Nazario Magnarelli

TRASFORMAZIONI

GEOMETRICHE NEL PIANO

CON ESERCIZI

PREFAZIONE

In questo volumetto sono ripresi sinteticamente alcuni argomenti di Geometria Proiettiva, già trattati per esteso dall' autore in altri suoi lavori (Geometria Proiettiva, Voll. 1 e 2) . Si passa poi alla definizione di omologia , alla esposizione delle sue proprietà e alla sua costruzione grafica. Lo studio delle omologie è approfondito con esercizi svolti di vario genere, che il lettore non può trovare nei testi pubblicati sulla stessa materia nei decenni passati.

Particolare attenzione si è rivolta alla stimolante soluzione di un problema di contenuto inconsueto che, partendo da una proiettività fra il piano improprio e uno proprio, ci permette di trovare l'equazione di un luogo geometrico rappresentato da una superficie F^3 del terzo ordine (pag. 34) .

Altro argomento interessante è la presentazione delle omotetie come caso particolare di omologie aventi il centro proprio e come asse la retta impropria del piano.

Il lavoro termina con alcuni argomenti sulle Trasformazioni Geometriche nel Piano; esse ci consentono di vedere il legame fra le varie forme di Geometria e le proprietà che rimangono invarianti rispetto ad un determinato gruppo di trasformazioni . Si chiarisce così il legame esistente fra Geometria e Teoria dei gruppi, messo in luce dal matematico F. Klein (1849-1925) nel suo Programma di Erlangen (1872) .

Latina, Luglio 2010

Nazario Magnarelli

BIBLIOGRAFIA

1) **L. Campedelli** : Lezioni di Geometria Vol. 1, CEDAM- Padova;

2) **L. Campedelli** : Esercizi di Geometria Proiettiva – CEDAM – 1970;

3) **F. Conforto** : Geometria Descrittiva, Edizioni univ. DOCET – Roma;

4) **E. Martinelli** : Geometria Vol. 2, 1954; Librerie M. Bozzi – Genova;

5) **F. Enriques** : Lezioni di Geometria Proiettiva, ristampa 2000 – Zanichelli;

6) **M. C. Beltrametti** : Geometria A. e Proiettiva, 2002, Boringhieri – TO ;

7) **Dispense O.R.U.R.** : Esercizi di Geometria Descrittiva; Ed. La Goliardica, Roma, 1957;

8) **G. Vaccaro** : Teoria delle curve e superficie; Ed. Veschi – Roma;

9) **N. Magnarelli**: Geometria Proiettiva ; http://digilander.libero.it/santoppe ;

10) **G. Montanari** : Trasformazioni Geometriche nel Piano ; Centro Programmazione Editoriale – Modena. Edizione anno 1997.

INDICE

GEOMETRIA PROIETTIVA

1. Coordinate proiettive nelle forme di prima specie

Consideriamo tre elementi distinti A,B,C di una forma di 1^a specie, es. una punteggiata . Comunque si prenda su di essa un quarto elemento M resta individuato il birapporto

(1) $$\xi = (ABCM) \ .$$

Se k è un parametro in corrispondenza biunivoca algebrica con l'elemento variabile M, dalla (1) si ha il birapporto numerico

(2) $$\xi = (k_1 k_2 k_3 k) = \frac{(k_3 - k_1)(k - k_2)}{(k_3 - k_2)(k - k_1)} \quad , \qquad \text{ossia}$$

(3) $$\xi = \frac{(k_3 - k_1)k - (k_3 - k_1)k_2}{(k_3 - k_2)k - (k_3 - k_2)k_1} \quad .$$

La (3) è una trasformazione lineare fratta non degenere del parametro k ; infatti il suo determinante $\Delta = (k_3 - k_1)(k_3 - k_2)(k_2 - k_1)$ è $\neq 0$ poiché gli elementi A,B,C sono distinti fra loro.

Pertanto ξ, come k, è un parametro in corrispondenza biunivoca algebrica con l'elemento M variabile nella forma considerata.

Questo parametro ξ si dice coordinata proiettiva dell'elemento M della forma considerata rispetto al riferimento proiettivo costituito dagli elementi A,B,C.

Se diamo a k i valori k_1, k_2, k_3 otteniamo rispettivamente le coordinate proiettive dei punti A,B,C.

