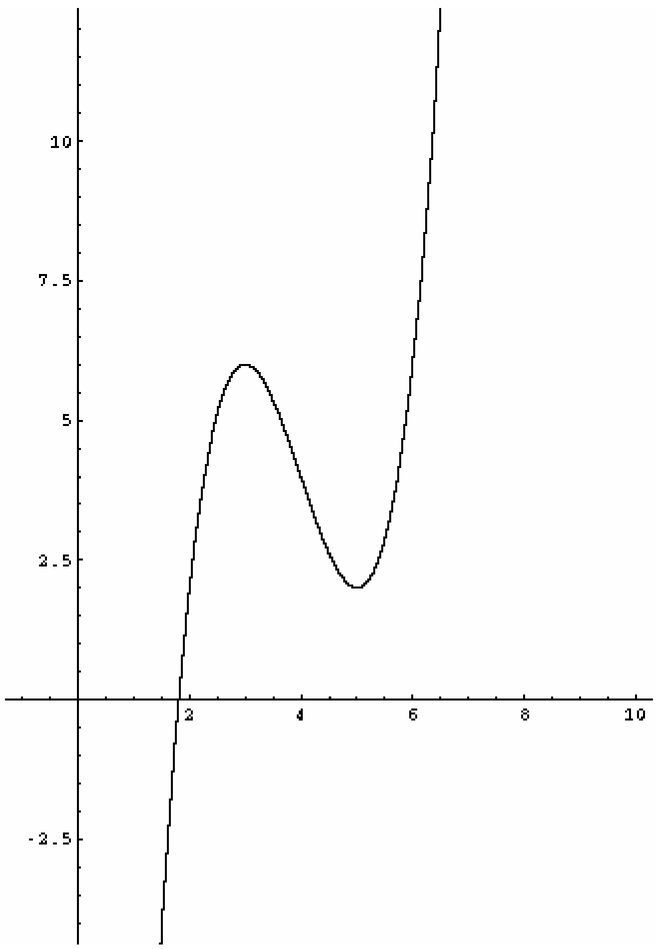
M-6

L'EQUAZIONE CUBICA



[EDR – Marzo '01]

Quando che 'l cubo con le cose appresso
se agguaglia a qualche numero discreto
trovan dui altri differenti in esso.
Dapoi terrai questo per consueto
che 'l lor produtto sempre sia eguale
al terzo cubo delle cose neto;
el residuo poi suo generale
delli lor lati cubi ben sottratti
varrà la tua cosa principale…
Questi trovai et non con passi tardi
nel mille cinquecente, quatro e trenta
con fondamenti ben sald' e gagliardi
nella città dal mar' intorno centa.
………
[**Nicolò Fontana, detto Tartaglia (1499-1557)**]

In copertina: Grafico di una funzione polinomiale di terzo grado.

L'equazione quadratica

Un'equazione quadratica si presenta (o può essere ridotta) nella forma:

$$\mathbf{a\,x^2 + b\,x + c = 0}$$

con $\mathbf{a > 0}$.
La procedura risolutiva dell'equazione quadratica si trova, per la prima volta nella storia della matematica, nel trattato del matematico persiano Muhammad Ibn Musa Al Qhwarizmi (IX sec.d.C.) dal titolo (tradotto) "*Libro sul trasporto cambiato di segno*". Il titolo si riferiva alla possibilità di trasportare un addendo in una eguaglianza (identità o equazione) all'altro membro semplicemente cambiandogli il segno, e la cosa dovette stupire sommamente se alla nuova disciplina fu dato il nome di *Algebra* proprio dal termine arabo *al jabar* che significa appunto trasporto; dal nome dell'autore deriva invece il termine *Algoritmo*.
La procedura è oggi nota a tutti:

- Si moltiplicano ambo i membri per $\mathbf{4a}$: $\mathbf{4\,a^2\,x + 4\,a\,b\,x + 4\,a\,c = 0}$
- Si trasporta al secondo membro $\mathbf{4ac}$: $\mathbf{4\,a^2\,x + 4\,a\,b\,x = -\,4\,a\,c}$
- Si somma ad ambo i membri $\mathbf{b^2}$: $\mathbf{4\,a^2\,x + 4\,a\,b\,x + b^2 = b^2 - 4\,a\,c}$
- Si scompone il primo membro: $\mathbf{(2\,a\,x + b)^2 = b^2 - 4\,a\,c}$
- Si estrae la radice di ambo i membri: $\mathbf{2\,a\,x + b = \pm\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}$
- Si trasporta al secondo membro $\mathbf{b}$: $\mathbf{2\,a\,x = -\,b \pm\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}$
- Si dividono ambo i membri per $\mathbf{2a}$: $\mathbf{x = \dfrac{-\,b \pm\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}}$

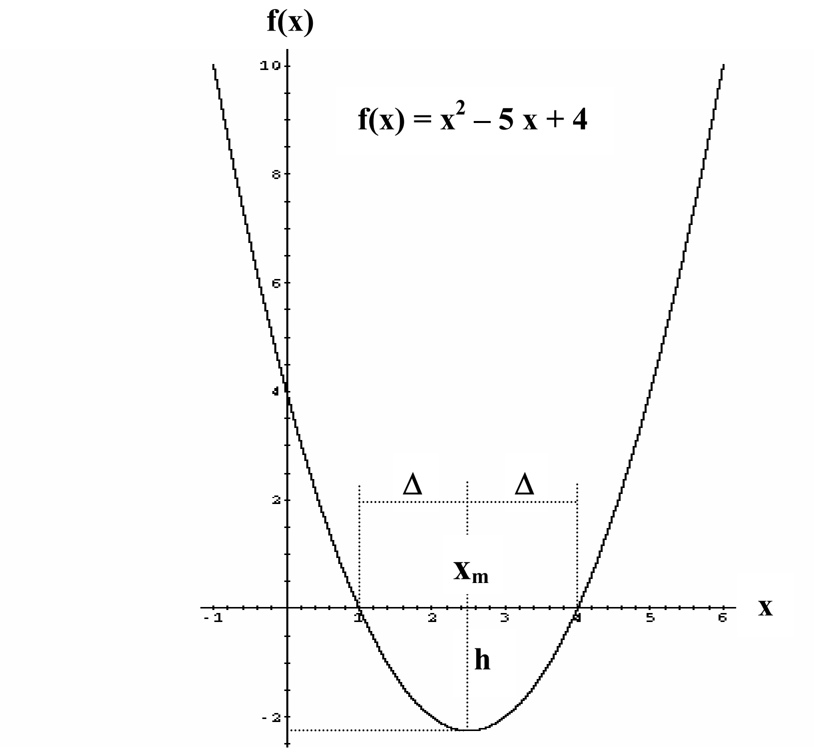
La formula fornisce direttamente le due soluzioni, o radici, dell'equazione ed ha validità generale. Al termine sotto il segno di radice si dà il nome di discriminante e fornisce utili indicazioni sul valore delle radici stesse: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac}$.
Se $\mathbf{\Delta > 0}$ le due radici sono reali e distinte; se $\mathbf{\Delta = 0}$ le due radici sono reali e coincidenti; se $\mathbf{\Delta > 0}$ le due radici sono complesse coniugate.

Con la regola dei segni di Cartesio possiamo anche fare previsioni sul segno delle radici; basta considerare nell'ordine i segni dei tre coefficienti $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$: se passando da un coefficiente al successivo il segno si conserva, si dice esservi una permanenza, altrimenti una variazione. La regola dei segni quindi dice che in corrispondenza di ogni permanenza c'è una radice negativa, viceversa per ogni variazione una radice positiva. La regola dei segni ha validità generale, si applica cioè ad equazioni di qualsiasi grado.

E' noto anche il significato geometrico dell'equazione:

La funzione $\mathbf{f(x) = a\, x^2 + b\, x + c}$ rappresenta nel piano **x-f** una parabola con l'asse verticale e la concavità rivolta verso l'alto (**a > 0**); le soluzioni sono rappresentate dalle intersezioni della parabola con l'asse **x**.
La parabola ha il punto di minimo, cioè il vertice, dove si annulla la derivata prima della **f(x)**:

$$\mathbf{f'(x) = 2\, a\, x + b = 0} \qquad \text{cioè} \qquad \mathbf{x_m = -\, b\, /\, 2a}$$



in quel punto la distanza dall'asse **x** corrisponde al valore della funzione **f(x)** in quel punto:

$$\mathbf{h = f(-\, b/2a) =}$$

$$\mathbf{= a\, \frac{b^2}{4a^2} - b\, \frac{b}{2a} + c =}$$

$$\mathbf{= \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} =}$$

$$\mathbf{= \frac{-\,(b^2 - 4ac)}{4a}}$$

Quindi:

$$\mathbf{h = -\, \frac{\Delta}{4a}}$$

Essendo **a > 0** la parabola intercetta l'asse **x** solo se **h < 0** solo cioè se Δ > **0**. Nella figura è riportata una tipica funzione quadratica che giustifica le considerazioni sopra fatte.

