0}^{[j/2]} \binom{j}{2v} m^{j-2v} (2^{2n+2v} - 1) \frac{B_{2n+2v}}{2n+2v} =$$

$$= m! \sum_{k=0}^{2n-1} 2^{-m-1-k} \binom{k+m}{m} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j (m+1+j)^{2n-1} \qquad \text{(D.3.15)}$$

Le relazioni (D.3.14) e (D.3.15) sono state verificate con apposito programma

D.4.01- Applicazioni

Prendiamo in esame la Funzione

$$\text{F(z)} = \left(\frac{z}{e^z - 1}\right)^p \qquad \text{(D.4.01)}$$

DB1)- Per p =1, abbiamo:

$$\frac{z}{e^z - 1} = z \sum_{k \ge 0} e^{-z(1+k)} = \sum_{h \ge 0} B_k \frac{z^k}{k!} \qquad \text{(D.4.02)}$$

dove B_k rappresentano i ben noti numeri di Bernoulli

$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, \ldots;$ $\qquad B_{2n+1} = 0$, n = 1,2,3,...

Derivando, n volte, rispetto a z, la (D.4.02) e ponendo dopo z =0, troviamo:

$$n(-1)^{n-1} \sum_{k \ge 0} (1+k)^{n-1} = B_n$$

Sostituendo nella precedente relazione 2n ad n, abbiamo la ben nota relazione:

$$\sum_{k \ge 0} (1+k)^{2n-1} = \frac{-B_{2n}}{2n}, \text{ (n = 1,2,3,...)} \qquad \text{(D.4.03)}$$

Sostituendo, invece, 2n+1 ad n, troviamo:

$$\sum_{k \ge 0} (1+k)^{2n} = 0, \qquad \text{(D.4.04)}$$

Le formule (D.4.03) e (D.4.04) sono state applicate ripetutamente nel corso del presente studio.

$$\sum_{k \ge 1} B_{2n} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{2} \qquad \text{(Ved. [18] Pag. 17)}$$

Una formula valida per il calcolo di B_n è la seguente:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} \binom{k}{v} (-1)^v v^n \qquad \text{(D.4.04')}$$

Possiamo facilmente dimostrare la (D.4.04')

Utilizzando la formula (3.22), riportata a pag. 9 della pubblicazione indicata al punto [19] dei riferimenti, otteniamo:

$$\frac{\ln(1-t)}{-t} = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k+1}$$

Sostituendo, nella precedente relazione, $1-t = e^z$, e sviluppando, troviamo:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k\geq 0} \frac{(1-e^z)^k}{k+1} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} \binom{k}{v} (-1)^v e^{zv}$$

Derivando, n volte, rispetto a z, ambo i membri della relazione precedente, e ponendo dopo z = 0, ricaviamo la (D.4.04').

DB2)-Caso di p > 0.

Sviluppando la Funzione (D.4.01) in serie di tipo (a), abbiamo

$$\left(\frac{z}{e^z-1}\right)^p = z^p e^{-pz} \sum_{k\geq 0} \binom{-p}{k} (-1)^k e^{-zk} = z^p \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} e^{-z(p+k)} = \sum_{k\geq 0} B_{k,p} \frac{z^k}{k!} \qquad \text{(D.4.05)}$$

I coefficienti $B_{k,p}$ dipendono ovviamente da k e p.

Derivando, n volte, rispetto a z, la (D.4.05), ricaviamo:

$$\left(\left(\frac{z}{e^z-1}\right)^p\right)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (z^p)^{(j)} \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^{n-j} (p+k)^{n-j} e^{-z(p+k)} = \left(\sum_{k\geq 0} B_{k,p} \frac{z^k}{k!}\right)^{(n)}$$

Per z=0, $(z^p)^{(j)}$ è diversa da zero solamente per j = p; pertanto ricaviamo:

$\binom{n}{p} p! \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^{n-p} (p+k)^{n-p} = B_{n,p}$, (p intero positivo, $0 < p < n$), da cui:

$$\sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (p+k)^{n-p} = (-1)^{n-p} \frac{(n-p)!}{n!} B_{n,p} \qquad \text{(D.4.06)}$$

La serie indicata nel primo membro della (D.4.06) è chiaramente divergente,

ma è rappresentata dal valore finito del secondo membro della medesima relazione.

Utilizzando lo sviluppo di tipo (b) della (D.4.01), troviamo:

$$\left(\frac{z}{e^z-1}\right)^p = z^p (-1)^{-p} \sum_{k\geq 0} \binom{-p}{k} (-1)^k e^{zk} = z^p (-1)^{-p} \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} e^{zk} = \sum_{k\geq 0} B_{k,p} \frac{z^k}{k!} \qquad \text{(D.4.07)}$$

Derivando, n volte, rispetto a z, e ponendo dopo z =0, ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}k^{n-p} = (-1)^p \frac{(n-p)!}{n!} B_{n,p} \qquad ,(\text{p, int. pos.}, 0 < p < n), \qquad \text{(D.4.08)}$$

Ponendo, p = n, nella (D.4.06) e nella (D.4.08), rispettivamente troviamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n+k-1}{k} = \frac{1}{n!} B_{n,n} \qquad \text{(D.4.09)}$$

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n+k-1}{k} = \frac{(-1)^n}{n!} B_{n,n} \qquad \text{(D.4.10)}$$

Osserviamo che, per n pari, le due precedenti relazioni risultano identiche,

mentre, per n dispari, esse presentano valori opposti.

Da verifiche eseguite, è risultato che la (D.4.10) rapprresenta la relazione che risponde

puntualmente all'esecuzione dei calcoli.

Sostituendo, nella (D.4.10), 2n+1 ad n, troviamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{2n+k}{k} = \frac{-1}{(2n+1)!} B_{2n+1,2n+1} \qquad \text{(D.4.11)}$$

$$\sum_{k\geq 0}\binom{2n+k}{k} = \sum_{k\geq 0}((2n+k)...(2n+k-2n+1))\frac{1}{(2n)!} = \frac{1}{(2n!)}\sum_{k\geq 0}\sum_{h=0}^{2n} a_h k^h$$

$$\sum_{k\geq 0}\sum_{h=0}^{2n} a_h k^h = \sum_{k\geq 0}(a_0 k^0 + \sum_{h=1}^{2n} a_k k^h)$$

essendo $a_0 = (2n)!$; $\sum_{k\geq 0} a_0 k^0 = a_0(1+\sum_{k\geq 1} k^0) = a_0(1-\frac{1}{2}) = \frac{a_0}{2}$

Ora, $\sum_{k\geq 0}\binom{2n+k}{k} = \frac{1}{(2n)!}\sum_{k\geq 0}(2n+k)(2n+k-1).......(2n+k-2n+1) =$

$$= \frac{1}{(2n)!}\sum_{k\geq 0}(-2n-k)(-2n-k+11).......(-k-1)(-k)\frac{1}{-k}$$

Ricordando che: $(-k)(-k-1)...(-k-(2n+1)+1) = \sum_{h=1}^{2n+1} s(2n+1,h)(-k)^h$, troviamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{2n+k}{k} = \frac{-1}{(2n)!}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k}\sum_{h=1}^{2n+1} s(2n+1,h)(-k)^h = -\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2n)!}\sum_{h=1}^{2n+1} s(2n+1,h)(-1)^h k^{h-1}$$

Ricordiamo che: $s(n,1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, s(n,0) = 0, s(0,0) = 1, (n > 0); pertanto, abbiamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{2n+k}{k} = -\frac{1}{(2n)!}((-1)^{2n-1}(2n)!\frac{1}{2}+\sum_{h=1}^{n}s(2n+1,2h)(-\frac{B_{2h}}{2h})) =$$

$$= \frac{1}{(2n)!}(\frac{(2n)!}{2}+\sum_{h=1}^{n}s(2n+1,2h)\frac{B_{2h}}{2h}) \qquad \text{(D.4.11')}$$

IL primo membro della (D.4.11') è una serie certamente divergente, ma è rappresentata

dal valore dell'ultimo membro della medesima relazione

Tenendo presente la (D.4.11), troviamo:

$$B_{2n+1,2n+1} = -(2n+1)(\frac{(2n)!}{2}+\sum_{h=1}^{n}s(2n+1,2h)\frac{B_{2h}}{2h}) \qquad \text{(D.4.12)}$$

La (D.4.12) è stata verificata con apposito programma.

