Ricerca di Teoria dei Numeri

Successioni di Fibonacci generalizzate

Con implementazioni in Sage

Sebastiano Ferraris

2011

Sommario

Queste pagine sono l'evoluzione di una ricerca presentata nell'anno accademico 2008-2009 per l'esame del corso di Crittografia tenuto dal prof. Umberto Cerruti all'università di Matematica di Torino.
Oltre a diverse aggiunte e correzioni si distingue sostanzialmente dalla versione originale per le implementazioni in Sage lasciate nell'ultimo capitolo. Mi sono poi divertito ad raccogliere alcuni problemi di diverse difficoltà in ogni paragrafo, dato che non esiste processo mentale che valga la pena di affrontare senza un'esperienza viva che lo sostenga.
Desidero ringraziare Francesco Giovo per l'aiuto nella stesura e per la revisione.

Nella prima parte della ricerca viene introdotta brevemente la successione di Fibonacci, con alcune delle proprietà più importanti. Infine affrontando proprietà meno intuitive si arriverà gradualmente ad una generalizzazione delle successioni, proposta nella seconda parte. La terza parte è una raccolta di funzioni implementate con Sage, che mi sono state di aiuto per capire meglio alcune proprietà.

Per suggerimenti, correzioni e commenti di qualsiasi tipo contattatemi pure.

sebastiano.ferraris@gmail.com
Torino, 22 dicembre 2011.

Indice

Capitolo 1

Successione di Fibonacci e proprietà principali

1.1 Il problema di Fibonacci

Oltre ad aver diffuso il sistema di numerazione posizionale, Fibonaccin nel *Liber abaci*, rese noto il seguente problema:

data una coppia di conigli neonati, trovare il numero di conigli che possono nascere dal loro incontro in un anno, se valgono le seguenti ipotesi

1. Ogni coniglio, dalla nascita, impiega un mese per diventare maturo
2. Ogni coppia di conigli genera una coppia di neonati ogni mese
3. Tutti i conigli sono immortali.

Se la coppia di conigli iniziali è nata, per esempio, il primo gennaio, allora il primo febbraio diventano maturi e il primo marzo generano una seconda coppia; il primo aprile, la seconda coppia diventa matura e la prima ne genera un'altra, e così via, fino ad avere il risultato espresso nella tabella sottostante:

Mesi	G.	F.	M.	A.	M.	G.	L.	A.	S.	O.	N.	D.
Neonati	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
Maturi	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Totali	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Se rappresentiamo le coppie di conigli neonati con $\bullet$ e le coppie di conigli maturi con $\circ$ allora possiamo visualizzare l'insieme di coppie per ogni mese con un'altra tabella:

Mesi	G.	F.	M.	A.	M.	G.	L.	...
	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	
			$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	
				$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	
					$\circ$	$\circ$	$\bullet$	
					$\circ$	$\circ$	$\bullet$	
						$\circ$	$\circ$	
Coppie						$\circ$	$\circ$	...
						$\circ$	$\circ$	
							$\circ$	
							$\circ$	
							$\circ$	
							$\circ$	
							$\circ$	
Totale	1	1	2	3	5	8	13	...

Possiamo notare che ogni colonna è formata dalle coppie di conigli del mese precedente, diventati tutti maturi sommati ad un numero di coppie di conigli neonati pari al numero di conigli maturi del mese precedente, quindi pari al numero totale di conigli di due mesi prima.

La successione dei numeri di conigli in vita per ogni mese costituisce la **successione di Fibonacci**. Si verifica immediatamente che ogni suo elemento, a partire dal terzo, è somma dei due precedenti. Può essere quindi definita per ricorrenza:

$$
\begin{aligned}
&F_0 = 0\\
&F_1 = 1\\
&F_n = F_{n-1} + F_{n-2}
\end{aligned}
$$

Problemi

Problema 1.1.1 (Negativa di Fibonacci)**.** *Ci sono diverse definizioni per la successione di Fibonacci negativa, proposte ad esempio da [1]. Calcola alcuni termini di*

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$
$$F_{-n} = -F_{-(n-1)} - F_{-(n-2)}$$

e prova ad inventare qualche altra.

Problema 1.1.2 (Rappresentazione matriciale)**.** *C'è un altro modo per rappresentare i numeri di Fibonacci. Verifica che se*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Allora

$$A^n = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}$$

Problema 1.1.3 (Numeri di Tribonacci e Tetranacci)**.** *Generalizza la successione di Fibonacci con la condizione che l'n-esimo numero sia la somma dei k precedenti, avendo definito i primi k come i primi k elementi della successione di Fibonacci. Per $k = 3$ la successione è detta successione di Tribonacci. Per $k = 4$ la successione è detta di Tetranacci.*

Problema 1.1.4. *Implementa un algoritmo che calcoli il rapporto di due numeri di Fibonacci consecutivi e lista tale rapporto per i primi 500 numeri.*

Problema 1.1.5 (Numeri di Repfigit)**.** *Considera l'intero M costituito da m cifre $d1, d2, \ldots, dm$: $M = d1d2\ldots dm$. Allora si può definire una successione di interi*

$$\begin{aligned} s1 &= d1 + d2 + d3 + \cdots + dm \\ s2 &= s1 + d2 + d3 + \cdots + dm \\ s3 &= s1 + s2 + d3 + \cdots + dm \\ &\vdots \\ sm &= s1 + s2 + s3 + \cdots + dm \end{aligned}$$

Procedendo con lo stesso ragionamento anche per degli interi successivi, ci si imbatte nei numeri di Repfigit. Chi deve essere M perché si ottenga proprio la successione di Fibonacci?

Problema 1.1.6. *Dimostra che la somma dei primi dieci numeri conscutivi della successione di Fibonacci sono uguali al settimo numero della serie moltiplicato per* 11*.*

1.2 Proprietà principali

Ora possiamo addentrarci nelle proprietà della successione di Fibonacci ([4] e [5]).

Proprietà 1.2.1 (Primalità degli elementi consecutivi)**.** *Due termini consecutivi della successione sono primi fra loro.*

Dimostrazione. Per induzione: per $n = 1$ verifichiamo la tesi

$$MCD(F_1, F_2) = MCD(1, 1) = 1$$

Passo induttivo: prendiamo per vero che

$$MCD(F_{n-1}, F_n) = 1$$

da cui per l'identità di Bézout

$$\exists\ m, n \in \mathbb{Z} \mid \quad mF_{n-1} + nF_n = 1$$

se per assurdo negassimo il passo successivo, allora

$$MCD(F_n, F_{n+1}) \neq 1$$

Sempre per l'identità di Bézout, abbiamo che

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \mid \quad aF_n + bF_{n+1} \neq 1$$

ma sapendo che

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$$

si ha

$$aF_n + b(F_{n-1} + F_n) \neq 1$$

cioè

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad bF_{n-1} + (a + b)F_n \neq 1$$

In contraddizione con l'ipotesi induttiva. □

Proprietà 1.2.2 (Somma degli elementi consecutivi). *La somma dei numeri consecutivi della successione, dal primo all'n-esimo, a cui viene sommato* 1*, risulta essere uguale ad un altro numero della successione che segue di due posti l'n-esimo scelto.*