L'equazione cubica

Il brillante risultato raggiunto nella risoluzione dell'equazione quadratica ha spinto i matematici alla ricerca di una formula per la risoluzione dell'equazione cubica.
Il primo matematico che risolse l'equazione cubica fu **Scipione del Ferro** (1456 – 1526), probabilmente con la collaborazione di **Luca Pacioli**, ma non pubblicò la sua scoperta forse per avvalersene in pubbliche disfide in voga all'epoca. Solo in punto di morte rivelò la scoperta ad un suo allievo, tale Antonio Maria Fior; questi sentendosi forte di tale conoscenza lanciò una pubblica sfida ad uno studioso bresciano, **Niccolò Fontana** (1499 – 1557), detto **Tartaglia** per una balbuzie conseguenza di ferite riportate da bambino durante il sacco di Brescia; Fior propose 30 equazioni che Tartaglia risolse brillantemente mettendo a punto un metodo di risoluzione che però non rivelò.
Un altro studioso dell'epoca, **Gerolamo Cardano** (1501 – 1576), si fece rivelare da Tartaglia il metodo con la promessa di mantenerne il segreto. In effetti sia Del Ferro che Tartaglia avevano scoperto la risoluzione dell'equazione cubica nel caso particolare in cui mancava il termine quadratico. Cardano la estese al caso generale, ma basandosi sul caso particolare di Del Ferro / Tartaglia, non lo poteva pubblicare. Finché nel 1543 esaminando i manoscritti lasciati da Del Ferro fu trovata la stessa risoluzione; Cardano si sentì sollevato dalla promessa fatta a Tartaglia e nel 1545 pubblicò il suo capolavoro matematico, l' "Ars Magna", nel quale all'undicesimo capitolo riportava la soluzione generale dell'equazione cubica.
Ma veniamo alla nostra equazione.
Un'equazione cubica a coefficienti reali si presenta (o può essere ridotta) nella forma:

$$\mathbf{a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0}$$

La prima cosa da fare è "deprimerla" del suo termine quadratico; per far ciò si opera un cambio di variabile:

$$x \rightarrow y - \frac{b}{3a}$$

con il quale l'equazione diventa:

$$y^3 + 3\,p\,y - 2\,q = 0 \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} p = \dfrac{c}{3a} - \dfrac{b^2}{9a^2} = -\dfrac{b^2 - 3ac}{9a^2} \\[2ex] q = \dfrac{bc}{6a^2} - \dfrac{b^3}{27a^3} - \dfrac{d}{2a} \end{cases}$$

(Vedasi appendice **a**).
Per risolvere questa seguiremo il metodo classico di Cardano-Tartaglia, trovando due numeri, **z** e **t**, che soddisfino il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} z\,t = p \\ z^3 - t^3 = 2\,q \end{cases}$$

In tal modo confrontando la nostra equazione depressa con l'identità:

$$(z - t)^3 + 3\,z\,t\,(z - t) - (z^3 - t^3) = 0$$

ne deriva che $y = (z - t)$. Il sistema quindi può essere risolto per sostituzione ricavando dalla prima equazione t in funzione di z e sostituendolo nella seconda:

$$t = \frac{p}{z} \qquad \text{quindi:} \quad z^3 - \left[\frac{p}{z}\right]^3 = 2\,q \qquad \text{da cui:} \quad z^6 - 2\,q\,z^3 - p^3 = 0$$

Quest'ultima infine può essere ricondotta ad una equazione quadratica con il cambio di variabile: $z^3 \longrightarrow u$ che la riduce a: $u^2 - 2\,q\,u - p^3 = 0$

Questa può essere risolta con la formula per le equazioni quadratiche che fornisce le due soluzioni:

$$u_1 = q + \sqrt{q^2 + p^3} \qquad \text{e} \qquad u_2 = q - \sqrt{q^2 + p^3}$$

dalla prima si ricava:

$$z_1 = \sqrt[3]{u_1} = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}} \qquad \text{da cui:} \quad t_1^3 = z_1^3 - 2\,q = -\,q + \sqrt{q^2 + p^3}$$

Quindi: $t_1 = \sqrt[3]{-\,q + \sqrt{q^2 + p^3}}$

ed infine: $y_1 = z_1 - t_1 = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}} - \sqrt[3]{-\,q + \sqrt{q^2 + p^3}}$

Analogamente per la seconda soluzione:

$$y_2 = z_2 - t_2 = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 + p^3}} - \sqrt[3]{-\,q - \sqrt{q^2 + p^3}}$$

Le due insieme possono costituire la formula per la risoluzione dell'equazione depressa:

$$y = \sqrt[3]{q \pm \sqrt{q^2 + p^3}} - \sqrt[3]{-\,q \pm \sqrt{q^2 + p^3}}$$

Con la limitazione di usare o solo i segni "+" o solo i segni "–".

Si osservi anzitutto che trattasi di una sola soluzione, non due, essendo le due espressioni, quella con i segni “+” e quella con i segni “–“, equivalenti.
Né tragga in inganno la relativa semplicità della formula; anzitutto trattasi di eseguire alcune estrazioni di radice cubica, oggi relativamente semplice con l’ausilio di sistemi automatici di calcolo, ma un tempo di una certa complessità (vedasi appendice 1).
Altri problemi sorgono quando il cosiddetto discriminante $\Delta = \mathbf{q}^2 + \mathbf{p}^3$ è minore di **0**; in questi casi infatti trattasi addirittura di estrarre radici cubiche di numeri complessi.
Ed infine per il teorema fondamentale dell’algebra ci aspettiamo tre soluzioni contro la sola così trovata. In effetti però ogni numero reale ha tre radici cubiche; infatti ogni reale **a** può scriversi nella forma $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^{j2k\pi}$; farne la radice cubica significa dividere per **3** gli esponenti, ottenendo quindi un valore reale $\mathbf{a}^{1/3}$ e due valori complessi (coniugati): $\mathbf{a}^{1/3}\,\mathbf{e}^{j2\pi/3}$ e $\mathbf{a}^{1/3}\,\mathbf{e}^{j4\pi/3}$.
Per trovare una formula per tutte le radici dobbiamo tornare alla equazione depressa e prendere la soluzione appena trovata (ad es. quella con i segni “+”) che indichiamo semplicemente con **s**:

$$\mathbf{s} = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}} - \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}$$

$$= \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 + p^3}}$$

si può verificare che valgono (vedasi appendice b):

$$s^2 = \sqrt[3]{\left[q + \sqrt{q^2 + p^3}\right]^2} + \sqrt[3]{\left[q - \sqrt{q^2 + p^3}\right]^2} - 2\,p$$

$$s^3 = -\,3\,p\,s + 2\,q$$

Il passo successivo quindi è quello di dividere il polinomio a primo membro dell’equazione depressa per **(y – s)** per abbassarlo di grado ed ottenere una equazione di secondo grado. Per semplificare si preferisce piuttosto partire dalla identità:

$$y^3 - s^3 = (y - s)\,(\,y^2 + sy + s^2)$$

alla quale sommiamo ad ambo i membri la quantità **3 p (y – s)**:

$$y^3 - s^3 + 3\,p\,(y - s) = (y - s)\,(\,y^2 + sy + s^2 + 3\,p)$$

$$y^3 + 3\,p\,y - (s^3 + 3\,p\,s) = (y - s)\,[\,y^2 + sy + (s^2 + 3\,p)]$$

$$y^3 + 3\,p\,y - 2\,q = (y - s)\,[\,y^2 + sy + (s^2 + 3\,p)]$$

Al primo membro riconosciamo il nostro polinomio; quindi al secondo membro nella parentesi quadra c'è il quoziente della sua divisione per $(y - s)$. Ne deduciamo che l'equazione depressa è diventata:

$$y^2 + sy + (s^2 + 3p) = 0$$

che può essere risolta come una comune quadratica per fornire le radici:

$$y = \tfrac{1}{2}\left[-s \pm \sqrt{s^2 - 4(s^2 + 3p)}\right] = -\tfrac{1}{2}s \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3s^2 - 12p}$$

$$= -\tfrac{1}{2}s \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\ \sqrt{s^2 + 4p}$$

Non è elegante questa espressione delle due radici che le mette in relazione con la prima (s). Per ricavare le espressioni delle tre radici indipendenti l'una dalle altre ed in modo molto sintetico, poniamo:

$$A = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}} \qquad \text{e} \qquad B = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 + p^3}}$$