Dalla (2) si vede che

(4) $$\begin{aligned} &\text{per } k = k_1 \text{ si ha } \xi = \infty, \\ &\text{per } k = k_2 \text{ si ha } \xi = 0, \\ &\text{per } k = k_3 \text{ si ha } \xi = 1 \ . \end{aligned}$$

A causa di questi valori, i punti A,B,C si dicono rispettivamente **elemento infinito, zero** e **unità** del riferimento proiettivo. In particolare, i punti A,B si dicono vertici .

Se la forma considerata è una punteggiata e fissiamo su di essa un riferimento cartesiano Ox, k non è altro che l'ascissa x del punto M della punteggiata e la (3) si può scrivere

(5) $$\xi = \frac{ax + b}{cx + d} \quad , \qquad \text{con} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \ ,$$

o in forma più opportuna

(6) $$\xi = \frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}} \quad , \qquad \text{con} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Spesso è opportuno passare a coordinate omogenee ponendo $\xi = \xi_1/\xi_2$ e $x = x_1/x_2$. La (6) allora diventa

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2} \quad .$$

Si ricava che in forma lineare intera le coordinate proiettive omogenee del punto M sono date dalle due equazioni:

(7) $$\begin{cases} \rho\xi_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \rho\xi_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad .$$

Possiamo tralasciare il fattore moltiplicativo indeterminato ρ, con l'intesa di alterare eventualmente per un conveniente fattore di proporzionalità le coordinate omogenee ξ_1, ξ_2 o le coordinate x_1, x_2. Si ottiene allora

(8) $$\begin{cases} \xi_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \xi_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}, \qquad \text{con} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

E' ovvio che i coefficienti $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ della (8) possono essere alterati anche essi per un comune fattore di proporzionalità non nullo.
Quando si fa uso di coordinate omogenee, gli elementi fondamentali $\infty, 0, 1$ del riferimento proiettivo sono dati dalle coppie di valori (1,0), (0,1), (1,1) o da coppie di numeri ad esse proporzionali .

2. Proiettività tra due forme di prima specie

(F. Conforto; Geom. Descrittiva, pag. 46. Per ulteriori informazioni, vedere il testo Geom. delle Superfici Rigate, Parte terza, Cap. secondo di N. Magnarelli). Si definisce come <u>proiettività</u> (o trasformazione proiettiva) tra due forme di prima specie, distinte o coincidenti, ogni corrispondenza tra gli elementi della prima forma e gli elementi della seconda la quale goda delle due seguenti proprietà:
a) di essere biunivoca;
b) di conservare i birapporti .

La b) vuol dire che il birapporto di quattro elementi qualsiasi della prima forma è uguale al birapporto degli elementi corrispondenti della seconda forma.

Ogni corrispondenza tra due forme di prima specie generabile mediante proie-zioni e sezioni è una proiettività; infatti, essa è biunivoca per natura e conserva i birapporti; anzi, ogni proiettività tra due forme di 1^a specie è generabile mediante proiezioni e sezioni (fig. 1)
Inoltre, una proiettività è perfettamente individuata quando di essa sono date tre coppie di elementi corrispondenti .