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione. La tesi può essere riformulata nel seguente modo:

$$(\sum_{j=1}^{n} F_j) + 1 = F_1 + F_2 + ... + F_n + 1 = F_{n+2}$$

Passo iniziale: per $n = 1$ verifichiamo la tesi

$$F_1 + 1 = F_3 \qquad 1 + 1 = 2$$

Passo induttivo: sia vero per $n - 1$

$$\sum_{j=1}^{n-1}(F_j) + 1 = F_{n+1}$$

Sommando F_n ad entrambi i membri

$$\sum_{j=1}^{n-1}(F_j) + F_n + 1 = F_n + F_{n+1}$$

e sapendo che $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, risulta

$$\sum_{j=1}^{n}(F_j) + 1 = F_{n+2}$$

□

Proprietà 1.2.3 (Somma di elementi dispari). *Sommando solo gli elementi di posto dispari della successione, si ottiene l'elemento della successione successivo all'ultimo sommato.*

Dimostrazione. Come prima dimostriamo per induzione. La tesi può essere riformulata nel seguente modo:

$$\sum_{j=0}^{n} F_{2j+1} = F_{2n+2}$$

Passo iniziale: per $n = 0$ si verifica la tesi

$$F_1 = F_2 \qquad 1 = 1$$

Passo induttivo: sia vero per $n - 1$

$$\sum_{j=0}^{n-1} F_{2j+1} = F_1 + F_3 + ... + F_{2n-1} = F_{2(n-1)+2} = F_{2n}$$

Sommiamo ad entrambi i membri F_{2n+1} ed ottengo

$$F_1 + F_3 + ... + F_{2n-1} + F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n+1}$$

da cui, sapendo che $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, risulta

$$\sum_{j=0}^{n} F_{2j+1} = F_{2n+2}$$

□

Proprietà 1.2.4 (Scomposizione)**.** *Per i numeri di Fibonacci vale la seguente equazione* $F_{a+b} = F_{b+1}F_a + F_bF_{a-1}$

Dimostrazione. Consideriamo la seguente catena di equazioni:

$$\begin{aligned}
F_n &= 1F_{n-1} + F_{n-2} & \\
F_n &= 1(F_{n-2} + F_{n-3}) + F_{n-2} & &= 2F_{n-2} + F_{n-3} \\
F_n &= 2(F_{n-3} + F_{n-4}) + F_{n-3} & &= 3F_{n-3} + 2F_{n-4} \\
F_n &= 3(F_{n-4} + F_{n-5}) + F_{n-4} & &= 5F_{n-4} + 3F_{n-5} \\
&\vdots & &\vdots \\
F_n &= F_{k+1}F_{n-k} + F_kF_{n-k-1} & &\mathit{per} \quad k < n
\end{aligned}$$

Capito il meccanismo, la dimostrazione rigorosa dell'ultima equazione può essere trovata per induzione (esercizio).
Se poi in $F_n = F_{k+1}F_{n-k}+F_kF_{n-k-1}$ effettuiamo le seguenti sostituizioni : $a+b = n$, $k = b$, e quindi per $n - k = a$, allora abbiamo che

$$F_{a+b} = F_{b+1}F_a + F_bF_{a-1}$$

□

Proprietà 1.2.5 (Divisibilità). *Dati gli interi postitivi m, n, si ha che $m|n \Rightarrow F_m|F_n$*

Dimostrazione. Dimostrazione costruttiva. Per ipotesi abbiamo che se $m|n$ allora $\exists\ s \mid n = sm$. Quindi, per sostituzione, la nuova tesi è $F_m|F_{sn}$. La dimostrazione parte dalla seguente catena di equazioni, vista anche nella dimostrazione precedente

$$\begin{aligned} F_{sm} &= 1F_{sm-1} + F_{sm-2} \\ &= 2F_{sm-2} + F_{sm-3} \\ &= 3F_{sm-3} + 2F_{sm-4} \\ &\quad\vdots \\ &= F_{k+1}F_{sm-k} + F_kF_{sm-k-1} \qquad\qquad per \quad k < sm \end{aligned}$$

Posso procedere finché $k = (s-1)m$, quindi

$$\begin{aligned} &\quad\vdots \\ &= F_{(s-1)m+1}F_{sm-(s-1)m} + F_{(s-1)m}F_{sm-(s-1)m-1} \\ &= F_\alpha F_m + F_{(s-1)m}F_\beta \end{aligned}$$

per qualche intero α e β. A questo punto ripetiamo la stessa catena di equazioni per $F_{(s-1)m}$, fermandoci a $k = (s-2)m$:

$$F_{sm} = F_\alpha F_m + (F_{\alpha'}F_m + F_{(s-2)m}F_{\beta'})F_\beta$$

Procedendo in questo modo, cioè ripetendo la catena di equazioni per $F_{(s-h)m}$, finché di volta in volta non si arriva a $k = (s-h-1)m$ per $h = 1, \ldots, s+2$ arriveremo ad una somma di fattori, ciascuno dei quali è moltiplicato per F_m. Raccogliendo il fattore comune si ha:

$$F_{sm} = \delta \cdot F_m$$

□

Proprietà 1.2.6 (Euclide per Fibonacci). *Per la successione di Fibonacci vale un analogo dell'algoritmo di Euclide dato dalla seguente equazione:*

$$MCD(F_m, F_n) = MCD(F_n, F_r)$$

Dove r è il resto della divisione di m per n, cioè $m = qn + r$.

Dimostrazione. Abbiamo subito che:

$$MCD(F_m, F_n) = MCD(F_n, F_{qn+r})$$

Per la proprietà di Scomposizione 1.2.4 vale

$$MCD(F_m, F_n) = MCD(F_n, F_r F_{qn+1} + F_{qn} F_{r-1})$$

Ma $n|nq$, quindi per la proprietà della divisibilità si ha:

$$MCD(F_m, F_n) = MCD(F_n, F_r F_{qn+1})$$

Inoltre, dato che i numeri di Fibonacci successivi sono coprimi ed $F_n|F_{nq}$ abbiamo

$$MCD(F_m, F_n) = MCD(F_n, F_r)$$

□

Concludiamo il paragrafo con una peculiare proprietà:

Proprietà 1.2.7 (MCD per Fibonacci)**.** *Il massimo comun divisore fra due numeri di Fibonacci è ancora un numero di Fibonacci la cui posizione è data dal MCD dei i loro indici.*

Dimostrazione. La tesi può essere riformulata nel seguente modo:

$$MCD(F_i, F_j) = F_{MDC(i,j)}$$

Si applica l'algoritmo di Euclide per $MCD(i, j)$, quindi:

$$MCD(i, j) = MCD(j, r_1) = MCD(r_1, r_2) = ... = MCD(r_n, 0) = r_n$$

Allora dalla proprietà precedente abbiamo

$$MCD(F_i, F_j) = MCD(F_j, F_{r_1}) = ... = MCD(F_{r_n}, F_0) = F_{r_n} = F_{MDC(i,j)}$$

□

Problemi

Problema 1.2.1 (Somma di 10 consecutivi). *Dimostra che la somma di dieci numeri della successione di Fibonacci consecutivi è uguale al settimo numero dei dieci scelti moltiplicato per* 11*:*

$$\sum_{j=n+1}^{n+10} F_j = 11F_{n+7}$$

Problema 1.2.2 (Somma di n consecutivi). *Usando la 1.2.2, dimostra che* $11F_7 + 1 = F_{12}$*, e che la somma di un numero qualsiasi di termini consecutivi è data dalla differenza di due termini della successione, come*

$$\sum_{j=m}^{n} F_j = F_{n+2} - F_{m+2}$$

Problema 1.2.3. *Completa la 1.2.4, dimostrando rigorosamente che*

$$F_n = F_{k+1}F_{n-k} + F_kF_{n-k-1}$$

per $k < n$.