La prima radice diventa quindi: $y = s = A + B$

Sviluppando s^2 si può mostrare (vedasi appendice c) che vale:

$$A - B = \sqrt{s^2 + 4p}$$

Le tre radici dell'equazione depressa sono quindi:

$$y_1 = A + B$$
$$y_2 = -\tfrac{1}{2}(A + B) + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\,(A - B)$$
$$y_3 = -\tfrac{1}{2}(A + B) - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\,(A - B)$$

Mentre quelle dell'equazione completa sono:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{b}{3a} + (A + B) \\[2ex] x_2 = -\dfrac{b}{3a} - \tfrac{1}{2}(A + B) + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\,(A - B) \\[2ex] x_3 = -\dfrac{b}{3a} - \tfrac{1}{2}(A + B) - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\,(A - B) \end{array} \quad \text{con} \quad \left\{\begin{array}{l} p = \dfrac{c}{3a} - \dfrac{b^2}{9a^2} = \dfrac{3ac - b^2}{9a^2} \\[2ex] q = \dfrac{bc}{6a} - \dfrac{b^3}{27a^2} - \dfrac{d}{2a} \\[2ex] A = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}} \\[2ex] B = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 + p^3}} \end{array}\right.}$$

Discussione

Si nota che nella formula risolutiva delle equazioni cubiche appaiono esplicitamente nella seconda e nella terza radice i numeri immaginari con il fattore: $\sqrt{-3}$

Questo non implica necessariamente che le due radici siano complesse, così come la prima radice può essere complessa anche se dalla sua espressione questo non appaia esplicitamente; dipende dai valori che assumono $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, quindi $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Un ruolo importante lo svolge il discriminante $\Delta = \mathbf{q}^2 + \mathbf{p}^3$ ed osserviamo subito che se $\mathbf{p} > 0$, allora anche $\Delta > 0$. Quindi:

Se $\Delta > 0$, allora $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono reali; tali è anche la loro somma e la loro differenza. Ne segue che in questo caso l'equazione ha una radice reale e due radici complesse coniugate. La radice reale corrisponde alla prima delle tre soluzioni.

Se $\Delta = 0$, allora $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono reali ed uguali; l'equazione ha tre radici reali delle quali due coincidenti (la seconda e la terza delle formule). Se poi $\Delta = 0$ perché sia $\mathbf{q=0}$ sia $\mathbf{p=0}$, le tre le radici sono coincidenti nel valore $\mathbf{x = -b/3a}$ essendosi ridotto il polinomio ad un cubo di un binomio.

Se $\Delta < 0$, procedendo semplicemente per esclusione, le tre radici sono reali e distinte. Infatti per il teorema fondamentale dell'algebra una equazione a coefficienti reali ha radici in numero pari al suo grado (nel nostro caso tre) reali o a coppie complesse coniugate. Per eclusione nel nostro caso le radici sono tutte e tre reali.

L'aspetto più strano in questo ultimo caso è che per trovare i valori reali delle tre radici occorre trattare i numeri complessi che compaiono sotto il segno delle radici cubiche. E qui si arenò anche Cardano definendolo "*casus irreducibilis*", anche perché al suo tempo non erano stati ancora definiti i numeri immaginari. Questo problema stimolò negli anni successivi numerose ricerche in campo algebrico che portarono con Bombelli all'introduzione dei numeri immaginari.

Sebbene però avvezzi a trattare numeri complessi, l'operazione di ricavare in questo caso dalle formule le tre radici ci resta difficoltosa; è allora opportuno procedere diversamente, osservando anzitutto che essendo $\mathbf{q}^2 + \mathbf{p}^3 < 0$ sarà di sicuro $\mathbf{p} < 0$.

Partiamo dalla equazione depressa: $y^3 + 3\,p\,y - 2\,q = 0$

che può essere scritta: $y^3 - 3\,(\sqrt{-p}\,)^2\,y - 2\,q = 0$

ed in essa poniamo: $y \rightarrow 2\,\sqrt{-p}\,\cos\theta$

l'equazione diventa: $8\,(\sqrt{-p}\,)^3\cos^3\theta - 6\,(\sqrt{-p}\,)^3\cos\theta - 2\,q = 0$

quindi: $2\,(\sqrt{-p}\,)^3\,(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - 2\,q = 0$

e per la formula di triplicazione: $2\,(\,-p\,)^3\cdot\cos 3\,\theta\;-2\,q = 0$

da cui: $\cos 3\,\theta \;=\; -\,q\,/\,(\sqrt{-p}\,)^3$

che ha tre soluzioni: $\theta_1 = 1/3\,\arccos\left[-\,q\,/\,(\sqrt{-p}\,)^3\right]$,

$\theta_2 = \theta_1 + 2\pi/3$ e $\theta_3 = \theta_1 + 4\pi/3$

in corrispondenza delle quali: $y_1 = 2\,\sqrt{-p}\,\cos\theta_1$

$y_2 = 2\,\sqrt{-p}\,\cos\theta_2 = 2\sqrt{-p}\,\cos\left[\theta_1 + 2\pi/3\right]$

$y_3 = 2\,\sqrt{-p}\,\cos\theta_3 = 2\sqrt{-p}\,\cos\left[\theta_1 + 4\pi/3\right]$

Si avverte però che sebbene questo metodo consente di evitare i numeri complessi, utilizza funzioni trascendenti (qual'è il coseno).

Interpretazione geometrica

Analogamente alla equazione quadratica si può dare una interpretazione geometrica alla risoluzione dell'equazione cubica. La funzione polinomiale di terzo grado $\mathbf{f(x) = a\ x^3 + b\ x^2 + c\ x + d}$ è rappresentata nel piano **x-f** da una strana curva, una sorta di S capovolta, che per valori assoluti dell'ascissa **x** molto grandi somiglia alla funzione $\mathbf{x^3}$, cosa peraltro ovvia considerando che quando **x** cresce la potenza più alta prevale sulle altre. Per valori di **x** dell'ordine di grandezza dei coefficienti la curva è caratterizzata da un punto di flesso nel quale cioè passa da una concavità rivolta verso il basso ad una concavità verso l'alto. Presenta inoltre un minimo ed un massimo locale.
I minimi e massimi relativi ed il punto di flesso si trovano con l'ausilio delle derivate prima e seconda rispettivamente, trovando il punto in cui si annullano:

$$f'(x) = 3\ a\ x^2 + 2\ b\ x + c$$
$$f''(x) = 6\ a\ x + 2\ b$$

Il punto di flesso, che indichiamo con **N** è quello in cui si annulla la derivata seconda:

$$f''(x) = 6\ a\ x + 2\ b = 0 \quad \text{da cui} \quad x_N = -\ b\ /\ 3a$$

Questo è valore che abbiamo utilizzato per il primo cambio di variabile con il quale si è ottenuta l'equazione depressa. Quindi in termini geometrici deprimere l'equazione equivale a spostare l'asse delle **f** nel punto di flesso, ovvero l'equazione depressa è quella che centra orizzontalmente il sistema di coordinate nel punto di flesso. Risulterà utile nel seguito il calcolo del valore di **f(x)** in questo punto:

$$f_N = f(-\ b/3a) = -\ a\ \frac{b^3}{27a^3} + b\ \frac{b^2}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$$

Ma anche questo è un valore noto corrispondendo, a meno del fattore $-\ 2a$, al parametro **q**, cioè $\mathbf{N = (-b/3a\ ,\ -\ 2aq)}$
I punti di minimo e massimo sono quelli in cui si annulla la derivata prima:

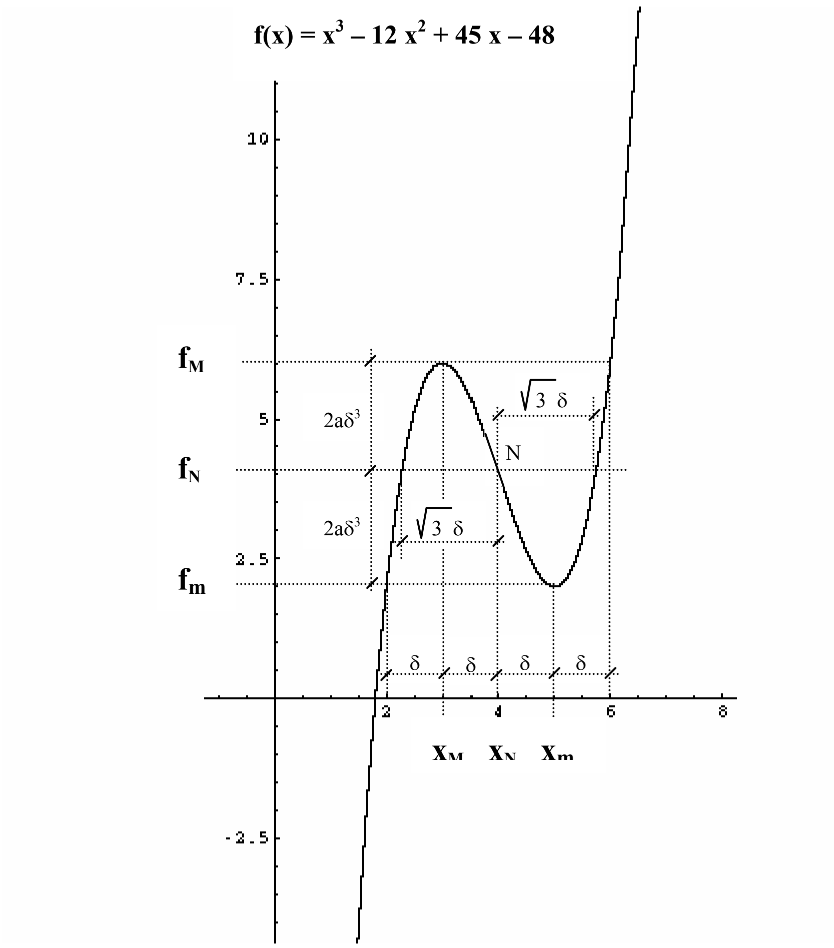
$$f'(x) = 3\ a\ x^2 + 2\ b\ x + c = 0 \quad \text{da cui} \quad x_{M.m} = -\ \frac{b}{3a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 3ac}{9a^2}} = x_N \pm \delta$$

Si osserva che: $\delta = \sqrt{-p}$ e pertanto l'equazione depressa in funzione dei nuovi parametri diventa:

$$a\ y^3 - 3\ a\ \delta^2\ y + f_N = 0$$

e per il *casus irreducibilis* l'angolo θ sarà tale che:

$$\cos 3\ \theta = \frac{-\ q}{\left[\sqrt{-\ p}\right]^3} = \frac{-2a\ q}{2a\ \delta^3} = \frac{f_N}{2a\ \delta^3}$$



Le ascisse dei due punti sono quindi equidistanti da quella del punto di flesso $\mathbf{x_N}$ di una quantità

$$\delta = \sqrt{-\mathbf{p}}$$

che chiameremo piccolo determinante. Anche le ordinate risultano equidistanti da quella $\mathbf{f_N}$ del punto di flesso di una quantità $\mathbf{h} = \mathbf{2a}\ \delta^3$ (vedasi appendice d). Con riferimento alla figura:

$$\mathbf{f_{M,m}} = \mathbf{f_N} \pm \mathbf{2a}\ \delta^3$$

Oltre che nel punto di flesso la funzione assume il valore $\mathbf{f_N}$, in altri due punti le cui ascisse distano da $\mathbf{x_N}$ della quantità: $\sqrt{3}\,\delta$

Ed infine la funzione assume il valore che ha nel punto di massimo relativo (risp. di minimo relativo) anche nel punto la cui ascissa dista da quella del massimo (risp. del minimo) di $3\,\delta$.

Il quadro è ora completo; ma occorre una osservazione: per alcuni valori dei coefficienti il valore di δ^2 potrebbe risultare nullo o negativo, in corrispondenza dei casi nei quali la tangente alla curva nel punto di flesso risulti orizzontale (derivata prima della funzione nulla in quel punto) o addirittura rivolta verso l'alto (derivata prima positiva). E' evidente che in questi casi la curva potrà intersecare l'asse delle $\mathbf{x}$ solo in un punto, quale che sia la sua posizione nel piano; e questo corrisponde al caso in cui $\mathbf{p}$ è positivo e di conseguenza il discriminante Δ non negativo. Quando invece δ^2 è positivo c' è la possibilità di intersecare l'asse delle $\mathbf{x}$ in più punti, deve essere però $|\mathbf{f_N}| < |\mathbf{2a}\delta^3|$; in questo caso l'equazione avrebbe tre radici reali; questo corrisponde al caso di $\mathbf{p}$ negativo e di conseguenza $\Delta = \mathbf{q}^2 + \mathbf{p}^3$ può essere negativo, se: $|\mathbf{q}| < \sqrt{-\mathbf{p}^3}$

Esempi

Due esempi illustreranno le difficoltà in entrambi i casi.

– · – · – · – · – · – · – · – · –

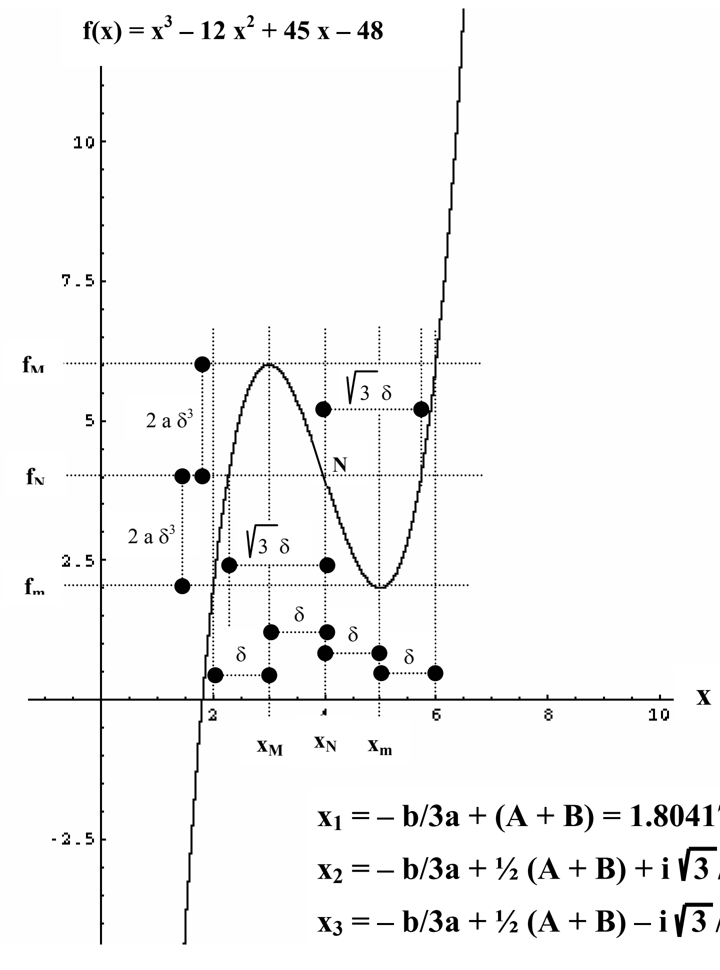
Per prima prendiamo in considerazione l'equazione del grafico:

$$x^3 - 12x^2 + 45x - 48 = 0$$

i cui parametri sono:

$$p = c/3a - b^2/9a^2 = -1 \;,\; q = bc/6a^2 - b^3/27a^3 - d/2a = -2 \;,\; \Delta = q^2 + p^3 = 3 > 0$$

L'equazione ha pertanto una radice reale e due complesse coniugate.



Gli altri parametri sono:

$$x_N = -b/3a = 4$$

$$f_N = -2aq = 4$$

$$\delta^2 = -p = 1$$

$$A = \sqrt[3]{q + \sqrt{\Delta}} = -0.644689\ldots$$

$$B = \sqrt[3]{q - \sqrt{\Delta}} = -1.551133\ldots$$

$$A + B = -2{,}195822\ldots$$

$$A - B = 0{,}906444\ldots$$

E le soluzioni:

$$x_1 = -b/3a + (A + B) = 1.804178\ldots$$

$$x_2 = -b/3a + ½\,(A + B) + i\sqrt{3}/2\,(A - B) = 2.902089\ldots + i\;0.785003\ldots$$

$$x_3 = -b/3a + ½\,(A + B) - i\sqrt{3}/2\,(A - B) = 2.902089\ldots - i\;0.785003\ldots$$

Sia data ancora l'equazione:

$$\mathbf{x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0}$$

i cui parametri sono:

$$\mathbf{p = -\,7/9 \;\;,\;\; q = 10/27 \;\;,\;\; \Delta = q^2 + p^3 = -\,1/3 < 0}$$

Siamo quindi di fronte ad un *casus irreducibilis*; applicando il metodo trigonometrico si ha:

$$\mathbf{x_N = -\,b/3a = 7/3 \;\;,\;\; f_N = -\,2aq = -\,0{,}7407 \;\;,\;\; \delta^2 = -\,p = 7/9}$$