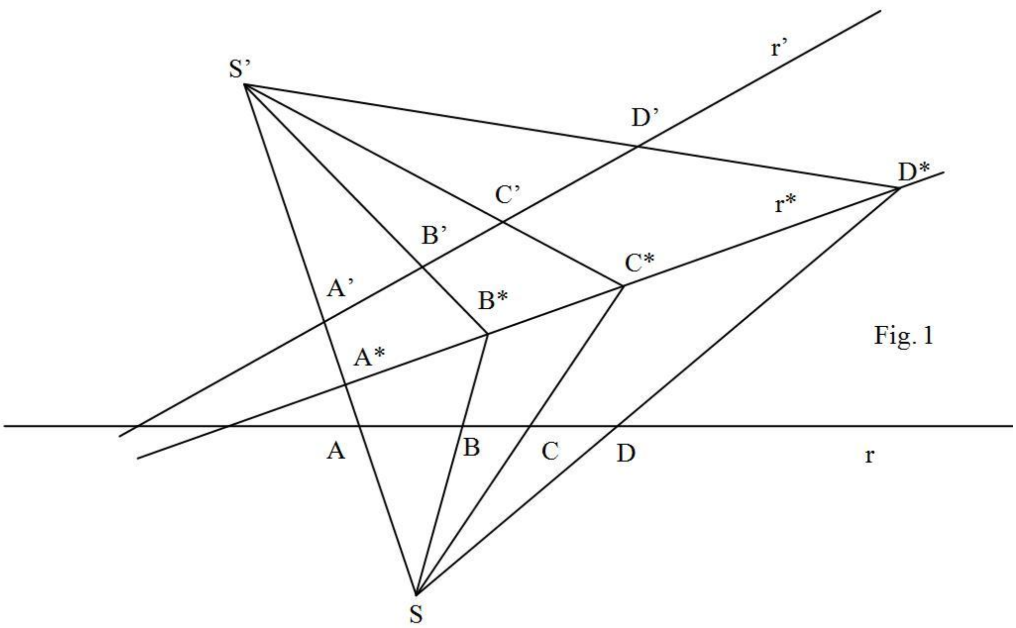


Fig. 1

3. Equazione di una proiettività tra due punteggiate

(F. Conforto; Geom. Descrittiva, pag. 60) Siano r ed r' due punteggiate distinte e supponiamo che fra di esse sia definita una proiettività.
Allora, se A,B,C sono tre punti distinti della retta r e A',B',C' i loro corrispon-denti sulla retta r', la proiettività fa corrispondere ad ogni punto P della r il punto P' della r' per il quale si ha:

(1) $$(ABCP) = (A'B'C'P') \ .$$

Introduciamo un riferimento cartesiano Ox sulla retta r e un riferimento O'x' sulla retta r'. Se indichiamo con a,b,c,x le ascisse dei punti A,B,C,P della punteggiata r e con a',b',c', x' le ascisse dei punti A',B',C',P' dell'altra retta, il birapporto (1) ci fa trovare l'equazione della proiettività:

(2) $$(a,b,c,x) = (a',b',c',x') \ , \ \rightarrow \ \frac{(a,b,c)}{(a,b,x)} = \frac{(a',b',c')}{(a',b',x')} \ , \quad \text{da cui}$$

(3) $$\alpha xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0 \qquad \text{con} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Dalla (3) si ha:

$$x' \cdot (\alpha x + \gamma) = -\beta x - \delta \ , \qquad \rightarrow x' = \frac{-\beta x - \delta}{\alpha x + \gamma} \ , \qquad \text{quindi}$$

(4) $$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}} \ , \qquad \text{con} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

4. Punti uniti di una proiettività fra punteggiate sovrapposte

Se si ha una proiettività fra due punteggiate sovrapposte r ed r' , possiamo fissare su di esse lo stesso riferimento cartesiano Ox e dalle (3), (4) del N. 3 si ricava che l'equazione della proiettività è ancora

(1) $$\alpha xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0 \qquad \text{con} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0 \ ,$$

da cui si ricava

(2) $$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}} \ , \qquad \text{con} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Nel caso di una proiettività fra punteggiate sovrapposte, la condizione necessaria e sufficiente affinché un punto di ascissa x della r e un punto di ascissa x' della r' coincidano evidentemente è:

(2) $$x = x' \ ;$$

Si dirà allora che il punto di ascissa x è unito per la proiettività.

I punti uniti della proiettività si trovano ponendo $x = x'$ nella (1). Si ottiene allora l'equazione di 2^o grado:

(3) $$\alpha x^2 + (\beta + \gamma)x + \delta = 0 \ .$$

Se escludiamo il caso che la (3) sia identicamente soddisfatta, le sue radici possono essere reali e distinte, reali e coincidenti o complesse coniugate. In corrispondenza la proiettività avrà due, uno o nessun punto unito ed essa si dirà **iperbolica**, **parabolica** o **ellittica** .

5. Coordinate proiettive sulla retta

(F. Conforto; Geom. Descrittiva, pag. 258) Nei paragrafi precedenti abbiamo visto che, fissato un qualsiasi riferimento cartesiano sopra una punteggiata r, ogni sostituzione lineare fratta non degenere sulla x, cioè

(1) $$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}} \quad , \qquad \text{con} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad ,$$

rappresenta una proiettività della retta r in sé (o meglio tra la r e una punteggiata r' sovrapposta alla r); in questa proiettività, al punto di ascissa x corrisponde il punto di ascissa x' tratta dalla (1).

Ma la (1) si può anche interpretare come un cambiamento di coordinata, nel senso che ad ogni punto P di ascissa x della punteggiata r non si associa il punto P' di ascissa x' rispetto al riferimento fissato, ma si associa il numero x' tratto dalla (1). In tal modo, ad ogni punto P(x) (proprio o improprio) della r resta associato il numero x' dato dalla (1).
Se in particolare P è il punto improprio della r, la x' che ad esso corrisponde è il valore a_{11}/a_{21} , che si ottiene dividendo numeratore e denominatore della (1) per x e facendo poi tendere x al valore infinito.