Problema 1.2.4. *La dimostrazione di 1.2.5, è decisamente laboriosa. Trova una dimostrazione alternativa (prova anche per induzione su* s*).*

Problema 1.2.5 (Formula di Cassini). *Dimostra che vale l'identità*

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

detta formula di Cassini. Eventualmente usa la rappresentazione matriciale.

Problema 1.2.6. *Dimostra che vale la seguente generalizzazione della formula di Cassini*

$$F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} = (-1)^{n-1}F_r^2$$

dimostrata da Catalan.

Problema 1.2.7 (Numeri primi nella successione di Fibonacci). *Congettura e dimostra quali posizioni possono occupare i numeri primi nella successione di Fibonacci. Tieni presente che esiste una congettura finora non dimostrata, che afferma che la successione di Fibonacci contiene infiniti numeri primi.*

1.3 Fibonacci e la sezione aurea

Il rapporto aureo è la suddivisione di un segmento di lunghezza l in due segmenti di lunghezza a e b tali che $a + b = l$ e tale che sia soddisfatta la proporzione:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

La misura della lunghezza di a in funzione di b viene ricavata dalla sostituzione di $a = xb$ nelle equazione precedente, per cui otteniamo:

$$\frac{xb+b}{xb} = \frac{xb}{b} \quad \Rightarrow \quad x^2 = x + 1$$

Non può pertanto fare a meno di sbucare fuori la prossima

Definizione 1.3.1. *Si definisce numero aureo il seguente*

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618033989...$$

che coincide con la soluzione dell'equazione di secondo grado:

$$x^2 = x + 1$$

definita equazione generatrice della sezione aurea.

De Moivre (1667-1754) trovò una formula, nota anche come formula di Binet, che consente di trovare l'n-esimo numero della successione di Fibonacci come somma di potenze di numeri irrazionali. Oltre ad essere di per sé sorprendente che il risultato della somma sia un intero e che gli irrazionali in questione coinvolgano la sezione aurea, la dimostrazione ci conduce ad una prima importante generalizzazione:

Proprietà 1.3.1 (Formula di deMoivre)**.** *L'n-esimo termine della successione di Fibonacci è dato da:*

$$F_n = \frac{\varphi^n - (-1/\varphi)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

dove φ è la sezione aurea.

Dimostrazione. Costruttiva:
la seconda uguaglianza $\frac{\varphi^n-(-1/\varphi)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n-(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$ si verifica dal fatto che $-1/\varphi = 1-\varphi$, che è la seconda soluzione dell'equazione generatrice della sezione aurea $x^2 = x+1$.
Mentre possiamo dimostrare la prima equazione sfruttando una particolare generalizzazione della successione di Fibonacci:
moltiplicando ambo i membri dell' equazione generatrice della sezione aurea per x^{n-1}, otteniamo la seguente equazione

$$x^{n+1} = x^n + x^{n-1}$$

che soddisfa per gli esponenti la ricorsione fibonacciana, e ricordando che le sue soluzioni sono φ e $1-\varphi$ otteniamo le seguenti equazioni:

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \varphi^{n-1} \tag{1.1}$$
$$(1-\varphi)^{n+1} = (1-\varphi)^n + (1-\varphi)^{n-1} \tag{1.2}$$

Consideriamo ora le serie geometriche generate dalle precedenti equazioni e date da

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi^i \to \infty$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} (1-\varphi)^i \to 0$$

La prima tende esponenzialmente ad infinito, la seconda tende a zero con lo stesso ordine.
Ricordando che entrambe le successioni soddisfano la ricorsione fibonacciana, possiamo allora definire un tipo di successione di Fibonacci, come combinazione lineare dei rappresentanti delle due successioni:

$$\mathcal{F}_n(a,b) := a\varphi^n + b(1-\varphi)^n$$

Che soddisfa anch'essa la ricorsione fibonacciana; infatti

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{n+1}(a,b) :&= a\varphi^{n+1} + b(1-\varphi)^{n+1}\\ &= a(\varphi^n + \varphi^{n-1}) + b((1-\varphi)^n + (1-\varphi)^{n-1})\\ &= a\varphi^n + b((1-\varphi)^n + a\varphi^{n-1}) + b(1-\varphi)^{n-1}\\ &= \mathcal{F}_n(a,b) + \mathcal{F}_{n-1}(a,b)\end{aligned}$$

Per avere la successione di Fibonacci da $\mathcal{F}$, dobbiamo ancora definire le costanti a e b, in modo da ottenere il passo iniziale $\mathcal{F}_0(a,b) = 0$ e $\mathcal{F}_1(a,b) = 1$. Per $a = 1/\sqrt{5}$ e $b = -1/\sqrt{5}$ si ha proprio

$$\mathcal{F}_0(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$$
$$\mathcal{F}_1(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{\varphi}{\sqrt{5}} - \frac{1-\varphi}{\sqrt{5}} = 1$$

Quindi poiché il passo induttivo e i passi iniziali di $\mathcal{F}_n(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ sono gli stessi di F_n le due successioni coincidono, cioè

$$F_n = \mathcal{F}_n(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$$

e dato che

$$\mathcal{F}_n(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

si ha la tesi.

$\square$

Dalla precedente dimostrazione, possiamo notare cha che la successione $\mathcal{F}_n(a,b)$, ha come caso particolare la successione di Fibonacci per $a = \frac{1}{\sqrt{5}} = -b$. Nell'ottica di spazi vettoriali bidimensionali a coordinate in (a,b), F_n è rappresentata da un punto sulla bisettrice del secondo e quarto quadrante. Per il generico punto della stessa retta, dato da $a = -b$, si ha come passo iniziale $\mathcal{F}_0(a,-a) = 0$ e $\mathcal{F}_1(a,-a) = a(2\varphi - 1)$.
Le precedenti considerazioni ci conducono alle successioni generalizzate di Fibonacci che saranno relativamente approfondite nel prossimo capitolo.

Possiamo ancora osservare (e sarà utile alla fine del capitolo), che

$$F_n = \frac{\varphi^n - (-1/\varphi)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

dove α e β sono le radici del polinomio generatore della sezione aurea.

Concludiamo il paragrafo con il seguente risultato trovato da Keplero ($1571 - 1630$) che trova un'altra interessante correlazione fra la sezione aurea e la successione di Fibonacci.

Proprietà 1.3.2 (Fibonacci e φ)**.** *Il Rapporto fra l' $(n+1)$-esimo termine e l' n-esimo della successione di Fibonacci F_n, all'aumentare di n, tende al rapporto aureo φ.*

Dimostrazione. Possiamo usare la successione ricorsiva $\mathcal{F}_n(a,b)$ definita nella dimostrazione della proprietà precedente.
La tesi può essere riformulata nel seguente modo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

La cui generalizzazione è data da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{F}_{n+1}(a,b)}{\mathcal{F}_n(a,b)} = \varphi$$

Dato che $\mathcal{F}_n(a,b)$ è un caso particolare di F_n, abbiamo la tesi se la dimostriamo per la sua generalizzazione:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{F}_{n+1}(a,b)}{\mathcal{F}_n(a,b)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a\varphi^{n+1} + b(1-\varphi)^{n+1}}{a\varphi^n + b(1-\varphi)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a\varphi + b(1-\varphi)(\frac{1-\varphi}{\varphi})^n}{a + b(\frac{1-\varphi}{\varphi})^n} \\
&= \varphi
\end{aligned}$$

□

Problemi

Problema 1.3.1. *Possiamo riassumere quanto detto nel paragrafo con uno schema:*

$$\begin{tikzcd}
x^2 = x+1 \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow, dotted] & & F_n = \frac{\varphi^n-(-1/\varphi)^n}{\sqrt{5}} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& F_n &
\end{tikzcd}$$

Completalo spiegando il significato delle frecce, cioè cosa mette in relazione il polinomio caratteristico con la formula di De Moivre e la formula di De Moivre con la successione di Fibonacci. Cerca di scoprire il significato della freccia tratteggiata.