Quindi:

$$\mathbf{\cos 3\,\theta = f_N / 2a\,\delta^3 = 0{,}7407 / 1.3718 = 0.3599\ldots \;\;;\;\; \theta = 19.1066...^\circ}$$

e le tre radici sono:

$$\mathbf{x_1 = 7/3 + 2\ sqrt(7/9)\ cos\ \ 19.1066...^\circ = 4}$$
$$\mathbf{x_2 = 7/3 + 2\ sqrt(7/9)\ cos\ 139.1066...^\circ = 1}$$
$$\mathbf{x_3 = 7/3 + 2\ sqrt(7/9)\ cos\ 259.1066...^\circ = 2}$$

L'equazione quartica

La risoluzione dell'equazione cubica consentì la risoluzione delle equazioni successive, quelle di quarto grado o quartiche. Sempre nella sua "Ars Magna" Cardano riferisce che la formula risolutiva delle equazioni di quarto grado "era dovuta a Ludovico Ferrari che l'ha scoperta dietro mia richiesta". Analizziamo il procedimento di risoluzione del Ferrari, ancora oggi utilizzato.
Sia data quindi una equazione di quarto grado:

$$\mathbf{a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e = 0}$$

con $\mathbf{a} > \mathbf{0}$; occorre anzitutto deprimerla del termine in $\mathbf{x^3}$ operando il cambio di variabile:

$$\mathbf{x = y - \frac{b}{4a}}$$

Si ottiene:

$$\mathbf{a\left[y-\frac{b}{4a}\right]^4 + b\left[y-\frac{b}{4a}\right]^3 + c\left[y-\frac{b}{4a}\right]^2 + d\left[y-\frac{b}{4a}\right] + e = 0}$$

Che si può porre nella forma (vedi appendice e):

$$\mathbf{y^4 + 2\,A\,y^2 = B\,y + C}$$

avendo posto:

$$\mathbf{A = \left[\frac{c}{2a} - \frac{3b^2}{16a^2}\right] \quad B = \left[\frac{bc}{2a^2} - \frac{d}{a} - \frac{b^3}{8a^3}\right] \quad C = \left[\frac{3b^4}{256a^4} - \frac{b^2c}{16a^3} + \frac{db}{4a^2} - \frac{e}{a}\right]}$$

Il passo successivo, detto del completamento dei quadrati, consiste nell'aggiungere ad ambo i membri $\mathbf{A^2}$ in modo da ottenere al primo membro un quadrato di un binomio:

$$\mathbf{y^4 + 2\,A\,y^2 + A^2 = A^2 + B\,y + C}$$

Ovvero:

$$\mathbf{(y^2 + A)^2 = A^2 + B\,y + C}$$

Si somma ora ad ambo i membri una quantità che lasci un quadrato al primo membro e renda un quadrato anche il secondo membro; il polinomio da aggiungere è $\mathbf{w^2 + 2Aw + 2wy^2}$ con $\mathbf{w}$ da determinare in modo che anche il secondo membro sia un quadrato:

$$\mathbf{(y^2 + A)^2 + w^2 + 2Aw + 2wy^2 = A^2 + B\,y + C + w^2 + 2Aw + 2wy^2}$$

Ovvero:

$$\mathbf{(y^2 + A + w)^2 = 2w\,y^2 + B\,y + (w^2 + 2Aw + A^2 + C)}$$

Ora mentre il primo membro è comunque un quadrato, il polinomio a secondo membro è un quadrato solo se il suo discriminante è nullo, cioè solo se:

$$\mathbf{\Delta = B^2 - 8\,w\,(w^2 + 2Aw + A^2 + C) = 0}$$

Ovvero:

$$\mathbf{B^2 - 8\, w^3 - 16\, A\, w^2 - 8\, A^2\, w - 8\, C\, w = 0}$$

$$\mathbf{8\, w^3 + 16\, A\, w^2 + 8\, (A^2 + C)\, w - B^2 = 0}$$

E' questa è una equazione cubica la cui risoluzione ci darà almeno un valore di **w** che annulando il discriminante del polinomio a secondo membro lo renderà un quadrato; indicando con **W** questo valore il polinomio a secondo membro sarà:

$$\mathbf{(y^2 + A + W)^2 = 2W\, (y + B/4W)^2}$$

Ovvero ponendo $\mathbf{H = (2W)^{1/2}}$:

$$\mathbf{(y^2 + A + W)^2 = H^2\, (y + B/4W)^2}$$

Che fornisce due equazioni di secondo grado:

$$\mathbf{y^2 + Hy + (A + W + HB/4W) =}$$

$$\mathbf{y^2 - Hy + (A + W - HB/4W) = 0}$$

Ognuna delle quali fornisce due soluzioni; si ottengono così le quattro soluzioni della quartica depressa, dalle quali, sottraendo **b/4a**, si ottengono le quattro soluzioni della nostra quartica completa.

Equazioni di grado superiore al quarto

La scoperta del metodo di risoluzione dell'equazione cubica e la relativa facilità con cui sulla base di questa era stata scoperta quella dell'equazione di quarto grado, che pertanto può essere considerata una immediata conseguenza della prima, spinsero i matematici alla ricerca della soluzione delle equazioni di quinto grado, se non ad un metodo per risolvere equazioni di qualsiasi grado:

$$\mathbf{P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0 = 0}$$

Ma per oltre due secoli dopo la pubblicazione dell' *Ars Magna* (1545) di Cardano solo pochi progressi. Una delle conseguenze immediate della ricerca fu la scoperta dei numeri complessi; già Cardano ne aveva avuta l'intuizione, ma fu **Bombelli** per primo a introdurre la nozione di numero complesso indicando tra l'altro le proprietà dell'unità immaginaria:

$$\mathbf{i = \sqrt{-1} \;;\quad i^2 = -1 \;;\quad i^3 = -i \;;\quad i^4 = 1 \;;\quad i^5 = i \quad \ldots}$$

Viete quindi aveva trovato che per ogni equazione la somma delle radici era pari (a segno invertito) al rapporto tra il secondo ed il primo coefficiente:

$$\mathbf{\Sigma\, x_i = -\, a_{n-1} / a_n}$$

(per le equazioni di secondo grado questo corrispondeva alla nota regola per cui: $\mathbf{x_1 + x_2 = -b/a}$) ed il loro prodotto era pari (a meno del segno) al rapporto tra l'ultimo e il primo coefficiente:

$$\mathbf{\Pi\, x_i = (-1)^n\, a_{n-1} / a_n}$$

(per le equazioni di secondo grado questo corrispondeva alla nota regola per cui: $\mathbf{x_1 \cdot x_2 = c/a}$).

Descartes definiva la regola dei segni delle radici: in $\mathbf{P(x)}$ a partire dall'ultimo coefficiente (o termine noto) $\mathbf{a_0}$ si contano quante variazioni di segno si presentano passando da un coefficiente al precedente; il numero di radici reali positive è al più pari al numero di variazioni. La stessa operazione effettuata sul polinomio $\mathbf{P(-x)}$ ci dà il massimo numero di radici reali negative.

Ma l'attenzione era rivolta alle equazioni di quinto grado (o quintiche), per la quale nonostante vi si dedicassero le migliori menti, si ebbero solo risultati molto parziali: si trovò la soluzione per casi particolari, si ottennero depressioni fino ad eliminare con Eulero i termini in $\mathbf{x^4}$, $\mathbf{x^3}$ e $\mathbf{x}$, ma niente risoluzione dell'equazione generale.

Ma per capire cosa esattamente cercassero i matematici occorre fare alcune precisazioni. Anzitutto, sebbene non detto esplicitamente, finora i coefficienti delle equazioni sono stati ipotizzati reali. Sotto questa ipotesi abbiamo visto che le

soluzioni per le equazioni fino al quarto grado possono essere reali o complesse, e se una radice è complessa l'equazione ha come radice anche il coniugato. In ogni caso le soluzioni si possono ottenere con un numero finito di operazioni razionali: addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, elevazioni a potenza ed estrazioni di radice. Si suole dire in questi casi che l'equazione è risolubile per radicali.
Orbene i matematici cercavano la risoluzione per radicali delle equazioni di grado superiore al quarto. E' quasi ovvio che alcune equazioni lo fossero; ad es. l'equazione:

$$\mathbf{a\,x^5 + b = 0}$$

ha evidentemente cinque soluzioni corrispondenti alle cinque radici quinte (nel campo complesso) di $-\mathbf{b/a}$. Analogamente l'equazione:

$$\mathbf{(ax + b)^5 = 0}$$

ha evidentemente cinque soluzioni reali tutte coincidenti con: $\mathbf{x = -\,b/a}$ (ovvero una radice multipla con molteplicità 5).
Il problema però era trovare un metodo risolutivo per radicali per l'equazione generale di quinto grado e più in generale per quelle di grado superiore al quarto con coefficienti di qualsiasi tipo.
Si sapeva che se $\mathbf{a}$ è una soluzione dell'equazione, il polinomio $\mathbf{P(x)}$, di grado $\mathbf{n}$, è divisibile per il binomio $\mathbf{(x - a)}$: $\mathbf{P(x) = (x - a)\,Q(x)}$ con $\mathbf{Q(x)}$ di grado $\mathbf{n\text{-}1}$. In seguito questo sarà riferito come teorema di Ruffini.
Si sapeva anche che la regola delle coppie di radici complesse coniugate valeva per polinomi di qualsiasi grado (vedi appendice **f**).
Finché, allo scadere del XVIII secolo, due scoperte pongono fine alla ricerca. La prima, di **Carl Friederic Gauss** (1777-1855), nella sua famosa tesi di laurea del 1799 (a soli 22 anni) sancisce che ogni equazione, a coefficienti in generale complessi, ha soluzioni (o radici), in generale complesse, in numero pari al suo grado. In seguito questa diventerà per i matematici il *Teorema Fondamentale dell'Algebra* (**FTA**). In effetti analoghe affermazioni erano state già fatte in precedenza ma Gauss gli diede la veste e la generalità con la quale oggi è accettata.
Che un'equazione di grado **n** abbia sempre **n** soluzioni fu asserito per la prima volta da un matematico fiammingo **Albert Girard** nel 1629 nella sua "L'invention en algèbre" senza però darne giustificazione né specificando la natura delle soluzioni.
L'affermazione di Girard fu accettata dai matematici come autoevidente ritenendo che il vero problema fosse dimostrare la natura delle soluzioni. **Leibnitz** nel 1742 addirittura cercò di confutare l'affermazione di Girard con un esempio che solo molti anni dopo Eulero dimostrò fallace.
Il primo serio tentativo di dimostrare il FTA fu fatto da **d'Alambert** nel 1746 ma la sua dimostrazione aveva molte lacune; tra l'altro utilizzava un lemma che sarà

provato solo molti anni dopo e per la cui dimostrazione si utilizza proprio il FTA. In pratica era una tautologia.
Eulero (immancabile) per primo provò il FTA dapprima sui polinomi di grado non superiore al sesto, successivamente nel 1749 per qualsiasi grado ma sempre per coefficienti reali.
Del FTA se ne occuparono anche **Lagrange** e **Laplace**. Il primo nel 1772 cercò di confutare la prova di Eulero, il secondo nel 1795 con una sua dimostrazione successivamente rivelatasi anch'essa lacunosa.
Arriviamo così nel 1799 alla tesi di laurea di Gauss; nella prima formulazione con un approccio topologico si affermava che ogni polinomio con coefficienti complessi ha almeno una radice complessa, ma questo per il teorema di Ruffini equivaleva a dire che ogni polinomio ha tante radici quanto il suo grado, ovvero può essere scomposto in prodotto di binomi del tipo:

$$\mathbf{P(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)}$$

Dove $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1}$, …, $\mathbf{x_n}$ sono le **n** soluzioni dell'equazione $\mathbf{P(x) = 0}$ (ovvero gli **n** zeri del polinomio $\mathbf{P(x)}$).
Anche la dimostrazione di Gauss del 1799 aveva qualche lacuna che egli colmò pubblicando nel 1816 e nel 1849 due nuove dimostrazioni del FTA con approcci diversi, questa volta complete e nella forma oggi universalmente accettata. In appendice **g** è riportata per un primo livello di approfondimento una simpatica dimostrazione del FTA senza alcuna pretesa di rigore.

La seconda scoperta, oggi nota come Teorema di Ruffini-Abel, è uno dei più famosi teoremi della matematica ed ha una storia ancora più travagliata. Dopo l'affermazione del FTA che le soluzioni esistono, essa pone invece dei limiti alla ricerca affermando che le equazioni di grado superiore al quarto non sono in generale risolubili per radicali.
La prima formulazione del teorema, con riferimento alle equazioni di quinto grado, è del matematico (e medico) italiano **Paolo Ruffini** (1765-1822) in una sua pubblicazione dal titolo "*Teoria generale delle equazioni in cui si dimostra che la soluzione dell'equazione generale di grado superiore al quarto è impossibile* " del 1799 (anno magico per l'algebra).
Ma l'affermazione di Ruffini passò inosservata, nonostante più volte l'avesse sottoposta inutilmente al vaglio di Lagrange e ripetutamente ne avesse rivista la dimostrazione nel dubbio che risultasse di difficile comprensione. Solo Cauchy, e non senza interesse personale avendola utilizzata nei suoi lavori, gli conferì un pubblico riconoscimento.
In effetti la dimostrazione di Ruffini aveva qualche lacuna in alcuni passaggi, arditi per l'epoca. La dimostrazione completa fu fornita nel 1824 da uno dei più geniali matematici di tutti i tempi, il norvegese **Niels Henrik Abel** (1802-1829) forse indipendentemente (da ricordare che Abel aveva studiato l'opera di Cauchy

che si avvaleva dei risultati di Ruffini). In ogni caso la dimostrazione di Abel era completa e solo recentemente il nome di Ruffini gli è stato affiancato nella paternità del teorema.
Si noti che in effetti il teorema non esclude che alcune equazioni di grado superiore al quarto non siano risolubili per radicali, dice solo che alcune non lo sono, quindi non può esistere una formula risolutiva per l'equazione generale di grado superiore al quarto.
Del Ferro, Tartaglia, Cardano e Ferrari quindi era stati gli ultimi a risolvere un'equazione algebrica. Dopo di loro nessuno ha potuto e nessuno potrà mai più dare una formula generale di risoluzione (per radicali) di una equazione generale.

Appendice 1: La radice cubica

E’ noto dall’aritmetica l’algoritmo per trovare la radice quadrata (si dovrebbe dire quadratica) di un dato numero, ad es. **2345,678**. Ricordiamolo!
Il numero viene suddiviso in coppie di cifre da destra e da sinistra della virgola decimale, aggiungendo se necessario qualche zero per completare le ultime coppie a destra ed a sinistra; nel nostro esempio: **23’46,67’80**.
Si trova la massima cifra (cioè un numero compreso tra **0** e **9**) il cui quadrato sia sottraibile alla prima coppia di cifre da sinistra del nostro numero e si esegue la sottrazione. La cifra trovata è la prima cifra (la più significativa) del radicale.
(#) Il resto della sottrazione viene ampliato affiancandogli la coppia successiva; il radicale sinora trovato viene moltiplicato per **20**, gli viene sommata una cifra **y** ed il tutto viene moltiplicato per la stessa cifra **y**, con **y** scelta in modo che si ottenga il massimo numero sottraibile dal resto ampliato precedente e si esegue la sottrazione. La cifra **y** è la cifra successiva del radicale.
Si ritorna ripetitivamente al punto (#) finché non si ottiene la precisione desiderata, avendo cura di mettere la virgola decimale al radicale quando al resto viene affiancata la prima coppia dopo la virgola.
Per il nostro esempio:

$\sqrt{23'45{,}67'80}$	48,4322
16	88 x 8 = 704
= 745	964 x 4 = 3856
704	9683 x 3 = 29049
= 4167	96862 x 2 = 193724
3856	968642 x 2 = 1937284
= 31180	
29049	
= 213100	
193724	
= 1937600	
1937284	
===== 316	

Infatti: $\mathbf{(48{,}4322)^2 = 2345{,}677997 = 2345{,}678 - 0{,}00000316}$.

Meno noto è l’algoritmo per estrarre la radice cubica di un dato numero (ad es. **1234,5678**).
L’algoritmo è simile a quello della radice quadrata. Il numero viene suddiviso in terne di cifre da destra e da sinistra della virgola decimale aggiungendo se necessario zeri per completare le ultime terne; nel nostro esempio: **001'234,567'800**.