Inversamente, fissato un qualsiasi valore per x' (compreso il valore infinito) , risolvendo la (1) rispetto ad x si ha

(2) $$x = \frac{a_{22}x' - a_{12}}{-a_{21}x' + a_{11}} \quad .$$

Resta allora univocamente individuato un valore di x e quindi il punto P di ascissa x rispetto al riferimento dato. Se in particolare x' è infinito, il punto P è il punto di ascissa $-a_{22}/a_{21}$, che è il valore limite di x quando x' tende all'infinito.
Nasce in tal modo una corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta proiettiva r e i valori della variabile x' (incluso il valore infinito); e questa corrispondenza permette di considerare la x' associata ad un punto P della retta come una nuova coordinata. La x' si dirà ascissa proiettiva della punteggiata r .

6. L'ascissa proiettiva di un punto di una retta come birapporto

Così come è stata definita (parag. prec.), l'ascissa proiettiva x' di un punto P di una punteggiata r è legata al riferimento cartesiano, inizialmente considerato sulla retta, dalla relazione

(1) $$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}} \quad , \qquad \text{con} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad ,$$

In realtà è possibile definire la x' a prescindere da questo riferimento.

A tal fine, risolviamo la (1) rispetto a x, quindi

(2) $$x = \frac{a_{22}x' - a_{12}}{-a_{21}x' + a_{11}}$$

e consideriamo i tre punti A_1, A_2, U della retta r ai quali competono rispettivamente i valori $\infty, 0, 1$ della x'. Ricaviamo subito che le ascisse cartesiane di questi tre punti sono rispettivamente:

(1) $$-\frac{a_{22}}{a_{21}} \; , \qquad -\frac{a_{12}}{a_{11}} , \qquad \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21}} \quad .$$

I tre punti A_1, A_2, U sono distinti fra loro. Infatti, se per esempio fossero uguali le prime due ascisse si avrebbe

(2) $$\frac{a_{22}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \quad \rightarrow \quad a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21} = 0 , \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 ,$$

e la considerata sostituzione lineare

(3) $$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}}$$

sarebbe degenere, contro l'ipotesi ammessa.

Sia ora P un punto qualunque della punteggiata r, di ascissa cartesiana x e di ascissa proiettiva x'. Per il birapporto dei quattro punti A_1, A_2, U, P si ha:

(4) $$(A_1A_2UP) = \frac{(A_1A_2U)}{(A_1A_2P)} = \frac{A_1U}{A_2U} \cdot \frac{A_2P}{A_1P} .$$

Passando alle ascisse cartesiane dei quattro punti , date dalle (1), si ha:

(5) $$(A_1A_2UP) = \frac{\dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21}} + \dfrac{a_{22}}{a_{21}}}{\dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21}} + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}} \cdot \frac{x + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}}{x + \dfrac{a_{22}}{a_{21}}} .$$

Fatto qualche calcolo si trova:

(6) $$(A_1A_2UP) = \frac{(a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21}) \cdot a_{11}}{(a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21}) \cdot a_{21}} \cdot \frac{(a_{11}x + a_{12}) \cdot a_{21}}{(a_{21}x + a_{22}) \cdot a_{11}} .$$

Fatte le semplificazioni e ricordando la (3) si ha

(7) $$(A_1A_2UP) = \frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}} = x' .$$

L'ascissa proiettiva x' del punto P variabile sulla r appare cosi come il birap-porto che il punto P forma con i tre punti fissi e distinti A_1, A_2, U.

Ma il birapporto (7) dipende soltanto dai quattro punti A_1, A_2, U, P ed è lo stesso qualunque sia il sistema di ascisse usate per individuare questi punti. Da ciò segue l'asserita indipendenza dell'ascissa proiettiva x' dal riferimento carte-siano inizialmente scelto.