Problema 1.3.2. *Il problema precedente può essere generalizzato con il seguente schema:*

$$\begin{tikzcd}
x^2 = mx + n \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow, dotted] & & \mathcal{F}_n(a,b) = a\alpha + b\beta \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& \mathcal{F}_n(a,b) &
\end{tikzcd}$$

Completa anche questo spiegando il significato delle frecce. Considera α e β come le radici del polinomio caratteristico $x^2 - mx + n$.

Problema 1.3.3. *La proprietà 1.3.2 può essere dimostrata direttamente, senza ricorrere alla generalizzazione $\mathcal{F}_{n+1}(a, b)$. Suggerimento:*

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \cdots$$

Problema 1.3.4. *Implementa una funzione per il calcolo di $\mathcal{F}_{n+1}(a, b)$ ed esamina come varia la successione al variare di a e b.*

Problema 1.3.5. *Cosa succede alla formula di De Moivre, se al posto di $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ si pone $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$?*

1.4 Fibonacci dal triangolo di Tartaglia

Mettiamo da parte la nostra ricerca della generalizzata di Fibonacci per divagare su una curiosità: i numeri di Fibonacci possono essere ricavati anche dal triangolo di Tartaglia: infatti la successione delle somma degli elementi che compongono le diagonali del triangolo, è costituita dai numeri di fibonacci.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1\\
&&&&&&&1&&1\\
&&&&&&1&&2&&1\\
&&&&&1&&3&&3&&1\\
&&&&1&&4&&6&&4&&1^*\\
&&&1&&5&&10&&10^*&&(5)&&[1]\\
&&1&&6&&15^*&&(20)&&[15]&&(6)&&[1]\\
&1&&7^*&&(12)&&[35]&&(35)&&[12]&&(7)&&[1]\\
1^*&&(8)&&[28]&&(56)&&[70]&&(56)&&[28]&&(8)&&[1]
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1\\
1\\
2 = 1+1\\
3 = 1 + 2\\
5 = 1 + 3 + 1\\
8 = 1 + 4 + 3\\
13 = 1 + 5 + 6 + 1\\
21 = 1 + 6 + 10 + 4\\
34 = 1+7+15+10+1\\
.\\
.\\
.
\end{array}$$

Dalla precedente osservazione si ottiene la seguente formula per definire i numeri di Fibonacci:

Proprietà 1.4.1 (Formula di Lucas 1876)**.**

$$F_n = \sum_{i=0}^{\llcorner (n-1)/2 \lrcorner} \binom{n-i-1}{i}$$

Dove $\llcorner x \lrcorner$ *chiamata floor function [1] è la funzione da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{Z}$ *che associa ad* x *il più grande intero* $\leq x$*.*

Abbiamo così ricavato un'altra formula per ottenere l'n-esimo numero della successione di Fibonacci.

Problemi

Problema 1.4.1. *Dimostra la formula scoperta da Lucas appena introdotta.*

Problema 1.4.2. *Implementa una funzione per calcolare l'*n*-esimo numero di Fibonacci con la formula scoperta da Lucas.*

Problema 1.4.3. *Nel triangolo di tartaglia considera le file di numeri parallele alle file composte di* 1*. Nella prima fila ci sono i numeri naturali, mentre nella seconda troviamo* $1, 3, 6, 15, 12, 28, \ldots,$ *nella terza* $1, 4, 10, 20, 35, 56, \ldots.$ *Sai scrivere una formula matematica per generare queste successioni? Puoi dare un'occhiata al sito OEIS enciclopedia online di successioni numeriche per confrontare i risultati.*

Problema 1.4.4 (Pitagora vs. Fibonacci)**.** *Qualcuno sostiene che è possibile ricavare le terne pitagoriche dai numeri di Fibonacci. Considera* 4 *numeri consecutivi della successione* $F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}$ *e calcola*

1. *il prodotto dei due estremi:* $F_n F_{n+3}$.
2. *Il doppio prodotto dei due centrali:* $2F_{n+1}F_{n+2}$.
3. *La somma dei quadrati dei due centrali:* $F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2$.

I tre numeri così ottenuti formerebbero una terna pitagorica. Controlla con alcuni esempi che sia effettivamente vero, ed eventualmente cerca una dimostrazione.

1.5 Fibonacci e i Numeri di Lucas

In stretta relazione ai numeri di Fibonacci, ci sono i numeri di Lucas, presentati nella seguente

Definizione 1.5.1. *I numeri di Lucas, dati dalla successione*

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, ...$$

sono definiti ricorsivamente da:

$$\begin{gathered} L_0 = 2 \qquad L_1 = 1 \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \end{gathered}$$

Riportiamo due relazioni fra i numeri di Lucas e i numeri di Fibonacci

Proprietà 1.5.1. *L'n-esimo numero di Lucas è dato dalla somma dell'* $n-1$*-esimo per* $n+1$*-esimo numero di Fibonacci (eventualmente della successione negativa definita come* $L_{-n} = (-1)^{n+1} L_n$*).*

Proprietà 1.5.2. *Per* n *che tende ad infinito, il rapporto fra la successione di Lucas* L_n *e la successione di Fibonacci* F_n *tende a* $\sqrt{5}$.

Le cui dimostrazioni potranno essere lette nel prossimo capitolo. Per il momento dimostriamo la seguente

Proprietà 1.5.3 (Lucas e φ)**.** *Il Rapporto fra l' $(n+1)$-esimo termine e l' n-esimo della successione di Lucas L_n, all'aumentare di n, tende al rapporto aureo φ. Cioè*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}}{L_n}=\varphi=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}$$

Dimostrazione. E' diretta conseguenza della dimostrazione di 1.3.2, infatti la proprietà vale in generale per la successione $\mathcal{F}_n(a,b)$, che coincide con la successione di Lucas, per $a=1$ e $b=1$. $\square$

Da quest'ultima dimostrazione, abbiamo che i numeri di Lucas, sono un caso particolare di $\mathcal{F}_n(a,b)$ per $a=1$ e $b=1$, esattamente come lo sono i numeri di Fibonacci per $a=1/\sqrt{5}$ e $b=-1/\sqrt{5}$. Quindi entrambe le successioni sono figlie di una generalizzazione particolare, il cui studio diventa fondamentale per ragionare sulle proprietà delle successioni.

Esiste un'altra forma generale di $\mathcal{F}_n(a,b)$, che leggeremo nel prossimo capitolo. Prima è utile generalizzare la formula di De Moivre anche per Lucas, che sarà svolta nel prossimo paragrafo.

