SULLA PODARIA DI UNA CURVA RISPETTO A UN PUNTO

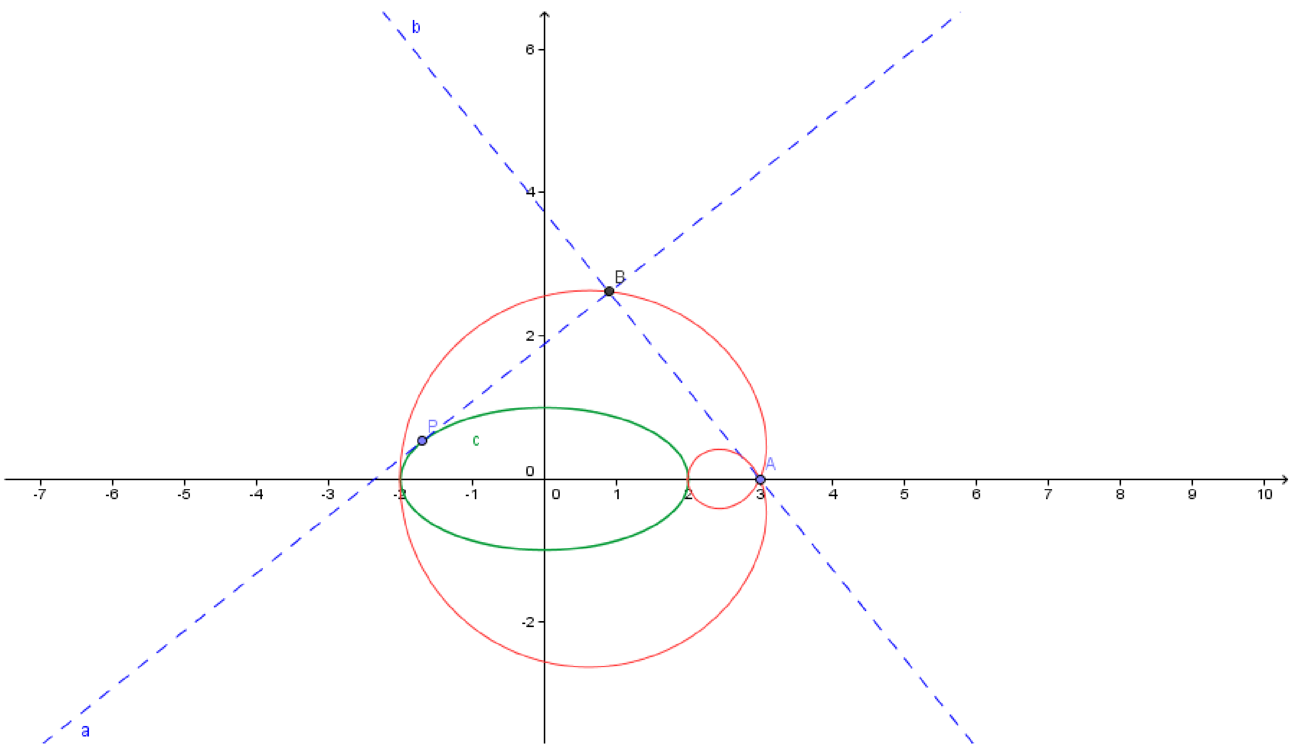
di Francesco Camia

Si dice **podaria** di una curva C rispetto a un punto A (detto polo) **il luogo dei piedi delle perpendicolari condotte da A alle tangenti alla curva stessa**; la curva C è detta **antipodaria** della podaria ottenuta.

Supponiamo che la curva C sia piana e sufficientemente regolare, in particolare che in ogni suo punto essa possieda una sola retta tangente.