Consideriamo ancora una punteggiata r, fissiamo su di essa un riferimento cartesiano Ox e tre punti distinti A_1, A_2, U, di scisse rispettive a,b,c . Ad ogni punto $P(x)$ della retta possiamo allora associare il numero x', univocamente determinato, dato dal birapporto

(1) $$x' = (A_1A_2UP) = (a, b, c, x) .$$

Sviluppandoli birapporto si trova, come sappiamo, la trasformazione lineare fratta non degenere

(2) $$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}} \quad , \qquad \text{con} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad .$$

Viceversa, se assumiamo arbitrariamente x', esiste ed è unico il punto $P(x)$ per cui si ha la (2). Da questa si ricava

(3) $$x = \frac{a_{22}x' - a_{12}}{-a_{21}x' + a_{11}} \quad .$$

In altre parole, se x è una qualsiasi ascissa cartesiana distesa su una punteggiata r e x' una qualsiasi ascissa proiettiva sulla punteggiata stessa, la x' è legata alla x da una sostituzione lineare non degenere .

7. Valori delle ascisse proiettive dei vertici e del punto unità del riferimento proiettivo

Fissiamo un riferimento proiettivo su una punteggiata r mediante i tre punti distinti A_1, A_2, U, detti vertici e punto unitario del riferimento.
Per le ascisse proiettive di questi tre punti si trova facilmente

(1) $$(A_1A_2UA_1) = \infty \ , \qquad (A_1A_2UA_2) = 0 \, , \qquad (A_1A_2UU) = 1 \, .$$

Consideriamo in particolare il riferimento proiettivo per il quale il punto A_1 cade nel punto improprio della retta r e indichiamo il punto A_2 con O. In tal caso, l'ascissa proiettiva x' di un punto P' della retta r ha l'espressione

(2) $$x' = (A_1A_2UP) = (A_\infty OUP) = (PUOA_\infty) = (PUO) \ , \qquad \text{quindi}$$

(3) $$x' = \frac{PO}{UO} \quad , \qquad \text{ossia} \qquad x' = \frac{OP}{OU} \quad .$$

Si vede così che l'ascissa proiettiva del punto P si riduce all'ascissa cartesiana del punto stesso, quando si assuma il punto A_2 come origine delle ascisse , e A_1 sia il punto improprio della punteggiata. I riferimenti cartesiani sopra una retta sono dunque casi particolari dei riferimenti proiettivi.

8. Involuzioni

Consideriamo ancora una proiettività π fra due punteggiate sovrapposte r ed r'.
Naturalmente dobbiamo fissare su di esse uno stesso riferimento cartesiano. Sia A un punto della retta r e B' il punto della retta r' sovrapposto ad A (fig.2).

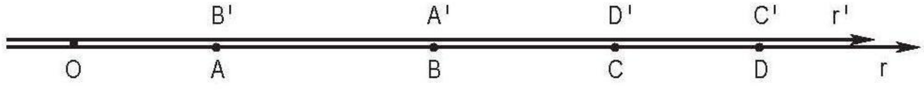


Fig. 2

La proiettività π fa corrispondere al punto A della punteggiata r un punto A' della punteggiata r'.
Ma al punto A' pensato appartenente alla retta r (lo chiameremo B) la proiettività, in generale, non fa corrispondere il punto B' sovrapposto ad A. Qualora ciò si verifichi si dice che i punti A e A' si corrispondono in doppio modo o involutoriamente e si dice anche che la coppia (A, A') è involutoria o che ha carattere involutorio.

Per esempio, nel sostegno comune alle rette r ed r' fissiamo un punto O e ad ogni punto A della retta r facciamo corrispondere il punto A' di r' simmetrico di A rispetto al punto O (fig.3).

Fig. 3

Ovviamente, al punto B di r, coincidente con A', corrisponderà il punto B' di r' sovrapposto ad A.
La corrispondenza che così nasce fra r ed r' è una proiettività nella quale ogni coppia di punti corrispondenti (A, A') è involutoria. Una proiettività in cui tutte le coppie di punti omologhi si corrispondono in doppio modo si dice **involuzione** e due elementi corrispondenti in una involuzione si dicono anche **coniugati**.
Evidentemente, una proiettività involutoria π coincide con la sua inversa π^{-1}.

Teorema.“ Se in una proiettività fra due punteggiate sovrapposte r ed r' due punti distinti A e A' si corrispondono in doppio modo, anche tutte le altre coppie di punti omologhi si corrispondono in doppio modo (fg. 16), cioè la proiettività è una involuzione. In altre parole, una proiettività involutoria π coincide con la sua inversa π^{-1} ”.

Dimostrazione. Sia (A, A') una coppia di punti involutoria; allora, per definizione, al punto B di r sovrapposto al punto A' di r' corrisponde il punto B' di r' sovrapposto al punto A di r.
Sotto tale ipotesi, consideriamo un’altra coppia di punti (C, C') corrispondenti nell’assegnata proiettività.
Vogliamo dimostrare che:

“ se il punto D di r coincide con C', cioè se $D \equiv C'$, allora
anche il punto D' di r' coincide con C, cioè $D' \equiv C$ “.