Problemi

Problema 1.5.1. *In analogia con quanto fatto per la successione di Fibonacci, è possibile sviluppare la successione di Lucas anche in negativo. Prova!*

Problema 1.5.2. *Prima di leggere il prossimo capitolo, prova a dimostrare le proprietà 1.5.1 e 1.5.2 usando $\mathcal{F}_n(a,b)$.*

Problema 1.5.3. *Oltre al limite del rapporto, cos'hanno in comune le successioni di Fibonacci e di Lucas? In particolare cos'hanno in comune le successioni della forma $\mathcal{F}_n(a,b)$?*

1.6 La Formula di De Moivre per Lucas: verso la generalizzazione

La successione di Lucas, oltre ad essere legata alla successione di Fibonacci nella generalizzazione $\mathcal{F}_n(a,b)$ introdotta, possiede una sua formula di De Moivre.

Generalizzando Fibonacci è evidentemente possibile trovare la generalizzazione di tutte le formule correlate che abbiamo introdotto. Per il momento possiamo accontentarci di valutare Lucas come una generalizzazione di Fibonacci e di notare come varia per lei la formula di De Moivre:

Proprietà 1.6.1 (Formula di De Moivre)**.** *I numeri di Fibonacci e di Lucas possono essere definiti esplicitamente usando la formula di Binet*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \qquad L_n = \alpha^n + \beta^n$$

Dove α *e* β *sono le soluzioni dell'equazione generatrice della sezione aurea* $x^2 = x + 1$*, che ricordiamo essere*

$$\alpha = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \beta = 1 - \varphi = -\frac{1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Nel prossimo capitolo affronteremo una ulteriore generalizzazione che ci consentirà di ampliare ancora gli orizzonti.

Problemi

Problema 1.6.1. *Dimostra la formula di De Moivre per la successione di Lucas. Riformula e dimostra De Moivre per le successioni del tipo* $\mathcal{F}_n(a,b)$*.*

Capitolo 2

Successione di Fibonacci generalizzata

2.1 Definizioni principali

Nel capitolo precedente, con l'introduzione di $\mathcal{F}_n(a,b)$ abbiamo già affrontato una generalizzazione primitiva della successione di Fibonacci. Ora proponiamo una più ampia classe di successioni con la seguente

Definizione 2.1.1. *Le successioni generalizzate di Fibonacci $W_n(a,b,h,k)$ sono definite per ricorrenza dalla seguente formula:*

$$\begin{cases} W_0(a,b,h,k) := a \\ W_1(a,b,h,k) := b \\ W_n(a,b,h,k) := hW_{n-1}(a,b,h,k) - kW_{n-2}(a,b,h,k) \end{cases}$$

Osservazione 2.1.1. *Possiamo verificare che la classe di successioni lineari ricorrenti appena definite contiene tutte le altre successioni presentate in questa ricerca, infatti*

La successione di Fibonacci

$$F_n = W_n(0,1,1,-1)$$

Che può anch'essa essere sviluppata in negativo da

$$W_{-n}(0,1,1,-1) = (-1)^{n+1}W_n(0,1,1,-1)$$

I numeri di Lucas

$$L_n = W_n(2, 1, 1, -1)$$

Che possono essere sviluppati in negativo da

$$W_{-n}(2, 1, 1, -1) = (-1)^{n+1} W_n(2, 1, 1, -1)$$

La successione $\mathcal{F}_n(a, b)$

$$\mathcal{F}_n(a, b) = W_n(a + b, a\varphi + b(1 - \varphi), \varphi + (1 - \varphi), \varphi(1 - \varphi))$$

Infatti

$$\mathcal{F}_n(a, b) = (\varphi + (1 - \varphi))\mathcal{F}_{n-1}(a, b) + (-\varphi(1 - \varphi))\mathcal{F}_{n-2}(a, b)$$

Possiamo ricavare ancora una generalizzazione delle successioni di Lucas, sottofamiglia di $W_n(a, b, h, k)$ presentata nella seguente

Definizione 2.1.2. *Si definisce $W_n(2, h, h, k)$ successione generalizzata di Lucas, che sarà indicata con $L_n(h, k)$.*

Problemi

Problema 2.1.1. *E' chiaro che la successione di Fibonacci, così come quella di Lucas, sono casi particolari sia di $\mathcal{F}_n(a, b)$, (rispettivamente $\mathcal{F}_n(1/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$ e $\mathcal{F}_n(1, 1)$), che di $W_n(a, b, h, k)$ (rispettivamente $W_n(2, 1, 1, -1)$ $W_n(0, 1, 1, -1)$). In generale, ogni successione del tipo $\mathcal{F}_n(a', b')$ può essere generata da $W_n(a, b, h, k)$ per opportuni a, b, h, k. Dimostra che*

$$\mathcal{F}_n(a, b) = W_n(a + b, a\varphi + b(1 - \varphi), \varphi + (1 - \varphi), \varphi(1 - \varphi))$$

Cioè che

$$\mathcal{F}_n(a, b) = W_n(a + b, a\varphi + b(1 - \varphi), 1, -1)$$

Problema 2.1.2. *Dal problema precedente, abbiamo che vale la seguente inclusione:*

$$\{\mathcal{F}_n(a', b') \mid a', b' \in \mathbb{N}\} \subseteq \{W_n(a, b, h, k) \mid a, b, h, k \in \mathbb{N}\}$$

Vale anche l'inclusione inversa? Ogni successione del tipo $W_n(a, b, h, k)$ può essere scritta come $\mathcal{F}_n(a', b')$ per una opportuna scelta dei coefficienti?

Problema 2.1.3 (Tribonacci e Tetranacci generalizzate). *Generalizza, come fatto per Fibonacci, anche le successioni di Tribonacci e Tetranacci.*

Problema 2.1.4 (Rappresentazione Matriciale). *Verifica, eventualmente aiutandoti con Sage, che se*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & h \end{bmatrix}$$

Allora

$$A^n = \begin{bmatrix} -kW_{n-1}(0,1,h,k) & W_n(0,1,h,k) \\ -kW_n(0,1,h,k) & W_{n+1}(0,1,h,k) \end{bmatrix}$$

Problema 2.1.5 (Triangolo di Tartaglia generalizzato). *Abbiamo visto che la somma delle diagonali del triangolo di Tartaglia fornivano la successione di Fibonacci. Prova a costruire un triangolo la cui somma delle diagonali fornisca* $W_n(0,1,h,k)$.

2.2 Fibonacci generalizzata, come spazio vettoriale

Sia $\mathbb{K}$ campo, e siano $h, k \in \mathbb{K}$ fissati. L'insieme $W(h,k) = \{W_n(a,b,h,k) \mid a \in \mathbb{K}, b \in \mathbb{K}\}$ considerato congiuntamente con le seguenti operazioni binarie

1. $$\begin{aligned} + : W \times W &\longrightarrow W \\ (W_n(a,b,h,k), W_n(a',b',h,k)) &\longmapsto W_n(a+a', b+b', h, k) \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times W &\longrightarrow W \\ (\lambda, W_n(a,b,h,k)) &\longmapsto W_n(\lambda a, \lambda b, h, k) \end{aligned}$$

definisce uno spazio vettoriale bidimensionale degli elementi di $W(h,k)$ su $\mathbb{K}$ chiamato **spazio vettoriale delle successioni di Fibonacci generalizzate**. Infatti dalle definizioni si verifica facilmente che

$$\begin{gathered} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \qquad \forall \; W_n(a,b,h,k), W_n(a',b',h,k) \in W(h,k) \\ \lambda W_n(a,b,h,k) + \mu W_n(a',b',h,k) = W_n(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', h, k) \end{gathered}$$