In un piano, riferito ad un sistema d'assi cartesiani ortogonali, consideriamo la curva (conica) C di equazione $x^2 + 4y^2 = 4$ e ci proponiamo di trovare l'equazione della sua podaria rispetto al punto A=(3; 0) . L'equazione di C può essere scritta, dividendone i due membri per 4, nella forma $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$, da cui si nota che C è un'ellisse (reale), riferita a centro e assi, con i fuochi sull'asse x e semiassi di misura 2 e 1 (quelli di misura 2 sull'asse x); C è pertanto una curva algebrica del secondo ordine priva di punti multipli che quindi possiede un'unica tangente in ogni suo punto.

Indicando con P un generico punto dell'ellisse C, siano *a* la tangente in P all'ellisse, *b* la perpendicolare ad *a* condotta per A, B il punto d'intersezione delle rette *a* e *b*. La podaria in questione è il luogo descritto dal punto B al variare del punto P sull'ellisse C.



Per determinare l'equazione di questo luogo, procederemo con il metodo di eliminazione dei parametri.

Indicando con (h; k) le coordinate del punto P, risulta che

$$(1) \qquad h^2 + 4k^2 = 4$$

dal momento che P appartiene all'ellisse C.

Si trova facilmente (mediante derivate parziali) che l'equazione della retta a è:

$$hx + 4ky - h^2 - 4k^2 = 0$$

da cui, grazie alla relazione (1) si ottiene:

$$hx + 4ky - 4 = 0.$$

L'equazione della retta b è quindi, per la condizione di perpendicolarità fra rette,

$$y = \frac{4k}{h}(x-3)$$

e le coordinate del punto B si trovano risolvendo il seguente sistema nelle incognite x ed y:

$$\begin{cases} y = \frac{4k}{h}(x-3) \\ hx + 4ky - 4 = 0 \end{cases}$$

Tuttavia, per arrivare all'equazione del luogo richiesto, conviene non risolvere tale sistema, ma piuttosto eliminare i parametri h e k fra le tre equazioni seguenti[1] :

$$(2) \qquad \begin{cases} y = \frac{4k}{h}(x-3) \\ hx + 4ky - 4 = 0 \\ h^2 + 4k^2 = 4 \end{cases}$$

A tale scopo conviene risolvere il sistema formato dalle prime due equazioni di (2) nelle incognite h e k, e sostituire quindi nella terza equazione di (2) le espressioni trovate per h e k.

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -4kx + hy = -12k \\ xh + 4yk = 4 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} yh - 4xk = -12k \\ xh + 4yk = 4 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} yh + (3-x)k = 0 \\ xh + 4yk = 4 \end{cases} \quad ;$$

risolvendo quest'ultimo nelle incognite h e k (ad esempio con il metodo di Cramer), si ottiene:

$$h = \frac{4(3-x)}{3x - x^2 - y^2} \quad , \quad k = \frac{-y}{3x - x^2 - y^2} \; .$$

Sostituendo infine al posto di h e k tali espressioni nella (1), ovvero nella terza di (2), si ha, dopo semplici passaggi:

$$(3) \qquad 4(3-x)^2 + y^2 - (3x - x^2 - y^2)^2 = 0$$

---

[1] Le tre equazioni da considerare sono quelle delle rette a e b, la cui intersezione è B, e quella derivante dalla relazione (1) che deve sussistere fra i parametri h e k.

che è l'equazione della podaria richiesta.

Tale curva (tracciata in rosso nel grafico sopra riportato) passa per i due vertici dell'ellisse C con coordinate (± 2; 0), come si verifica immediatamente sostituendo tali coordinate nell'equazione (3). Questo era comunque prevedibile osservando che se P coincide con uno di tali vertici, la retta *a* è parallela all'asse *y* e la retta *b* diventa l'asse *x*, per cui B coincide con il vertice considerato. Inoltre la podaria passa doppiamente per il punto A, poiché vi sono due posizioni di P, simmetriche rispetto all'asse *x*, in corrispondenza delle quali la retta *a* passa per A e quindi il punto B coincide con A; tali posizioni di P sull'ellisse C (diciamole P_1 e P_2) sono i punti in cui le tangenti a C condotte da A tangono C.