Sostituendo, nella (D.4.10), 2n ad n, abbiamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{2n+k-1}{k} = \frac{1}{(2n)!}B_{2n,2n} \qquad \text{(D.4.13)}$$

Sviluppando la serie del primo membro della (D.4.13), ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{2n+k-1}{k} = \frac{1}{(2n-1)!}\sum_{k\geq 0}(2n+k-1)(2n+k-2)...(2n-1+k-(2n-1)+1) =$$

$$= \frac{1}{(2n-1)!}\sum_{k\geq 0}(-1)^{2n-1}(-k-1)(-k-2)...(-k-2n+1)\frac{(-k)}{(-k)} =$$

$$= \frac{1}{(2n-1)!}\sum_{k\geq 0}\sum_{h=1}^{2n}s(2n,h)(-1)^{h}k^{h-1} = \frac{1}{(2n-1)!}((-1)^{2n-1}(2n-1)!(-1)/2+\sum_{h=1}^{n}s(2n,2h)(-\frac{B_{2h}}{2h})) =$$

$$= \frac{1}{(2n-1)!}(\frac{(2n-1)!}{2}-\sum_{h=1}^{n}s(2n,2h)\frac{B_{2h}}{2h}) \qquad \text{(D.4.14)}$$

IL primo membro della (D.4.14) è una serie certamente divergente, ma è rappresentata

dal valore dell'ultimo membro della medesima relazione

Tenendo presente la (D.4.13), ricaviamo:

$$B_{2n,2n} = 2n(\frac{(2n-1)!}{2}-\sum_{h=1}^{n}s(2n,2h)\frac{B_{2h}}{2h}) \qquad \text{(D.4.15)}$$

Essendo $B_{2n,2n} > 0$, dalla (D.4.15) otteniamo che:

$$\sum_{h=1}^{n}s(2n,2h)\frac{B_{2h}}{h} < (2n-1)! \qquad \text{(D.4.16)}$$

La relazione (D.4.15) è stata verificata con apposito programma

DB3)- Caso di p > n, oppure p > 0 non intero.

Possiamo in questo caso calcolare i valori di $B_{n,p}$ nel modo seguente:

Poniamo: $(\frac{z}{e^z-1})^p = \sum_{k\geq 0} B_{k,p}\frac{z^k}{k!} = T(z);\quad \frac{z}{e^z-1} = B(z)$

Quindi: $(B(z))^p = T(z)$

da cui: plnB(z) = lnT(z) (D.4.17)

Derivando la (D.4.17), rispetto a z, otteniamo:

$p\frac{B'(z)}{B(z)} = \frac{T'(z)}{T(z)}$, cioè: $pB'(z)T(z) = T'(z)B(z)$ (D.4.18)

Sappiamo che: B(0)=1, B'(0)=-1/2, T(0)=1.

Dalla (D.4.18), ricaviamo: T'(0)=-p/2= $B_{1,p}$,

oppure: $p(\frac{z}{e^z-1})^{p-1}(\frac{z}{e^z-1})' = T'(z)$; per z=0, otteniamo: $T'(0) = B_{1,p} = -\frac{p}{2}$

Derivando la (D.4.18), n volte, rispetto a z, e ponendo dopo z = 0, ricaviamo:

$$p\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n+1-k}T^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T^{(k+1)}(0)B_{n-k} \qquad \text{(D.4.19)}$$

Per n=1, dalla (D.4.19), nel punto z = 0, abbiamo:

$p(B_2T^{(0)}(0) + B_1T^{'}(0)) = T'(0)B_1 + T^{(2)}(0)B_0$, cioè:

$p(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\frac{p}{2}) = \frac{p}{4} + T^{(2)}(0)$, da cui $T^{(2)}(0) = B_{2,p} = \frac{p^2}{4} - \frac{p}{12} = \frac{p}{12}(3p-1)$

Pertanto, ponendo successivamente, n = 2,3,4...., dalla (D.4.19), per successive

sostituzioni, ricaviamo i valori di $B_{3,p}, B_{4,p}, B_{5,p}\cdots$

Dalla (D.4.19) otteniamo:

$pT(0)B_{n+1} + p\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}T^{(k)}(0)B_{n+1-k} = T^{(n+1)}(0)B_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}T^{(k+1)}(0)B_{n-k}$, da cui:

$pB_{n+1} + p\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}T^{(k+1)}(0)B_{n-k} = T^{(n+1)}(0) + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}T^{(k+1)}(0)B_{n-k}$, cioè:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(p\binom{n}{k+1}-\binom{n}{k})T^{(k+1)}(0)B_{n-k}=T^{(n+1)}(0)-pB_{n+1} \qquad \text{(D.4.20)}$$

Per p = 1, troviamo:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\binom{n}{k+1}-\binom{n}{k})B_{k+1}B_{n-k}=0 \qquad \text{(D.4.21)}$$

oppure
$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{n-1-2k}{k+1}B_{k+1}B_{n-k}=0 \qquad \text{(D.4.22)}$$

cioè
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n-1-2k}{k+1}B_{k+1}B_{n-k}=-B_{n+1} \qquad \text{(D.4.23)}$$

Le relazioni (D.4.21), (D.4.22) e (D.4.23) sono state verificate con apposito programma.

Ponendo successivamente, nella (D.4.20), n=1,2,...,n, troviamo n equazioni nelle

n incognite $T^{(2)}(0),T^{(3)}(0)....,T^{(n+1)}(0)$; T'(0)=-p/2.

Pertanto utilizzando il metodo di Cramer è possibile calcolare tutte le n incognite,

ed in particolare il valore di $T^{(n+1)}(0)$

Se poniamo $(\frac{e^z-1}{z})^{-p}=(\frac{z}{e^z-1})^p=\sum_{k\geq 0}B_{k,p}\frac{z^k}{k!}=T(z)$ otteniamo:

$-p\ln\frac{e^z-1}{z}=\ln T(z)$, da cui, derivando, rispetto a z, abbiamo:

$$-p\frac{(\frac{e^z-1}{z})'}{\frac{e^z-1}{z}}=\frac{T'(z)}{T(z)}, \qquad \text{cioè:}-p(\frac{e^z-1}{z})'T(z)=\frac{e^z-1}{z}T'(z) \qquad \text{(D.4.24)}$$

Derivando la (D.4.24), n volte, rispetto a z, troviamo:

$$-p\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T^{(k)}(z)(\frac{e^z-1}{z})^{(n+1-k)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T^{(k+1)}(z)(\frac{e^z-1}{z})^{(n-k)} \quad ;$$

$$-pT(z)(\frac{e^z-1}{z})^{(n+1)}-p\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}T^{(k)}(z)(\frac{e^z-1}{z})^{(n+1-k)}=T^{(n+1)}(z)+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}T^{(k+1)}(z)(\frac{e^z-1}{z})^{(n-k)}, \text{(D.4.25)}$$