Esempio 2.2.1. *Siano* $W_n(2,5,1,-1) = P_n$ *e* $W_n(3,4,1,-1) = Q_n$*, quindi* $P_n = \{2,5,7,12,19,...\}$ *e* $Q_n = \{3,4,7,11,18,...\}$*. Infatti* $P_n + Q_n = W_n(5,9,1,-1) = \{5,9,14,23,37,...\}$*. Ed* $3Q_n = W_n(9,12,1,-1) = \{9,12,21,33,54,...\} = \{3\cdot 3, 3\cdot 4, 3\cdot 7, 3\cdot 11, 3\cdot 18,...\}$*.*

Definizione 2.2.1. *La base standard dello spazio vettoriale delle successioni di Fibonacci* $[W(h,k) : \mathbb{K}]$ *è data da*

$$T_n(h,k) = W_n(1,0,h,k)$$
$$U_n(h,k) = W_n(0,1,h,k)$$

Esempio 2.2.2. *Lucas generalizzata, come combinazione lineare della base:*

$$W_n(2,h,h,k) = \mathcal{V}_n(h,k) = 2T_n(h,k) + hU_n(h,k)$$

Esempio 2.2.3. *Successione generica di valore iniziale* $W_0 = 1$*, come combinazione lineare della base:*

$$W_n(1,x,h,k) = T_n(h,k) + xU_n(h,k)$$

Quest'ultima successione ci sarà utile nel prossimo paragrafo, in cui vengono identificati h e k tramite un particolare polinomio.

Problemi

Problema 2.2.1. *Abbiamo sempre definito* $\mathbb{K}$ *come un campo. Cosa accade alla struttura se è definito come anello? Cosa succede se è un campo finito? Sperimenta con Sage.*

2.3 Polinomio caratteristico

Definizione 2.3.1. *Sia* $\mathbb{K}$ *campo, e sia* $W_n(a,b,h,k)$*, successione generalizzata di Fibonacci ad elementi in* $\mathbb{K}$ *, allora* $x^2 - hx + k$ *è detto polinomio caratteristico di* $W_n(a,b,h,k)$*.*

Osservazione 2.3.1. *Le radici del polinomio caratteristico* α *e* β *sono date da:*

$$\begin{cases} \alpha + \beta = h \\ \alpha\beta = k \end{cases}$$

Infatti per la successione di Fibonacci, abbiamo visto che il polinomio caratteristico è $f(x) = x^2 - x - 1$*, che ha come soluzioni* φ *e* $1 - \varphi$*, e che ha come parametri della sua generalizzata* $h = 1$ *e* $k = -1$*.*

Osservazione 2.3.2. *L'equazione* $x^2 - hx + k = 0$ *verifcata in* α *e* β *può essere moltiplicata per* x *ad entrambi i membri, ed induce quindi la seguente ricorrenza:*

$$\begin{aligned} x^2 &= hx - k \\ x^3 &= hx^2 - kx \\ x^4 &= hx^3 - kx^2 \\ &\vdots \\ x^n &= hx^{n-1} - kx^{n-2} \end{aligned}$$

La cui struttura ricorda la ricorrenza fibonacciana, e infatti sarà chiaro dalla prossima definizione, che le potenze del polinomio caratteristico medesimo sono definite da una successione di Fibonacci generalizzata.

Definizione 2.3.2. *Si definisce successione delle potenze* $X^n := W_n(1, x, h, k) = T_n(h, k) + xU_n(h, k)$

Esempio 2.3.1. *La successione di Fibonacci,* $F_n = W_n(0, 1, 1, -1)$ *ha il polinomio caratteristico* $f(x) = x^2 - x - 1$*, infatti* $-h = -1$*,* $k = -1$*. Le sue radici sono l'ordine di convergenza della successione, e verificano la formula di De Moivre.*

Il polinomio caratteristico chiude la questione aperta in 2.1.2. Infatti l'insieme di successioni $\{\mathcal{F}_n(a', b') \mid a', b' \in \mathbb{K}\}$, sono tutte le successioni delle potenze di φ e $1-\varphi$, quindi è l'insieme delle sole successioni generalizzate ad avere $f(x) = x^2-x-1$ come polinomio caratteristico:

$$\mathcal{F}_n(a, b) = W_n(a + b, a\varphi + b(1 - \varphi), \varphi + (1 + \varphi), \varphi(1 - \varphi))$$

dove $\varphi + (1 + \varphi)$ e $\varphi(1 - \varphi)$, sono proprio la somma e il prodotto delle sue radici, cioè h e k. Abbiamo il risultato

$$\{\mathcal{F}_n(a', b') \mid a', b' \in \mathbb{K}\} \subset \{W_n(a, b, h, k) \mid a, b, h, k \in \mathbb{K}\}$$

Nel prossimo paragrafo ci occuperemo delle successioni di Fibonacci generalizzate e non più di $\mathcal{F}_n$, dato che è un suo sottocaso.

Problemi

Problema 2.3.1. *Dimostra la formula*

$$W_n(a+b, a\alpha + b\beta, \alpha+\beta, -\alpha\beta) = a\alpha^n + b\beta^n$$

Problema 2.3.2. *Trova il polinomio caratteristico per le successioni di Tribonacci e Tetranacci generalizzate.*

Problema 2.3.3. *Dimostra che*

$$W_{n+1}(1, x, h, k) = hx^{n-1} - kx^{n-2}$$

Problema 2.3.4. *Dimostra che*

$$x^n = T_n(h, k) + xU_n(h, k)$$

Problema 2.3.5. *Controlla se ha senso affermare che*

$$W_n(a, b, h, k) = a\alpha + \frac{b - \alpha a}{b - \alpha}(\beta^n - \alpha^n)$$

Problema 2.3.6. *Sia $\mathcal{P}_n(a, b) := a\alpha^n + b\beta^n$ successione generalizzata associata al polinomio $x^2 - (a+b)x + ab$ avente α e β come radici. Dimostra che*

$$\mathcal{P}_n(a, b) = W_n(a+b, a\alpha + b\beta, \alpha+\beta, -\alpha\beta)$$

2.4 Proprietà principali

Il polinomio caratteristico, ed in particolare le sue radici sono utili a trovare rapidamente gli n-esimi termini di delle successioni di Fibonacci generalizzate, grazie alla Formula di Binet già introdotta per la successione di Fibonacci e di Lucas e non ancora dimostrata.