Si trova la massima cifra (cioè il massimo numero tra **0** e **9**) il cui cubo sia sottraibile alla prima terna da sinistra e si esegue la sottrazione. La cifra trovata è la prima cifra (la più significativa) del radicale. Può essere di aiuto in questa fase la tabella dei cubi delle cifre:

$\mathbf{1^3 = 1}$	$\mathbf{2^3 = 8}$	$\mathbf{3^3 = 27}$	$\mathbf{4^3 = 64}$	$\mathbf{5^3 = 125}$
$\mathbf{6^3 = 216}$	$\mathbf{7^3 = 343}$	$\mathbf{8^3 = 512}$	$\mathbf{9^3 = 729}$	

(#) Al resto della sottrazione si affianca la terna successiva; il radicale finora trovato viene elevato al quadrato e moltiplicato per **300**, gli viene sommato il radicale stesso moltiplicato per **30** e per una cifra **y**, quindi viene sommato $\mathbf{y^2}$; il numero così ottenuto viene ancora moltiplicato per **y** con **y** scelto in modo che il numero così ottenuto sia il massimo sottraibile dal resto ampliato e si esegue la sottrazione. In altri termini mentre per la radice quadrata si applicava la formula $\mathbf{(20\,x + y) \cdot y}$, per la radice cubica la formula diventa: $\mathbf{(300\,x^2 + 30\,x\,y + y^2) \cdot y}$.
La cifra trovata è la successiva del radicale.
Si torna ripetutamente al punto (#) finché non si ottiene la desiderata precisione, avendo cura di apporre la virgola decimale al radicale quando al resto viene affiancata la prima terna dopo la virgola.
Per il nostro esempio:

$\sqrt[3]{2'345{,}678'900}$	13,28687
1	$(300 * 1^2 + 30 * 1 * 3 + 3^2) * 3 =$
1345	$= (300 + 90 + 9) * 3 = 399 * 3 = 1197$
1197	$(300 * 13^2 + 30 * 13 * 2 + 2^2) * 2 =$
= 148678	$= (50700 + 780 + 4) * 2 = 51484 * 2 = 102968$
102968	$(300 * 132^2 + 30 * 132 * 8 + 8^2) * 8 =$
= 45710900	$= (5227200 + 31680 + 64) * 8 = 42071552$
42071552	$(300 * 1328^2 + 30 * 1328 * 6 + 6^2) * 6 =$
= 3639348000	$= (529075200 + 239040 + 36) * 6 = 3175885656$
3175885656	$(300 * 13286^2 + 30 * 13286 * 8 + 8^2) * 8 =$
= 463462344000	$= 52958527504 * 8 = 423668220032$
423668220032	$(300 * 132868^2 + 30 * 132868 * 7 + 7^2) * 7 =$
= 39794123968	$= 5296199529529 * 7 = 37073396706703$
37073396706703	
= 2720727261297	

Infatti: $\mathbf{(13{,}28687)^3 = 2345{,}67679\ldots}$ quindi con un errore inferiore al .0001 %.

Si vuole però qui accennare ad un metodo generale, messo a punto dal grande Newton, per trovare le radici di qualsiasi indice di qualsiasi numero. Dato quindi un numero **x**, di cui si cerca la radice **n**-esima, si stima con la migliore approssimazione possibile il valore della radice che indichiamo con $\mathbf{x_o}$, quindi a partire da questo si calcolano iterativamente valori successivi $\mathbf{x_i}$ con la formula:

$$\mathbf{x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^n - x}{n \cdot x_i^{n-1}}}$$

fin quando la differenza tra due valori consecutivi sarà inferiore alla precisione desiderata.
Nell'esempio precedente si otterrebbe: x = 2345,6789 e n = 3. Si stima il valore della radice di circa $x_o = 13$.
Quindi:

$$x_1 = 13 - \frac{13^3 - 2345{,}6789}{3 \cdot 13^3} = 13{,}29325227$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 2345{,}6789}{3 \cdot x_1^2} = 13{,}28687820$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - 2345{,}6789}{3 \cdot x_2^2} = 13{,}28687514$$

Si è così ottenuto la radice cubica di 2345,6789 con almeno 6 cifre decimali.

Altro esempio: x = 27 , n = 5. Una prima stima della radice è $x_o = 2$.
Quindi:

$$x_1 = 2 - \frac{2^5 - 27}{5 \cdot 2^4} = 1{,}9375$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^5 - 27}{5 \cdot x_1^4} = 1{,}933201240$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^5 - 27}{5 \cdot x_2^4} = 1{,}933182045$$

Ogni ulteriore iterazione darebbe variazioni infinitesime. Si è così ottenuto il valore cercato con almeno 8 cifre significative con tre sole iterazioni.
Con una buona stima iniziale si raggiunge il risultato con poche iterazioni; una errata valutazione della stima iniziale comporta solo più iterazioni ma non inficia il risultato finale.

Appendice a: L'equazione cubica depressa.

Data l'equazione: $\mathbf{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0}$ si operi il cambio di variabile: $\mathbf{x \rightarrow y - b/3a}$:

$$a\left[y - \frac{b}{3a}\right]^3 + b\left[y - \frac{b}{3a}\right]^2 + c\left[y - \frac{b}{3a}\right] + d = 0$$

$$a\left[y^3 + \frac{3b^2}{9a^2}\,y - \frac{3b}{3a}\,y^2 - \frac{b^3}{27a^2}\right] + b\left[y^2 - \frac{2b}{3a}\,y + \frac{b^2}{9a^2}\right] + c\,y - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

$$a\,y^3 + \frac{b^2}{3a}\,y - b\,y^2 - \frac{b^3}{27a^2} + b\,y^2 - \frac{2b^2}{3a}\,y + \frac{b^3}{9a^2} + c\,y - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

$$a\,y^3 + \left[\frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c\right]y - \left[\frac{b^3}{27a^2} - \frac{b^3}{9a^2} + \frac{bc}{3a} - d\right] = 0$$

$$y^3 + 3\left[\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right]y - 2\left[\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right] = 0 \qquad y^3 + 3\,p\,y - 2\,q = 0$$

Appendice b: Calcolo di $\mathbf{s^2}$ e $\mathbf{s^3}$:

$$s = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 + p^3}} = \sqrt[3]{q + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{\Delta}}$$

$$s^2 = \sqrt[3]{\left[q + \sqrt{q^2 + p^3}\right]^2} + \sqrt[3]{\left[q - \sqrt{q^2 + p^3}\right]^2} + 2\,\sqrt[3]{q^2 - q^2 - p^3}$$

$$= \sqrt[3]{\left[q + \sqrt{q^2 + p^3}\right]^2} + \sqrt[3]{\left[q - \sqrt{q^2 + p^3}\right]^2} - 2\,p$$

$$s^3 = s^2\,s = \left\{\sqrt[3]{\left[q + \sqrt{\Delta}\right]^2} + \sqrt[3]{\left[q - \sqrt{\Delta}\right]^2}\right\}\left[\sqrt[3]{q + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{\Delta}}\right] - 2\,p\,s =$$

$$= \sqrt[3]{\left[q + \sqrt{\Delta}\right]^3} + \sqrt[3]{\left[q - \sqrt{\Delta}\right]^2} * \sqrt[3]{q + \sqrt{\Delta}} +$$

$$+ \sqrt[3]{\left[q + \sqrt{\Delta}\right]^2} * \sqrt[3]{q - \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\left[q - \sqrt{\Delta}\right]^3} - 2\,p\,s =$$

$$= -2\,p\,s + 2\,q + \left[\sqrt[3]{q^2 - (q^2 + p^3)}\right]\left[\sqrt[3]{q - \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{q + \sqrt{\Delta}}\right]$$

$$= -2\,p\,s + 2\,q - p\,s = 2\,q - 3\,p\,s$$

Appendice c : Prova che: $(A - B)^2 = s^2 + 4\,p$

$$A = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}} \quad ; \quad B = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 + p^3}}$$

$$(A - B)^2 = \sqrt[3]{\left[q + \sqrt{q^2 + p^3}\right]^2} + \sqrt[3]{\left[q - \sqrt{q^2 + p^3}\right]^2} - 2\sqrt[3]{q^2 - q^2 - p^3} =$$

$$= \sqrt[3]{\left[q + \sqrt{q^2 + p^3}\right]^2} + \sqrt[3]{\left[q - \sqrt{q^2 + p^3}\right]^2} + 2\,p =$$

$$= \left[\sqrt[3]{\left[q + \sqrt{q^2 + p^3}\right]^2} + \sqrt[3]{\left[q - \sqrt{q^2 + p^3}\right]^2} - 2\,p\right] + 4\,p = s^2 + 4\,p$$

Appendice d:

Calcolo di $\mathbf{h = f_m - f_N}$ con $f_N = \dfrac{2b^3}{27a^2} - \dfrac{bc}{3a} + d$

$$x_m = -\,b/3a + \sqrt{\frac{b^2 - 3ac}{9a^2}} = -\,b/3a + \delta$$

$$x_m^{\,2} = \frac{b^2}{9a^2} - \frac{2b}{3a}\,\delta + \frac{b^2 - 3ac}{9a^2}$$

$$x_m^{\,3} = -\,\frac{b^3}{27a^3} + \frac{3b^2}{9a^2}\,\delta - \frac{3b}{3a}\,\frac{b^2 - 3ac}{9a^2} + \frac{b^2 - 3ac}{9a^2}\,\delta$$

Quindi:

$$f_m = a\,x_m^{\,3} + b\,x_m^{\,2} + c\,x_m + d =$$

$$= -\,\frac{b^3}{27a^2} + \frac{3b^2}{9a}\,\delta - b\,\cancel{\frac{b^2 - 3ac}{9a^2}} + \frac{b^2 - 3ac}{9a}\,\delta +$$

$$+\,\frac{3b^3}{27a^2} - \frac{6b^2}{9a}\,\delta + b\,\cancel{\frac{b^2 - 3ac}{9a^2}} - \frac{bc}{3a} + c\,\delta + d =$$

$$= -\,\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d - \frac{3b^2 - b^2 + 3ac - 9ac}{9a}\,\delta =$$

$$= f_N - 2\,a\,\frac{b^2 - 3ac}{9a^2}\,\delta = f_N - 2\,a\,\delta^3$$

Analogamente per $\mathbf{f_M}$ si può provare che: $\mathbf{f_M = f_N + 2\,a\,\delta^3}$

Appendice e : L'equazione quartica depressa.