Ricordiamo che: $\frac{e^z-1}{z}=\sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{(k+1)!}$, e quindi: $(\frac{e^z-1}{z})^{(n)}_{z=0}=\frac{1}{n+1}$

Pertanto, dalla (D.4.25), per z = 0, ricaviamo:

$$-pT(0)\frac{1}{n+2}-p\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}T^{(k+1)}(0)\frac{1}{n+1-k}=T^{(n+1)}(0)+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}T^{(k+1)}(0)\frac{1}{n+1-k}, \qquad \text{(D.4.26)}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(p\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k})\frac{T^{(k+1)}(0)}{n+1-k}=-T^{(n+1)}(0)-\frac{p}{n+2} \qquad \text{(D.4.27)}$$

Per p = 1, troviamo:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\binom{n}{k+1}-\binom{n}{k})\frac{B_{k+1}}{n+1-k}=-B_{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

Cioè: $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\frac{B_{k+1}}{n+1-k}=-\frac{1}{n+2} \qquad \text{(D.4.28)}$$

Oppure: $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{B_k}{n+1-k}=0 \qquad \text{D.4.29)}$$

Le relazioni (D.4.28) e (D.4.29) sono state verificate con apposito programma.

Sommando membro a membro la (D.4.20) e la (D.4.27) viene eliminata l'incognita $T^{(n+1)}(0)$,

e quindi troviamo una relazione con un'incognita in meno.

DB4)- Consideriamo la Funzione $C(z)=e^{\frac{z}{e^z-1}-1}$

Prendendo il logaritmo naturale, abbiamo:

$$(\frac{z}{e^z-1}-1)=\ln C(z)$$

Derivando la precedente relazione, rispetto a z, troviamo:

$$C'(z)=C(z)(\frac{z}{e^z-1})' \qquad \text{(D.4.30)}$$

Derivando la (D.4.30), n volte, rispetto a z, ricaviamo:

$$C^{(n+1)}(z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}C^{(k)}(z)(\frac{z}{e^z-1})^{(n+1-k)} \qquad \text{(D.4.31)}$$

Per z=0, dalla (D.4.30) otteniamo: $C'(0)=-\frac{1}{2}$ essendo C(0)=1

Per z = 0, dalla (D.4.31), ricaviamo:

$$C^{(n+1)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C^{(k)}(0) B_{n+1-k} \qquad \text{(D.4.32)}$$

Utilizzando la (D.4.32), e ponendo successivamente n= 1,2,3,... , essendo noti i valori di B_{n+1-k}, con successive sostituzioni troviamo facilmente il valore di $C^{(n+1)}(0)$

Ponendo successivamente, nella (D.4.32), n=1,2,...,n, troviamo n equazioni nelle n incognite $C^{(2)}(0), C^{(3)}(0)....,C^{(n+1)}(0)$; C'(0)=-1/2, e quindi applicando il metodo di Cramer possiamo facilmente ricavare le n incognite, ed in particolare $C^{(n+1)}(0)$

E.1.01 – Infine, prendiamo in esame la Funzione $(e^z + u)^{-p}$

Eseguendo lo sviluppo in serie di tipo (a) della Funzione $(e^z + u)^{-p}$, p > 0, troviamo:

$$(e^z + u)^{-p} = e^{-pz} \sum_{k \ge 0} \binom{-p}{k} (ue^{-z})^k = \sum_{k \ge 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^k e^{-z(p+k)} \qquad \text{(E.1.01)}$$

La serie indicata a destra della (E.1.01) è definita nel semipiano complesso $R_e z \ge 0$ ad eccezione dei punti per i quali $e^z + u = 0$.

Derivando, n volte, rispetto a z, la precedente relazione (E.1.01), otteniamo:

$$((e^z + u)^{-p})^{(n)} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k \ge 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^k (p+k)^n e^{-z(p+k)} = \sum_{K=0}^{n} C_{u,p}(n,k)(e^z + u)^{-p-k} \qquad \text{(E.1.02)}$$

Il coefficiente $C_{u,p}(n,k)$, oltre a dipendere da n e k, dipende anche da u e p.

Ponendo, $e^z + u = 1$, nella (E.1.02), troviamo:

$$(-1)^n \sum_{k \ge 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^k (p+k)^n (1-u)^{-p-k} = \sum_{K=0}^{n} C_{u,p}(n,k) \qquad \text{(E.1.03)}$$

Ponendo, $z = 0$, nella (E.1.02), abbiamo:

$$(-1)^n \sum_{k \ge 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^k (p+k)^n = \sum_{K=0}^{n} C_{u,p}(n,k)(1+u)^{-p-k} \qquad \text{(E.1.04)}$$

Ponendo, $z = i\pi$, nella (E.1.02), ricaviamo:

$$(-1)^{n-p} \sum_{k \ge 0} \binom{p+k-1}{k} u^k (p+k)^n = \sum_{K=0}^{n} C_{u,p}(n,k)(u-1)^{-p-k} \qquad \text{(E.1.05)}$$

Trasformiamo la (E.1.05) nella seguente relazione:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}u^k(p+k)^n = (-1)^n\sum_{K=0}^{n}C_{u,p}(n,k)(-1)^k(1-u)^{-p-k} \qquad \text{(E.1.06)}$$

La serie indicata nel primo membro della (E.1.06), per u = 1, è certamente divergente,

e presenta un valore infinito, mentre per u diverso da 1, la medesima serie è rappresentata

dal valore del secondo membro della (E.1.06)

E' veramente sensazionale osservare che la serie indicata nel primo membro della (E.1.06), per u = 1, presenta un valore infinito, mentre, per u > 1, la medesima serie è rappresentata da un valore finito, fornito dal valore del secondo membro della (E.1.06).

Moltiplicando i membri della (E.1.02) per $(e^z+u)^{p+n}$, e passando al limite

per $z\rightarrow \ln(-u)$, otteniamo:

$$(-1)^n\lim_{z\rightarrow \ln(-u)}(e^z+u)^{p+n}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-u)^k(p+k)^n e^{-z(p+k)} = C_{u,p}(n,n) \qquad \text{(E.1.07)}$$

Dalla (E.1.07) ricaviamo:

$$\lim_{z\rightarrow \ln(-u)}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-u)^k(p+k)^n e^{-z(p+k)} = (-u)^{-p}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(p+k)^n = (-u)^{-p}\infty \qquad \text{(E.1.08)}$$

E.2.01 -Sviluppo in serie di tipo (b) della Funzione $(e^z+u)^{-p}$

Eseguendo lo sviluppo in serie di tipo (b) della Funzione $(e^z+u)^{-p}$, troviamo:

$$(e^z+u)^{-p} = u^{-p}\sum_{k\geq 0}\binom{-p}{k}u^{-k}e^{zk} = u^{-p}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k u^{-k}e^{zk} \qquad \text{(E.2.01)}$$

La serie nell'ultimo membro a destra della (E.2.01) è definita nel sempiano complesso $R_e z\leq 0$, ad eccezione dei punti nei quali $e^z+u=0$

Derivando, n volte, rispetto a z, la precedente relazione (E.2.01), otteniamo:

$$((e^z+u)^{-p})^{(n)} =$$

$$= u^{-p}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k u^{-k}k^n e^{zk} = \sum_{K=0}^{n}C_{u,p}(n,k)(e^z+u)^{-p-k} \qquad \text{(E.2.02)}$$

Ponendo, $e^z+u=1$, nella (E.2.02), troviamo:

$$u^{-p}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k u^{-k}k^n(1-u)^k = \sum_{K=0}^{n} C_{u,p}(n,k) \qquad \text{(E.2.03)}$$

Ponendo, $z=0$, nella (E.2.02), abbiamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k u^{-k}k^n = u^p\sum_{K=0}^{n} C_{u,p}(n,k)(1+u)^{-p-k} \qquad \text{(E.2.04)}$$

La serie indicata nel primo membro della (E.2.04), per u = -1, risulta divergente, con valore infinito, mentre, per u diverso da -1 , la medesima serie risulta rappresentata da un valore finito, fornito dal valore del secondo membro della (E.2.04).