Proprietà 2.4.1 (generalizzazione di 1.6.1 per Lucas)**.** *Sia $L_n(h, k)$ successione generalizzata di Lucas, e siano α ed $\overline{\alpha}$ le radici del polinomio caratteristico ad essa associata. Vale allora la formula:*

$$\alpha^n + \beta^n = L_n(h, k)$$

Dimostrazione. Considero la successione delle potenze n-esime di $\overline{\alpha}$, tendendo conto che $\beta = h - \alpha$:

$$\begin{aligned}\beta^n &= T_n(h,k) + U_n(h,k)\beta \\ &= T_n(h,k) + U_n(h,k)(h-\alpha) \\ &= T_n(h,k) + U_n(h,k)h - U_n(h,k)\alpha\end{aligned}$$

Considero la successione delle potenze ennesime di α

$$\alpha^n = T_n(h,k) + U_n(h,k)\alpha$$

Considero infine la loro somma:

$$\begin{aligned}\alpha^n + \beta^n &= T_n(h,k) + U_n(h,k)\alpha + T_n(h,k) + U_n(h,k)h - U_n(h,k)\alpha \\ &= 2T_n(h,k) + hU_n(h,k) \\ &= L_n(h,k)\end{aligned}$$

□

Esempio 2.4.1. *L'n-esimo numero della successione di Lucas, avente polinomio caratteristico $f(x) = x^2 - hx + k = x^2 - x - 1$, ed avente radici $\alpha = \varphi$ e $\beta = 1 - \varphi$ è dato da $\varphi^n + (1-\varphi)^n$.*

Proprietà 2.4.2 (generalizzazione di 1.6.1 per Fibonacci)**.** *Sia $U_n(h,k)$ secondo vettore della base della successione generalizzata di Fibonacci, definito come $W_n(0,1,h,k)$, e siano α ed β le radici del polinomio caratteristico ad essa associata. Vale allora la formula:*

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = U_n(h,k)$$

Dimostrazione. Richiamando alcuni passi della dimostrazione precedente considero:

$$\begin{aligned}\alpha^n - \beta^n &= T_n(h,k) + U_n(h,k)\alpha - T_n(h,k) - hU_n(h,k) + U_n(h,k)\alpha \\ &= 2U_n(h,k)\alpha - hU_n(h,k) \\ &= (2\alpha - h)U_n(h,k) \\ &= (\alpha - \beta)U_n(h,k)\end{aligned}$$

□

Esempio 2.4.2. *L'n-esimo numero della successione di Fibonacci $F_n = U_n(1,-1)$ avente il polinomio caratteristico $f(x) = x^2 - hx + k = x^2 - x - 1$, avente come radici $\alpha = \varphi$ e $\beta = 1 - \varphi$ è dato da*

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\varphi - (1-\varphi)} \\ &= \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Che verifica infatti la formula di De Moivre presentata in 1.3.1

Si possono dare ora le dimostrazioni omesse nel paragrafo 1.5.

Dimostrazione. (della proprietà 1.5.1) L'n-esimo numero di Lucas è dato dalla somma dell' $n-1$-esimo per $n+1$-esimo numero di Fibonacci (eventualmente della successione negativa), infatti si ha per definizione che

$$\begin{aligned} L_n &:= W_n(2,1,1,-1) \\ F_{n-1} &:= W_{n-1}(0,1,1,-1) \\ F_{n+1} &:= W_{n+1}(0,1,1,-1) \end{aligned}$$

Sfalsando i pedici di F_{n-1} e F_{n+1}, si ottiene

$$\begin{aligned} F_{n-1} &= W_n(1,0,1,-1) \\ F_{n+1} &= W_n(1,1,1,-1) \end{aligned}$$

Usando le operazioni dello spazio vettoriale definito, si ha la tesi:

$$\begin{aligned} L_n &:= W_n(2,1,1,-1) \\ &= W_n(1,0,1,-1) + W_n(1,1,1,-1) \\ &= F_{n-1} + F_{n+1} \end{aligned}$$

□

Dimostrazione. (della proprietà 1.5.2) ll rapporto fra la successione di Lucas e la successione di Fibonacci tende a $\sqrt{5}$ al tendere di n ad ∞, cioè

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{F_n} = \sqrt{5}$$

Infatti dalla formula di Binet per Fibonacci e per Lucas, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{F_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^n+(1-\varphi)^n}{\frac{\varphi^n-(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}}$$
$$= \sqrt{5}$$

□

Come ultimo risultato si propone la generalizzazione della proprietà di divisibilità del paragrafo

Lemma 2.4.1. *Dati gli interi postitivi* m, n, *e i reali* α, β, *si ha che* $m|n \Rightarrow \alpha^m-\beta^m|\alpha^n-\beta^n$.

Dimostrazione. Per ipotesi $\exists\ s \mid n = sm$. Si ha allora la seguente catena di implicazioni

$$\begin{aligned}
\alpha^n-\beta^n &= \alpha^{sm}-\beta^{sm}\\
&= \beta^{sm}([(\frac{\alpha}{\beta})^m]^s-1)\\
&= \beta^{sm}(A^s-1) \qquad\qquad \textit{dove}\ \ A=\frac{\alpha^m}{\beta^m}\\
&= \beta^{sm}(A-1)\sum_{i=1}^{s-1}A^i\\
&= \beta^{s(m-1)}\beta^m(\frac{\alpha^m}{\beta^m}-1)\sum_{i=1}^{s-1}A^i\\
&= \beta^{s(m-1)}(\alpha^m-\beta^m)\sum_{i=1}^{s-1}A^i\\
&= (\alpha^m-\beta^m)\cdot\delta
\end{aligned}$$

□

Proprietà 2.4.3 (Divisibilità generalizzata). *Dati gli interi postitivi* m, n, *si ha che* $m|n \Rightarrow U_m(h,k)|U_n(h,k)$

Dimostrazione. Dalla formula di Binet si ha

$$U_m(h,k)=\frac{\alpha^m-\beta^m}{\alpha-\beta} \qquad\qquad U_n(h,k)=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

La tesi è quindi conseguenza del lemma, per $\overline{\alpha} = \beta$:

$$m|n \Rightarrow \alpha^m - \beta^m | \alpha^n - \beta^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} | \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \Rightarrow U_m(h,k) | U_n(h,k)$$

□

Problemi

Problema 2.4.1. *Generalizza le altre proprietà viste per F_n nel capitolo precedente.*

Problema 2.4.2. *Calcola*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}(h,k)}{U_n(h,k)}$$

Capitolo 3

Implementazioni in Sage

3.1 Il problema di Fibonacci

```
#Fibonacci ricorsivo
#input: num intero positivo
#output: num-esimo numero di fibonacci

def fibo(num):
    if num == 0:
        return 0
    if num == 1:
        return 1
    else:
        return fibo(num-1)+fibo(num-2)


#Lista successione di Fibonacci
#input: num intero positivo
#output:lista da 0 fino a num incluso

def fiboLista(num):
    v=[]
    for i in range(0,num+1):
        v.append(fibo(i))
    return v


#Lista intervallo della successione Fibonacci
```

```
#input: num1, num2 interi positivi
#output: lista da num1 fino ad num2 estremi inclusi

def fiboLista(num1,num2):
    v=[]
    for i in range(num1,num2+1):
        v.append(fibo(i))
    return v
```

3.2 Proprietà principali

```
#Somma elementi di una lista
#input: vett lista di interi
#output: somma degli interi della lista

def sommaOggetti(vett):
    sum = 0;
    for i in range(0, len(vett)):
        sum = sum + vett[i]
    return sum


#Somma elementi della successione Fibonacci
#input: num intero positivo
#output: somma degli elementi della succ di fib fino a num

def fiboSomma(num1):
    return sommaOggetti(fiboLista(num))


#Somma elementi intervallo della successione Fibonacci
#input: num1, num2 interi positivi
#output: somma degli elementi della succ di fib da num1 fino a num2

def fiboSomma(num1,num2):
    return sommaOggetti(fiboLista(num1,num2))


#Somma elementi della successione Fibonacci con formula
```

```
#input: num intero positivo
#output: somma degli elementi della succ di fib fino a num

def fiboSommaFast(num):
    return fibo(num+2) - 1


#Somma elementi intervallo della successione Fibonacci con formula
#input: num1, num2 interi positivi
#output: somma degli elementi della succ di fib da num1 fino a num2

def fiboSommaFast(num1,num2):
    return fibo(num1+2) - fibo(num2+1)
```