Data l'equazione: $\mathbf{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0}$ si operi il cambio di variabile: $\mathbf{x \rightarrow y - b/3a}$:

$$a\left[y-\frac{b}{4a}\right]^4 + b\left[y-\frac{b}{4a}\right]^3 + c\left[y-\frac{b}{4a}\right]^2 + d\left[y-\frac{b}{4a}\right] + e = 0$$

$$a\left[y^2-\frac{b}{2a}\,y+\frac{b^2}{16a^2}\right]^2 + b\left[y^3-3\,\frac{b}{4a}\,y^2+3\,\frac{b^2}{16a^2}\,y-\frac{b^3}{64a^3}\right] + c\left[y^2-\frac{b}{2a}\,y+\frac{b^2}{16a^2}\right] + d\left[y-\frac{b}{4a}\right] + e = 0$$

$$a\,y^4+\frac{b^2}{4a}\,y^2+\frac{b^4}{256a^3}-b\,y^3+\frac{b^2}{8a}\,y^2-\frac{b^3}{16a^2}\,y+b\,y^3-3\,\frac{b^2}{4a}\,y^2+3\,\frac{b^3}{16a^2}\,y-\frac{b^4}{64a^3}\,+$$

$$+\,c\,y^2-\frac{bc}{2a}\,y+\frac{cb^2}{16a^2}+d\,y-\frac{db}{4a}+e = 0$$

$$a\,y^4+\left[\frac{b^2}{4a}+\frac{b^2}{8a}-\frac{3b^2}{4a}+c\right]y^2+\left[\frac{3b^3}{16a^2}-\frac{bc}{2a}-\frac{b^3}{16a^2}+d\right]y+\left[\frac{b^4}{256a^3}-\frac{b^4}{64a^3}+\frac{b^2c}{16a^2}-\frac{db}{4a}+e\right]= 0$$

$$y^4+2\left[\frac{c}{2a}-\frac{3b^2}{16a^2}\right]y^2-\left[\frac{bc}{2a^2}-\frac{d}{a}-\frac{b^3}{8a^3}\right]y-\left[\frac{3b^4}{256a^4}-\frac{b^2c}{16a^3}+\frac{db}{4a^2}-\frac{e}{a}\right]= 0 \qquad y^4+2\,A\,y^2 = B\,y+C$$

Appendice f :

L' operazione che fornisce il coniugato di un numero complesso gode della proprietà commutativa rispetto alle seguenti operazioni sui numeri complessi:

- moltiplicazione per un reale, $a \cdot \overline{c} = \overline{a \cdot c}$
- elevazione a potenza, $(\overline{c})^n = \overline{c^n}$
- somma di due complessi. $\overline{c} + \overline{d} = \overline{c + d}$

Ne segue che il coniugato del valore di un polinomio a coefficienti reali $\mathbf{P(x)}$ per un dato valore complesso $\mathbf{z}$ della sua variabile è uguale al valore del polinomio per il coniugato del valore della variabile:

$$\overline{P(z)} = P(\overline{z})$$

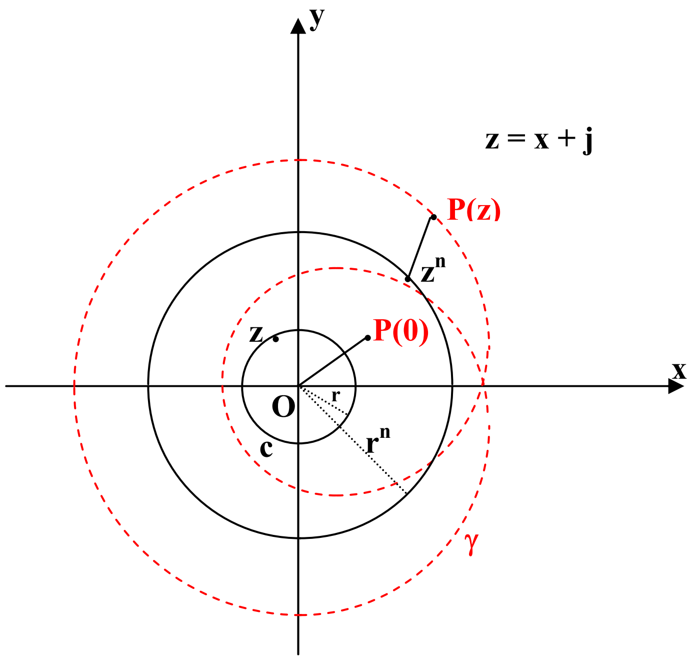
Di conseguenza se un polinomio a coefficienti reali $\mathbf{P(x)}$ si annulla per un certo valore complesso $\mathbf{c}$ della sua variabile [$\mathbf{P(c)=0}$], si annullerà anche per il coniugato $\overline{c}$, essendo:

$$P(\overline{c}) = \overline{P(c)} = \overline{0} = 0$$

Appendice g: Teorema fondamentale dell'Algebra.
Si vuole dimostrare che per il polinomio nel campo complesso:

$\mathbf{P(z) = z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_o}$ (con a_o diverso da 0)

c'è almeno un punto nel quale si annulla, ha cioè almeno uno zero. Supponiamo allora per assurdo che il polinomio non si annulli in alcun punto del piano complesso e sia **P(0)** [= $\mathbf{a_o}$] il valore (complesso) diverso da **0** che il polinomio assume nell'origine **O**. Quando il punto **z** percorre una circonferenza **c** con centro nell' origine e di raggio **r**, il punto **P(z)** descrive una curva chiusa γ (il polinomio è una funzione continua) che non passa per l'origine e che vi potrebbe girare più volte intorno. Diciamo allora **ν(r)** la funzione che associa ad ogni valore del raggio **r** il numero di volte con cui la curva gira intorno all'origine.



Variando con continuità **r** la curva γ si modifica con continuità, ma non potendo attraversare **O** non cambia **ν(r)**, cioè **ν(r)** è costante.
Ora quando **r** tende a **0** la curva tende all' unico punto **P(0)**, diverso dall'origine; quindi sarebbe: **ν(r) = cost. = 0**
Quando invece **r** assume valori molti grandi, ad esempio valori contemporaneamente maggiori sia di **1** sia della somma dei moduli dei coefficienti $|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+ \ldots +|a_1|+|a_o|$, in questi casi è facile constatare che:

$$|P(z) - z^n| = |a_{n-1}\, z^{n-1} + a_{n-2}\, z^{n-2} + \ldots + a_1\, z + a_o| <$$

$$< |a_{n-1}|\, |z|^{n-1} + |a_{n-2}|\, |z|^{n-2} + \ldots + |a_1|\, |z| + |a_o| =$$

$$= |a_{n-1}|\, r^{n-1} + |a_{n-2}|\, r^{n-2} + \ldots + |a_1|\, r + |a_o| =$$

$$= r^{n-1}\, [\, |a_{n-1}| + |a_{n-2}|\, 1/r + \ldots + |a_1|\, 1/r^{\,n-2} + |a_o|\, 1/r^{\,n-1}\,] <$$

$$< r^{n-1}\, [\, |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_1| + |a_o|\,] < r^n = |z|^n$$

Questo significa che il segmento unisce $\mathbf{P(z)}$ e $\mathbf{z^n}$ non può mai passare per l' origine.
Ora sappiamo che ogni volta che $\mathbf{z}$ percorre il cerchio $\mathbf{c}$ di raggio $\mathbf{r}$, $\mathbf{z^n}$ percorre $\mathbf{n}$ volte il cerchio di raggio $\mathbf{r^n}$ "trascinandosi" dietro il punto $\mathbf{P(z)}$ con un segmento che non potrà mai passare per l'origine, quindi costringendolo a girare $\mathbf{n}$ volte intorno all'origine. In definitiva per grandi valori di $\mathbf{r}$: $\nu(\mathbf{r}) = \mathbf{n}$, in contraddizione con il precedente risultato $\nu(\mathbf{r}) = \textbf{cost.} = \mathbf{0}$.
Quindi in almeno un punto il polinomio si deve annullare. **C.V.D.**