Ponendo, $z=i\pi$, nella (E.2.02), ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}u^{-k}k^n \quad = u^p\sum_{K=0}^{n} C_{u,p}(n,k)(u-1)^{-p-k} \qquad \text{(E.2.05)}$$

Per u = 1, la serie indicata nel primo membro presenta un valore infinito, ma per u diverso da 1, la medesima serie risulta rappresentata dal valore finito fornito dal secondo membro della (E.2.05).

Ponendo, $z=-\infty$, nella (E.2.02), otteniamo:

$$\sum_{K=0}^{n} C_{u,p}(n,k)u^{-p-k} = 0 \qquad \text{(E.2.06)}$$

Moltiplicando i membri della (E.2.02) per $(e^z+u)^{p+n}$, e passando al limite per $z \to \ln(-u)$, ricaviamo:

$$\lim_{z\to\ln(-u)}(e^z+u)^{p+n}u^{-p}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k u^{-k}k^n e^{zk} = C_{u,p}(n,n) \qquad \text{(E.2.07)}$$

Dalla (E.2.07), troviamo:

$$\lim_{z\to\ln(-u)}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k u^{-k}k^n e^{zk} = \sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}k^n = \infty \qquad \text{(E.2.08)}$$

E.3.01 Calcolo dei coefficienti $C_{u,p}(n,k)$ - Considerazioni

Ponendo, nella (E.1.02), $e^z+u=t^{-1}$, da cui $e^z=\dfrac{1-ut}{t}$, ricaviamo:

$$=(-1)^n\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k u^k(p+k)^n\left(\frac{t}{1-ut}\right)^{p+k} = \sum_{K=0}^{n} C_{u,p}(n,k)t^{p+k}$$, da cui:

$$= (-1)^n \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^k (p+k)^n t^k (1-ut)^{-p-k} = \sum_{K=0}^{n} C_{u,p}(n,k) t^k \qquad \text{(E.3.01)}$$

Derivando, m volte, $(m \leq n)$, rispetto a t, la (E.3.01), e ponendo dopo t = 0, otteniamo:

$$= (-1)^n \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^k (p+k)^n \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (t^k)^{(j)} ((1-ut)^{-p-k})^{(m-j)} = C_{u,p}(n,m)(t^k)^{(m)}$$

Ricordando che, nel punto t = 0, $(t^k)^{(j)}$ è diverso da zero solo quando j = k, ricaviamo:

$$= (-1)^n \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^k (p+k)^n \binom{m}{k} k! \frac{\Gamma(m-k+p+k) u^{m-k}}{\Gamma(p+k)} = C_{u,p}(n,m) m!$$, cioè:

$$C_{u,p}(n,m) = (-1)^n u^m \binom{m+p-1}{m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-u)^k (p+k)^n \qquad \text{(E.3.02)}$$

da cui, per m = n, abbiamo:

$$C_{u,p}(n,n) = (-1)^n u^n \binom{n+p-1}{n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (p+k)^n \qquad \text{(E.3.03)}$$

Ora, $C_{u,p}(n,n) = -p(-p-1)(-p-2)...(-p-n+1)(-1)^n u^n = u^n \binom{p+n-1}{n} n!$

$$C_{u,p}(n,n) = (-1)^n u^n \binom{n+p-1}{n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (p+k)^n = u^n \binom{p+n-1}{n} n! \qquad \text{(E.3.04)}$$

Confrontando la (E.3.04) con la (E.3.03), otteniamo:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (p+k)^n = (-1)^n n! \qquad \text{(E.3.05)}$$

Ritroviamo così la (D.3.06)

Potevamo ottenere la (E.3.04) sostituendo la (D.3.06) nella (E.3.03).

Utilizzando la (E.3.02), dalla (E.2.04) ricaviamo:

$$u^{-p} \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^{-k} k^n = \sum_{K=0}^{n} C_{u,p}(n,k)(1+u)^{-p-k} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (1+u)^{-p-k} u^k \binom{p+k-1}{k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (p+j)^n \qquad \text{(E.3.05)}$$

cioè: $\sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^{-k} k^n =$

$$= (-1)^n u^p \sum_{k=0}^{n} (1+u)^{-p-k} u^k \binom{p+k-1}{k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (p+j)^n \qquad \text{(E.3.06)}$$

La serie a sinistra della (E.3.06) è certamente divergente, ma, per u diverso da -1,

è rappresentata dal valore finito fornito dal membro a destra della medesima (E.3.06).

Utilizzando, invece, la (E.1.04), troviamo:

$$\sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^k (p+k)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (1+u)^{-p-k} u^k \binom{p+k-1}{k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (p+j)^n \qquad \text{(E.3.07)}$$

Anche la serie a sinistra della (E.3.07) è chiaramente divergente, e per u = -1 presenta

un valore infinito, ma, per u diverso da -1, è rappresentata dal valore finito fornito dal secondo

membro della medesima (E.3.07).

Tenendo presente la (E.3.04), ricaviamo:

$$\lim_{z \to \ln(-u)} (e^z + u)^{p+n} \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-u)^k (p+k)^n e^{-z(p+k)} = (-1)^n u^n \binom{p+n-1}{n} n! \qquad \text{(E.3.08)}$$

$$\lim_{z \to \ln(-u)} (e^z + u)^{p+n} \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^{-k} k^n e^{zk} = u^{n+p} \binom{p+n-1}{n} n! \qquad \text{(E.3.09)}$$

Dalle ultime due relazioni deduciamo che:

$$\lim_{z \to \ln(-u)} \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-u)^{p+k} (p+k)^n e^{-z(p+k)} = \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (p+k)^n = \infty$$

$$\lim_{z \to \ln(-u)} \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^{-k} k^n e^{zk} = \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} k^n = \infty$$

Integrando i membri della (E.1.01), rispetto a z, tra i limiti 0 ed infinito, otteniamo

$$\int_0^\infty (e^z + u)^{-p} dz = \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^k \frac{1}{p+k}$$

$$\int_0^\infty (e^z + u)^{-p} dz = \int_0^\infty e^{-pz} (1+ue^{-z})^{-p} dz = (e^{-z} = t) = \int_0^1 t^{p-1} (1+ut)^{-p} dt =$$

$$= u^{-p} \int_0^1 \left(\frac{ut+1-1}{ut+1}\right)^{p-1} \frac{d(1+ut)}{ut+1} = u^{-p} \ln(u+1) + u^{-p} \sum_{k\geq 1} \binom{p-1}{k} (-1)^k \frac{1-(u+1)^{-k}}{k}$$

Pertanto: $\sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^k \frac{1}{p+k} = u^{-p} \ln(u+1) + u^{-p} \sum_{k\geq 1} \binom{p-1}{k} (-1)^k \frac{1-(u+1)^{-k}}{k}$ (E.3.10)