3.3 Fibonacci e la sezione aurea

```
#Fibonacci usando deMoivre
#input: num intero positivo
#output: num-esimo numero di fibonacci

def fiboDeMoivre(num):
    phi = (1+sqrt(5))/2
    return floor(n((phi^num - (1-phi)^num)/sqrt(5)))


#Fibonacci prima generalizzata
#input: num intero positivo a, b reali
#output: num-esimo numero della prima generalizzazione

def fiboGen1(num,a,b):
    phi = (1+sqrt(5))/2
    return floor(n( a*phi^num + b*(1-phi)^num ))
```

3.4 Fibonacci dal triangolo di Tartaglia

```
#Fibonacci da Tartaglia
#input: num intero positivo
```

```
#output: num-esimo numero di fibonacci

def fiboTartaglia(num):
    k = var('k')
    return sum(binomial(num-k-1,k), k, 0, floor((num-1)/2))
```

3.5 Fibonacci e i numeri di Lucas

```
#Lucas ricorsivo
#input: num intero positivo
#output: num-esimo numero di lucas

def lucas(num):
    if num == 0:
        return 2
    if num == 1:
        return 1
    else:
        return lucas(num-1) + lucas(num-2)
```

3.6 Fibonacci generalizzata

```
#Fibonacci generalizzato ricorsivo
#input: a, b, h,k num interi positivi
#output: W_num(a,b,h,k)
def fiboGen(a,b,h,k,num):
    if num == 0:
        return a
    if num == 1:
        return b
    else:
        return h*fiboGen(a,b,h,k,num-1)-k*fiboGen(a,b,h,k,num-2)


#Fibonacci generalizzato con matrice
#input: a, b, h,k num interi positivi
```

```
#output: rappresentazione matriciale
def fiboGenMatrice(a,b,h,k,num):
    m=matrix([[0,1],[-k,h]])
    return m^num


#Fibonacci generalizzato con matrice
#input: a, b, h,k num interi positivi
#output: W_num(a,b,h,k) tramite la matrice
def fiboGenM(a,b,h,k,num):
    m=matrix([[0,1],[-k,h]])
    p = m^num
    return p[0,1]


#Primo vettore base T
#input: h,k num interi positivi
#output: T_num(h,k)
def fiboT(h,k,num):
    if num == 0:
        return 1
    if num == 1:
        return 0
    else:
        return h*fiboT(h,k,num-1)-k*fiboT(h,k,num-2)


#Secondo vettore base U
#input: h,k num interi positivi
#output: U_num(h,k)
def fiboU(h,k,num):
    if num == 0:
        return 0
    if num == 1:
        return 1
    else:
        return h*fiboU(h,k,num-1)-k*fiboU(h,k,num-2)


#Fibonacci generalizzato da T e U
```

```
#input: a, b, h,k num interi positivi
#output: W_num(a,b,h,k)
def fiboGenTU(a,b,h,k,num):
        return a*fiboU(h,k,num) + b* fiboU(h,k,num)


#Lucas generalizzato da T e U
#input: h,k num interi positivi
#output: W_num(a,b,h,k)
def lucaGenTU(h,k,num):
        return 2*fiboU(h,k,num) + h*fiboU(h,k,num)


#Successione delle potenze
#input: h,k num interi positivi
#output: W_num(a,b,h,k)
def potGenTU(h,k,num):
    x = var('x')
    return fiboT(h,k,num) + x* fiboU(h,k,num)


#Lucas generalizzato da DeMoivre
#input: a, b, h,k num interi positivi
#output: W_num(a,b,h,k) dalla formula DeMoivre
def lucasGenDeMoivre(h,k,num):
    x = var('x')
    eq = x^2 - h*x + k == 0
    [alfa, beta] = solve([eq] ,x, solution_dict=True)
    return floor(n(alfa[x]^num + beta[x]^num))


#U generalizzato da DeMoivre
#input: a, b, h,k num interi positivi
#output: W_num(a,b,h,k) dalla formula DeMoivre
def fiboGenDeMoivre(h,k,num):
    x = var('x')
    eq = x^2 - h*x + k == 0
    [alfa, beta] = solve([eq] ,x, solution_dict=True)
    return floor(n((alfa[x]^num - beta[x]^num)/(alfa[x] - beta[x])))
```

```
#Fibonacci in Z_n
#input: q,nn
#ouput: lista q numeri Fn mod nn
def fiboMod(q,nn):
    R = IntegerModRing(nn)
    for cont in range(0,q):
        print R(fiboGen(0,1,1,-1,cont))


#Fibonacci generalizzato in Z_n
#input: a,b,h,k,q,nn
#ouput: lista q numeri W_num(a,b,h,k) mod nn
def fiboGenMod(a,b,h,k,q,nn):
    R = IntegerModRing(nn)
    for cont in range(0,q):
        print R(fiboGen(a,b,h,k,cont))
```

Implementazioni in C

Successione di Fibonacci standard

```
/****************************************************
     Successione di fibonacci fino al passo n
****************************************************/

#include <iostream>
#include <stdlib.h>
using namespace std;

int Succ_Fib(int n)
// pre:  n è il passo
// post: ritorna la successione di fib fino ad n
{   if (n == 0) return 0;
    if (n == 1) return 1;
    else return Succ_Fib(n-1) + Succ_Fib(n-2);
}

int main()  {
int cont;

printf("Inserire il passo:   ");
scanf("%d", &cont);

printf("\n");
printf("SUCCESSIONE:   \n\n");

for(int i = 0; i <= cont; i++) {
    printf("valore %d => %d ",i, Succ_Fib(i) );
printf("\n");
```

```
}

return 0;
}
```

Successione di Fibonacci generalizzata

```
/****************************************************
     Successioni generalizzate di fibonacci!
****************************************************/

#include <iostream>
#include <stdlib.h>
using namespace std;

int Succ(int a, int b, int h, int k, int cont)
// pre:  a, b, h, k, interi, cont intero positivo
// post: ritorna la successione di fib generalizzata
{   if (cont == 0) return a;
    if (cont == 1) return b;
    else return h*Succ(a,b,h,k, cont-1) - k*Succ(a,b,h,k, cont-2);
}

int main()  {
  int a, b, h, k, cont;

printf("Inserire l'ordine:   ");
scanf("%d", &cont);
printf("Inserire a:          ");
scanf("%d", &a);
printf("Inserire b:          ");
scanf("%d", &b);
printf("Inserire h:          ");
scanf("%d", &h);
printf("Inserire k:          ");
scanf("%d", &k);

printf("\n");
printf("SUCCESSIONE:   \n\n");
```

```
for(int i = 0; i < cont; i++) {
    printf("valore %d => %d ",i, Succ(a, b, h, k, i) );
printf("\n");
}
return 0;
}
```

Bibliografia

[1] Thomas Koshy, *Elementary number theory*, Accademic Press 2007.

[2] Fernando Corbalan *La sezione aurea, il linguaggio matematico della bellezza*, RBA Italia, coll. Mondo Matematico 2011.

[3] Richard Crandall, Carl Pomerance *Prime Numbers, a computational perspective*, Springer Verlag 2002.

[4] Daniel Shanks *Solved and unsolved problems Number Theory*, AMS Chelsea Publishing , quarta edizione 2000.

[5] `www.itisgiorgi.it/giochi_matematici/fibonacci_sez_aurea.pdf`