Per p = m+1, (m, intero pos.), abbiamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{m+k}{k}(-1)^k u^k \frac{1}{m+1+k} = u^{-m-1}\ln(u+1) + u^{-m-1}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k \frac{1-(u+1)^{-k}}{k} \qquad \text{(E.3.11)}$$

Moltiplicando i membri della (E.1.01) per e^{-qz}, ed integrando, rispetto a z, tra i limiti 0 ed infinito, otteniamo.

$$\int_0^\infty (e^z+u)^{-p}e^{-qz}dz = \sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k u^k \frac{1}{p+q+k}$$

$$\int_0^\infty (e^z+u)^{-p}e^{-qz}dz = \int_0^\infty e^{-z(p+q)}(1+ue^{-z})^{-p}dz = (e^{-z}=t) = \int_0^1 t^{p+q-1}(1+ut)^{-p}dt =$$

$$= u^{-p-q}\int_0^1 \left(\frac{ut+1-1}{ut+1}\right)^{p+q-1}\frac{d(1+ut)}{(ut+1)^{-q+1}} = u^{-p-q}\sum_{k\geq 0}\binom{p+q-1}{k}(-1)^k\frac{1-(u+1)^{-k+q}}{k-q}$$

Per q non intero, ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k u^k\frac{1}{p+q+k} = u^{-p-q}\sum_{k\geq 0}\binom{p+q-1}{k}(-1)^k\frac{1-(u+1)^{-k+q}}{k-q} \qquad \text{(E:3.12)}$$

Per q = n, intero positivo, troviamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k u^k\frac{1}{p+n+k} =$$

$$= u^{-p-n}\sum_{k\geq 0, k\neq n}\binom{p+n-1}{k}(-1)^k\frac{1-(u+1)^{-k+n}}{k-n} + u^{-p-n}\binom{p+n-1}{n}(-1)^n\ln(1+u) \qquad \text{(E.3.13)}$$

Per p = m+1, m intero positivo, abbiamo:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{m+k}{k}(-1)^k u^k\frac{1}{m+1+n+k} =$$

$$= u^{-m-n-1}\sum_{k\geq 0, k\neq n}\binom{m+n}{k}(-1)^k\frac{1-(u+1)^{-k+n}}{k-n} + u^{-m-n-1}\binom{m+n}{n}(-1)^n\ln(1+u) \qquad \text{(E.3.14)}$$

(F.1.0)-Riteniamo utile porre in evidenza le più interessanti formule trovate

$$((e^z+1)^{-1})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_1(n,k)(e^z+1)^{-1-k} \qquad \text{(A.1.05)}$$

$$(-1)^n \lim_{z \to i\pi} (e^z+1)^{n+1} \sum_{k\geq 0} (-1)^k (1+k)^n e^{-z(1+k)} = C_1(n,n) = n! \tag{A.2.08}$$

$$\lim_{z \to i\pi} (e^z+1)^{1+n} \sum_{k\geq 1} (-1)^k k^n e^{zk} = C_1(n,n) = n! \tag{A.2.13}$$

$$C_1(n,m) = (-1)^n \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k (1+k)^n \quad ,(m \leq n), \tag{A.3.03}$$

$$C_1(n,n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (1+k)^n = (-1)^n n! \tag{A.3.04}$$

$$C_1(n,n-1) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k (1+k)^n = -\frac{(n+1)!}{2} \tag{A.3.06}$$

Per m > n, $$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k (1+k)^n = 0 \tag{A.3.07}$$

$$B_{2n} = \frac{n}{2^{2n}-1} \sum_{k=0}^{2n-1} 2^{-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j (1+j)^{2n-1} \tag{A.3.08}$$

$$((e^z+1)^{-1})^{(n)} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (e^z+1)^{-1-k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (1+j)^n \tag{A.3.09}$$

$$\lim_{z \to -\infty} \int_0^\infty \frac{Sin(zt) - 2Sin(2zt)}{e^{2\pi t}-1} dt = \frac{1}{4} \tag{A.4.04}$$

$$\lim_{z \to \infty} \int_0^\infty \frac{Sin(zt) - 2Sin(2zt)}{e^{2\pi t}-1} dt = -\frac{1}{4} \tag{A.4.04'}$$

$$\lim_{z \to 0} \int_0^\infty \frac{t^{2n-1}(Cos(zt) - 2^{2n} Cos(2zt))}{e^{2\pi t}-1} dt = (-1)^n (2^{2n}-1) \frac{B_{2n}}{4n} \tag{A.4.08}$$

$$\lim_{z \to -\infty} \int_0^\infty \frac{t^{2n-1}(Cos(zt) - 2^{2n} Cos(2zt))}{e^{2\pi t}-1} dt = 0 \tag{A.4.09}$$

$$((e^z-1)^{=1})^{(n)} = \sum_{0}^{n} C_{-1}(n,k)(e^z-1)^{-1-k} \tag{B.1.02}$$

$$\lim_{z \to 0} (e^z-1)^{n+1} \sum_{k\geq 1} k^n e^{-zk} = n! \tag{B.2.06}$$

$$C_{-1}(n,m) = (-1)^{n+m} \sum_{k=0}^{m} (1+k)^n \binom{m}{k} (-1)^k \quad ,(m \leq n) \tag{B.3.01}$$

$$C_{-1}(n,m) = (-1)^n C_1(n,m) \tag{B.3.02}$$

$$\frac{1}{e^z-1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{z}+2\int_0^\infty \frac{Sin(zt)}{e^{2\pi t}-1}dt \qquad \text{(B.4.01)}$$

$$2\int_0^\infty \frac{t^{2n}Sin(zt)}{e^{2\pi t}-1}dt=(-1)^{n-1}(2n)!z^{-1-2n}+(-1)^n\sum_{k=0}^{2n}C_{-1}(2n,k)(e^z-1)^{-1-k}=$$

$$=(-1)^{n-1}(2n)!z^{-1-2n}+(-1)^n\sum_{k=0}^{2n}(e^z-1)^{-1-k}(-1)^k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(1+j)^{2n}(-1)^j \qquad \text{(B.4.03)}$$

$$2\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}Cos(zt)}{e^{2\pi t}-1}dt=$$

$$=(-)^{n-1}(2n-1)!z^{-2n}+(-1)^n\sum_{k=0}^{2n-1}(e^z-1)^{-1-k}(-1)^k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j(1+j)^{2n-1} \qquad \text{(B.4.04)}$$

$$\lim_{z\to\infty}\int_0^\infty \frac{t^{2n}Sin(zt)dt}{e^{2\pi t}-1}=0 \qquad \text{(B.4.05)}$$

$$\lim_{z\to-\infty}\int_0^\infty \frac{t^{2n}Sin(zt)dt}{e^{2\pi t}-1}=0 \qquad \text{(B.4.06)}$$

$$\lim_{z\to\infty}\int_0^\infty \frac{Sin(zt)dt}{e^{2\pi t}-1}=\frac{1}{4} \qquad \text{(B.4.08)}$$

$$\lim_{z\to 0}(((e^z-1)^{-1})^{(2n)}-(2n)!z^{-1-2n})=0 \qquad \text{(B.4.09)}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\sum_{j=0}^{k}(-1)^k\sum_{v=0}^{j}(-1)^v\binom{j}{v}(1+v)^k=1 \qquad \text{(B.5.05)}$$

$$(-1)^n\lim_{z\to i\pi}(e^z+1)^{n+p}\sum_{k\ge 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k(p+k)^n e^{-z(p+k)}=\binom{p+n-1}{n}n!, \qquad \text{(C.1.05)}$$

$$C_{1,p}(n,m)=(-1)^n\binom{m+p-1}{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k(p+k)^n \ ,(m\le n) \qquad \text{(C.3.02)}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(p+k)^n=(-1)^n n! \qquad \text{(C.3.04)}$$

$$\sum_{k\ge 0}\binom{p+k-1}{k}\frac{(-1)^k}{p+k}=\ln 2+\sum_{k\ge 1}\binom{p-1}{k}(-1)^k\frac{1-2^{-k}}{k}\ ,\text{(p > 0)} \qquad \text{(C.3.05)}$$

$$\sum_{k\ge 0}\binom{p+k-1}{k}\frac{(-1)^k}{p+q+k}=\sum_{k\ge 1}\binom{p+q-1}{k}(-1)^k\frac{1-2^{q-k}}{k-q}\quad \text{, (q non intero)} \qquad \text{(C.3.06)}$$

$$\sum_{k\ge0}\binom{p+k-1}{k}\frac{(-1)^k}{p+n+k}=\binom{p+n-1}{n}(-1)^n\ln2+\sum_{k\ge1,k\ne n}\binom{p+n-1}{k}(-1)^k\frac{1-2^{n-k}}{k-n} \tag{C.3.07}$$

$$\sum_{k\ge0}\binom{m+k}{k}\frac{(-1)^k}{m+1+n+k}=\binom{m+n}{n}(-1)^n\ln2+\sum_{k\ge1,k\ne n}\binom{m+n}{k}(-1)^k\frac{1-2^{n-k}}{k-n} \tag{C.3.08}$$

$$E_n=\lim_{z\to0}\left(\frac{1}{Cosh(z)}\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2)^k\sum_{j=0}^{k}2^{-j}\sum_{v=0}^{j}(-1)^v\binom{j}{v}(1+v)^k \tag{C.4.03}$$

$$\sum_{K\ge0}(-1)^k(1+2k)^{2n+1}=0 \tag{C.4.03a}$$

$$\sum_{K\ge0}(-1)^k(1+2k)^{2n}=\frac{E_{2n}}{2} \tag{C.4.03b}$$

$$\sum_{k\ge0}(4k+1)^{2n+1}-\sum_{k\ge1}(4k-1)^{2n+1}=0 \tag{C.4.03c}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\binom{2n-1}{2j-1}2^{2j-1}(2^{2j}-1)\frac{B_{2j}}{j}=1 \tag{C.4.03d}$$

$$E_{n,p}=\lim_{z\to0}\left(\left(\frac{1}{Cosh(z)}\right)^p\right)^{(n)}=\ 2^p\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^{n-k}\sum_{j=0}^{k}C_{1,p}(k,j)2^{-p-j}2^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^{n-k}(-2)^k\sum_{j=0}^{k}2^{-j}\binom{j+p-1}{j}\sum_{v=0}^{j}(-1)^v\binom{j}{v}(p+v)^k \tag{C.4.06}$$

$$E_{2n+1,p}=\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}p^{2n+1-k}(-2)^k\sum_{j=0}^{k}2^{-j}\binom{j+p-1}{j}\sum_{v=0}^{j}(-1)^v\binom{j}{v}(p+v)^k=0 \tag{C.4.06a}$$

$$E_{2n,p}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}p^{2n-k}(-2)^k\sum_{j=0}^{k}2^{-j}\binom{j+p-1}{j}\sum_{v=0}^{j}(-1)^v\binom{j}{v}(p+v)^k \tag{C.4.06b}$$

$$E_{n,p}=\lim_{z\to0}\left(\left(\frac{1}{Cosh(z)}\right)^p\right)^{(n)}=(-1)^n2^p\sum_{k\ge0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k(p+2k)^n \tag{C.4.07}$$

$$\sum_{k\ge0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k(p+2k)^{2n+1}=0 \tag{C.4.09}$$

$$\sum_{k\ge0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k(p+2k)^{2n}=2^{-p}E_{2n,p} \tag{C.4.10}$$

$$\sum_{k\ge0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k(p+2k)^{2n+1}=p^{2n+1}\sum_{h=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{h}2^hp^{-h}\sum_{k\ge0}\binom{-p}{k}k^h=$$

$$= p^{2n+1}\sum_{h=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{h}2^h p^{-h}\sum_{j=0}^{h}2^{-p-j}(-1)^h\binom{j+p-1}{j}\sum_{v=0}^{j}\binom{j}{v}(-1)^v(p+v)^h = 0 \quad \text{(C.4.11)}$$

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k(1+2qk)^{2n} = 2^{-p}\sum_{k=0}^{n}E_{2k,p}q^{2k}\binom{2n}{2k}(pq-1)^{2n-2k} \quad \text{(C.4.13)}$$

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^k(1+2qk)^{2n+1} = 2^{-p}\sum_{k=0}^{n}E_{2k,p}q^{2k}\binom{2n+1}{2k}(pq-1)^{2n+1-2k} \quad \text{(C.4.14)}$$

Per p non intero, $$\sum_{k\geq 0}E_{k,p} = 2^{p-1}(-1)^{\frac{p-1}{2}}\sum_{k\geq 0}\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(-1)^k\frac{2^{k+1-p}-1}{k+1-p} \quad \text{(C.4.15)}$$

$$\sum_{k\geq 0}E_{k,n} = 2^{n-1}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big(\sum_{k\geq 0, k\neq n-1}\binom{\frac{n-1}{2}}{k}(-1)^k\frac{2^{k+1-n}-1}{k+1-n}+\binom{\frac{n-1}{2}}{n-1}(-1)^{n-1}\ln 2\Big) \quad \text{(n, int. pos.),} \quad \text{(C.4.16)}$$

$$\sum_{k\geq 0}E_{k,1+2m} = 2^{2m}(-1)^{m-1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k\frac{2^{k-2m}-1}{2m-k} \quad \text{(m, int. pos.),} \quad \text{(C.4.16')}$$

$$G_n = n(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}2^{-k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(1+j)^{n-1} \quad \text{(C.4.18)}$$

$$G_{2n+1} = (2n+1)\sum_{k=0}^{2n}2^{-k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(1+j)^{2n} = 0 \quad \text{(C.4.18')}$$

$$G_{n,p} = \frac{n!(-1)^{n-p}}{(n-p)!}\sum_{j=0}^{n-p}2^{-j}\binom{j+p-1}{j}\sum_{v=0}^{j}(-1)^v\binom{j}{v}(p+v)^{n-p} \quad \text{,(p, int.pos., } 0<p\leq n\text{)} \quad \text{(C.4.20)}$$

$$\sum_{j\geq 0}(-1)^j\binom{j+p-1}{j}(p+j)^{n-p} = 2^{-p}\frac{(n-p)!}{n!}G_{n,p} \quad \text{(C.4.21)}$$

$$G_{n,n} = \lim_{z\to 0}\left(\left(\frac{2z}{e^z+1}\right)^n\right)^{(n)} = n! \quad \text{(C.4.23)}$$

$$((e^z-1)^{-p})^{(n)} = (-1)^n\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(p+k)^n e^{-z(p+k)} = \sum_{k=0}^{n}C_{-1,p}(n,k)(e^z-1)^{-p-k} \quad \text{(D.1.02)}$$

$$\underset{z\to 0}{Lim}\,(e^z-1)^{p+n}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(p+k)^n e^{-z(p+k)} = \binom{p+n-1}{n}n! \quad \text{(D.1.05)}$$

$$\underset{z\to 0}{Lim}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(p+k)^n e^{-z(p+k)} = \sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(p+k)^n = \infty \quad \text{(D.1.06)}$$

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}\frac{1}{p+k}=\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{Sin(\pi p)},(0<p<1) \quad \text{(D.1.07)}$$

$$\sum_{k\geq 0}\binom{2k}{k}\frac{2^{-2k}}{1+2k}=\frac{\pi}{2} \quad \text{(D.1.08)}$$

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}\frac{1}{q+p+k}=\frac{\Gamma(q+p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(q+1)},(0<p<1,q>0) \quad \text{(D.1.09)}$$

$$\sum_{k\geq 0}\binom{2k}{k}\frac{2^{-2k}}{1+k}=2 \quad \text{(D.1.10)}$$

$$\sum_{k\geq 0}\binom{2k}{k}\frac{2^{-2k}}{2n+1+2k}=2^{-2n}\binom{2n}{n}\frac{\pi}{2} \quad \text{(D.1.11)}$$

$$\lim_{z\to 0}(1-e^{z})^{p+n}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}k^{n}e^{kz}=(-1)^{n}C_{-1,p}(n,n) \quad \text{(D.2.05)}$$

$$\lim_{z\to 0}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}k^{n}e^{kz}=\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}k^{n}=\infty \quad \text{(D.2.07)}$$

$$(-1)^{n+m}\binom{m+p-1}{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{k}(p+k)^{n}=C_{-1,p}(n,m) \qquad ,(m\leq n) \quad \text{(D.3.05)}$$

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^{k}k^{n}=(-1)^{n}\sum_{k=0}^{n}2^{-p-k}\binom{k+p-1}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j}(p+j)^{n} \quad \text{(D.3.07)}$$

$$-(2^{2n}-1)\frac{B_{2n}}{2n}=\sum_{k=0}^{2n-2}2^{-2-k}(k+1)\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j}(2+j)^{2n-2} \quad \text{(D.3.09)}$$

$$(2^{2n}-1)\frac{B_{2n}}{2n}=\sum_{k=0}^{2n-1}2^{-2-k}(k+1)\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j}(2+j)^{2n-1} \quad \text{(D.3.10)}$$

$$\sum_{k\geq 0}\binom{m+k}{k}(-1)^{k}k^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}2^{-m-1-k}\binom{m+k}{m}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j}(m+1+j)^{2n} \quad \text{(D.3.11)}$$

$$\sum_{j=0}^{m}s(m,j)\sum_{v=1}^{[j/2]}\binom{j}{2v-1}m^{j-2v+1}(2^{2n+2v}-1)\frac{B_{2n+2v}}{2n+2v}=$$

$$=-m!\sum_{k=0}^{2n}2^{-m-1-k}\binom{m+k}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j}(m+1+j)^{2n} \quad \text{(D.3.14)}$$

$$\sum_{j=0}^{m}s(m,j)\sum_{v=0}^{[j/2]}\binom{j}{2v}m^{j-2v}(2^{2n+2v}-1)\frac{B_{2n+2v}}{2n+2v}=$$

$$= m!\sum_{k=0}^{2n-1} 2^{-m-1-k} \binom{k+m}{m} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j (m+1+j)^{2n-1} \qquad \text{(D.3.15)}$$

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k} \binom{k}{v} (-1)^v v^n \qquad \text{(D.4.04')}$$

$$\sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (p+k)^{n-p} = (-1)^{n-p} \frac{(n-p)!}{n!} B_{n,p} \quad \text{,(p, int. Pos.,} 0 < p < n\text{)} \qquad \text{(D.4.06)}$$

$$\sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} k^{n-p} = (-1)^{p} \frac{(n-p)!}{n!} B_{n,p} \quad \text{,(p, int. Pos.,} 0 < p < n\text{)} \qquad \text{(D.4.08)}$$

$$\sum_{k\geq 0} \binom{2n+k}{k} = \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{(2n)!}{2} + \sum_{h=1}^{n} s(2n+1,2h) \frac{B_{2h}}{2h}\right) \qquad \text{(D.4.11')}$$

$$B_{2n+1,2n+1} = -(2n+1)\left(\frac{(2n)!}{2} + \sum_{h=1}^{n} s(2n+1,2h) \frac{B_{2h}}{2h}\right) \qquad \text{(D.4.12)}$$

$$\sum_{k\geq 0} \binom{2n+k-1}{k} = \frac{1}{(2n-1)!} \left(\frac{(2n-1)!}{2} - \sum_{h=1}^{n} s(2n,2h) \frac{B_{2h}}{2h}\right) \qquad \text{(D.4.14)}$$

$$B_{2n,2n} = 2n\left(\frac{(2n-1)!}{2} - \sum_{h=1}^{n} s(2n,2h) \frac{B_{2h}}{2h}\right) \qquad \text{(D.4.15)}$$

$$\sum_{h=1}^{n} s(2n,2h) \frac{B_{2h}}{h} < (2n-1)! \qquad \text{(D.4.16)}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{n-1-2k}{k+1} B_{k+1} B_{n-k} = 0 \qquad \text{(D.4.22)}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{B_k}{n+2-k} = 0 \qquad \text{(D.4.23)}$$

:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \frac{B_{k+1}}{n+1-k} = -\frac{1}{n+2} \qquad \text{(D.4.28)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B_k}{n+1-k} = 0 \qquad \text{(D.4.29)}$$

$$((e^z+u)^{-p})^{(n)} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^k (p+k)^n e^{-z(p+k)} = \sum_{K=0}^{n} C_{u,p}(n,k)(e^z+u)^{-p-k} \qquad \text{(E.1.02)}$$

$$(-1)^n \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^k (p+k)^n (1-u)^{-p-k} = \sum_{K=0}^{n} C_{u,p}(n,k) \tag{E.1.03}$$

$$(-1)^n \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^k (p+k)^n = \sum_{K=0}^{n} C_{u,p}(n,k)(1+u)^{-p-k} \tag{E.1.04}$$

$$\sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} u^k (p+k)^n = (-1)^n \sum_{K=0}^{n} C_{u,p}(n,k)(-1)^k (1-u)^{-p-k} \tag{E.1.06}$$

$$(-1)^n \lim_{z\to \ln(-u)} (e^z+u)^{p+n} \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-u)^k (p+k)^n e^{-z(p+k)} = C_{u,p}(n,n) \tag{E.1.07}$$

$$((e^z+u)^{-p})^{(n)} =$$

$$= u^{-p} \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^{-k} k^n e^{zk} = \sum_{K=0}^{n} C_{u,p}(n,k)(e^z+u)^{-p-k} \tag{E.2.02}$$

$$u^{-p} \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^{-k} k^n (1-u)^k = \sum_{K=0}^{n} C_{u,p}(n,k) \tag{E.2.03}$$

$$\sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^{-k} k^n = u^p \sum_{K=0}^{n} C_{u,p}(n,k)(1+u)^{-p-k} \tag{E.2.04}$$

$$\sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} u^{-k} k^n = u^p \sum_{K=0}^{n} C_{u,p}(n,k)(u-1)^{-p-k} \tag{E.2.05}$$

$$\lim_{z\to \ln(-u)} (e^z+u)^{p+n} u^{-p} \sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^{-k} k^n e^{zk} = C_{u,p}(n,n) \tag{E.2.07}$$

$$C_{u,p}(n,m) = (-1)^n u^m \binom{m+p-1}{m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-u)^k (p+k)^n \tag{E.3.02}$$

$$C_{u,p}(n,n) = (-1)^n u^n \binom{n+p-1}{n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (p+k)^n = u^n \binom{p+n-1}{n} n! \tag{E.3.04}$$

$$\sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^{-k} k^n =$$

$$= (-1)^n u^p \sum_{k=0}^{n} (1+u)^{-p-k} u^k \binom{p+k-1}{k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (p+j)^n \tag{E.3.06}$$

$$\sum_{k\geq 0} \binom{p+k-1}{k} (-1)^k u^k (p+k)^n =$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(1+u)^{-p-k}u^{k}\binom{p+k-1}{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}(p+j)^{n} \qquad \text{(E.3.07)}$$

$$\lim_{z\to\ln(-u)}(e^{z}+u)^{p+n}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-u)^{k}(p+k)^{n}e^{-z(p+k)}=(-1)^{n}u^{n}\binom{p+n-1}{n}n! \qquad \text{(E.3.08)}$$

$$\lim_{z\to\ln(-u)}(e^{z}+u)^{p+n}\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^{k}u^{-k}k^{n}e^{zk}=u^{n+p}\binom{p+n-1}{n}n! \qquad \text{(E.3.09)}$$

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^{k}u^{k}\frac{1}{p+k}=u^{-p}\ln(u+1)+u^{-p}\sum_{k\geq 1}\binom{p-1}{k}(-1)^{k}\frac{1-(u+1)^{-k}}{k} \qquad \text{(E.3.10)}$$

$$\sum_{k\geq 0}\binom{m+k}{k}(-1)^{k}u^{k}\frac{1}{m+1+k}=u^{-m-1}\ln(u+1)+u^{-m-1}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{k}\frac{1-(u+1)^{-k}}{k} \qquad \text{(E.3.11)}$$

(m, int. pos.)

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^{k}u^{k}\frac{1}{p+q+k}=u^{-p-q}\sum_{k\geq 0}\binom{p+q-1}{k}(-1)^{k}\frac{1-(u+1)^{-k+q}}{k-q} \qquad \text{(E:3.12)}$$

(q, non intero);

$$\sum_{k\geq 0}\binom{p+k-1}{k}(-1)^{k}u^{k}\frac{1}{p+n+k}=$$

$$=u^{-p-n}\sum_{k\geq 0,k\neq n}\binom{p+n-1}{k}(-1)^{k}\frac{1-(u+1)^{-k+n}}{k-n}+u^{-p-n}\binom{p+n-1}{n}(-1)^{n}\ln(1+u) \qquad \text{(E.3.13)}$$

(n, intero positivo);

$$\sum_{k\geq 0}\binom{m+k}{k}(-1)^{k}u^{k}\frac{1}{m+1+n+k}=$$

$$=u^{-m-n-1}\sum_{k\geq 0,k\neq n}\binom{m+n}{k}(-1)^{k}\frac{1-(u+1)^{-k+n}}{k-n}+u^{-m-n-1}\binom{m+n}{n}(-1)^{n}\ln(1+u) \qquad \text{(E.3.14)}$$

(m, intero positivo);

Ringraziamenti- Sento il dovere di ringraziare l’amico Prof. Ing. Filippo Aluffi-Pentini dell’Università “La Sapienza” di Roma per i suoi affettuosi ed utilissimi suggerimenti. Ringrazio anche i tecnici informatici che mi hanno assistito nella compilazione del presente lavoro.

Riferimenti

[1] G. H. Hardy – DIVERGENT SERIES
Oxford Universiy.
Clarendon Press, 1949

[2] T. J. I'A. Bromwich
AN INTRODUCTION
To the theory of INFINITE SERIES 65
Clarendon Press - Oxford 1949

[3] Konrad Knopp
THEORY AND APPLICATION
OF INFINITE SERIES
Blackie and Son Limited
London and Glasgow, 1954

[4] I.S.Gradshteyn, I.M.Ryzhik
Table of Integrals, Series, and Products
Academic Press, Inc., 1980

[5] Ernst Lindelöf
Le CALCUL DES RÉSIDUS et ses applications
a la Théorie des Fonctions
Chelsea Publishing Company
New York 1947

[6] Émile Borel
Leçons sur les séries divergentes
Deuxième ed. Parigi 1928

[7] Le Roy: Sur les séries divergentes
Annales de la Fac. des sciences de Toulouse
Vol. 2, 1900

[8] Christiane Rousseau
Divergent Séries: past, present, future…
Montréal (Qué), H3C 317,
Canada, March 2004

[9] A.Ghizzetti-L. Marchetti-A.Ossicini
Lezioni di Complementi di Matematica
Università degli studi di Roma- 1972

[10] Louis Comtet
ADVANCED COMBINATORICS
The Art of Finite and Infinite Expansion
D. Reidel Publishing Company
Dordrecht-Boston 1974

[11] John Conway-Richard K. Guy
IL LIBRO DEI NUMERI
Ulrico Hoepli Editore, Milano 1999

[12] Carlo Mariconda-Alberto Tonolo

Calcolo discreto-Metodo per contare

APOGEO s.r.l. 2012

[13] Giovanni Sansone - Roberto Conti

Lezioni di Analisi Matematica, Vol.1,

CEDAM – Padova 1958

[14] Aldo Ghizzetti-Francesco Rosati

Complementi ed esercizi di

Analisi Matematica, Vol I e Vol II, ed. 1981

Libreria eredi Virgilio Veschi, ROMA

[15] Giuseppe ZWIRNER

Lezioni di ANALISI MATEMATICA, Vol.I e Vol.II,

CEDAM, casa editrice Antonio Mitani, Padova, 1969

[16] Sandro FAEDO

Complementi ed esercizi di

ANALISI MATEMATICA, Vol. I, e Vol. II, 1956

Lit. D. Tacchi e figlio, Pisa

[17] Murray R. Spiegel

VARIABILI COMPLESSE

McGraw-Hill Libri Italia srl 1994

[18] Pasquale Cutolo, "Una nota sulle serie divergenti e loro applicazioni"

www.matematicamente.it/approfondimenti/matematica

[19] Pasquale Cutolo, "Una nota sui coefficienti delle potenze dello sviluppo

in serie della funzione $\frac{-t}{\ln(1-t)}$

www.matematicamente.it/approfondimenti/matematica

[20] Kenneth S. MILLER, Bertran ROSS

AN INTRODUCTION TO THE FRACTIONAL CALCULUS,

And FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

John Wiley and Sons, INC.N.Y. 1992

[21] WHITTAKER E.T. and WATSON G.N.

MODERN ANALISYS

4^{th} Ed. Cambridge at the UNIVERSITY PRESS, 1952

1. Il Dott. Ing. Pasquale Cutolo, Commendatore della Repoubblica Italiana, ha conseguito la Laurea in Ingegneria Industriale, sottosezione Elettrotecnica, presso l'Università di Napoli; ha conseguito inoltre il Diploma di Specializzazione in Telecomunicazioni, per Ingegneri, presso l'Istituto Superiore dell'ex Ministero delle Poste e delleTelecomunicazioni, (ora Istituto Superiore delle Comunicazioni e delleTecnologie dell'Informazione).
   Dopo aver superato il concorso d'ingresso nel Ruolo Tecnico degli Ingegneri delle Telecomunicazioni, ha percorso l'intera carriera dirigenziale presso il predetto Ministero, svolgendo la propria attività nell'ambito dei Servizi di Telecomunicazioni. Membro di Commissioni di Concorsi per Ingegneri. Presidente di Concorso Pubblico per Operatori Specializzati. Membro di Commissione per esami di Stato per Periti Industriali. Ha insegnato matematica nei corsi di aggiornamento per dipendenti. E' autore di diversi articoli di analisi matematica.

Pasquale Cutolo

p.cutolo@inwind.it

Giugno 2013