Partiamo dal birapporto $(ABCD)$.
Poiché le proiettività conservano il valore di un birapporto, si ha:

(1) $$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Ma per ipotesi abbiamo che $A' \equiv B$, $B' \equiv A$ e $C' \equiv D$,

quindi (2) $$(A'B'C'D') = (BADD').$$
Ricordando che il valore di un birapporto non varia scambiando due elementi qualsiasi fra di loro e simultaneamente gli altri due, si ha:

(3) $$(A'B'C'D') = (ABDD').$$

Confrontando le eguaglianze (1), (3), per la proprietà transitiva si ha:
(4) $$(ABCD) = (ABD'D) .$$

La (4) ci dice che deve essere $C \equiv D'$.

Possiamo quindi dire che si ha:

(5) $A \equiv B'$, $B \equiv A'$, $D \equiv C'$, per l’ipotesi iniziale;

(6) $D' \equiv C$, per la dimostrazione svolta .

Sostituendo nel secondo birapporto della (4) si ha:

(7) $$(ABCD)=(B'A'D'C').$$

La (7) ci dice che:
“ Se la coppia di punti (A,A') è involutoria, cioè è formata da punti che si corrispondono in doppio modo, anche la coppia di punti (C,C') è involutoria “.

9. Equazione di una involuzione

Consideriamo una proiettività π fra due punteggiate sovrapposte r ed r', fissando su di esse uno stesso riferimento cartesiano. L’equazione che lega le ascisse x, x' di una coppia di punti corrispondenti è:

(1) $$\alpha xx'+\beta x+\gamma x'+\delta=0, \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0 .$$

Supponiamo che esista una coppia di punti involutoria e siano $\bar{x},\bar{x}'$ le ascisse dei punti. Sostituendo queste ascisse nella (1) si ha:

(2) $$\begin{aligned}&\alpha\bar{x}\cdot\bar{x}'+\beta\bar{x}+\gamma\bar{x}'+\delta=0 ,\\ &\alpha\bar{x}'\cdot\bar{x}+\beta\bar{x}'+\gamma\bar{x}+\delta=0 .\end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro si ha

(*) $$\beta(\bar{x}-\bar{x}')+\gamma(\bar{x}'-\bar{x})=0, \ \rightarrow \beta(\bar{x}-\bar{x}')-\gamma(\bar{x}-\bar{x}')=0,$$
e quindi $$(\beta-\gamma)(\bar{x}-\bar{x}')=0 .$$

Poiché $\bar{x}\neq\bar{x}'$ si ha (3) $\beta=\gamma$.

Ne segue che l’equazione della proiettività diventa

(4) $$\alpha xx'+\beta(x+x')+\delta=0, \quad \text{con} \quad \alpha\delta-\beta^2\neq 0 .$$

La (4) è un’equazione simmetrica in x,x'. Quindi ogni coppia di valori x,x' che la soddisfa dà luogo ad una nuova coppia di valori che soddisfa la (2) se si scambia la x con la x' e la x' con la x.
La (4), quindi, ci permette di dire che se in una proiettività una coppia di punti è involutoria, tutte le coppie di punti omologhi sono involutorie, cioè la proiettività è una involuzione e la (4) è la sua equazione.
Questo fatto è la traduzione analitica della proprietà dimostrata poco sopra con considerazioni di carattere proiettivo.

Vogliamo ora trovare gli elementi uniti di una involuzione; essi sono detti elementi doppi (E. Martinelli, Geometria, pg. 103).
Nel caso di una involuzione fra due punteggiate sovrapposte parleremo più esattamente di punti doppi. Per trovare questi punti doppi basta porre $x=x'$ nell’equazione dell’involuzione. Si ottiene così un’equazione di 2° grado

(5) $$\alpha x^2+2\beta x+\delta=0,$$

che ha due radici.

Il discriminante di questa equazione, $\Delta=\alpha\delta-\beta^2$, è $\neq 0$ e può essere positivo o negativo, ma mai nullo.

Nel primo caso si hanno due punti uniti reali e distinti e l'involuzione si dice iperbolica. Nel secondo caso si hanno due punti immaginari coniugati e l'involuzione si dice ellittica.
Poiché $\Delta = \alpha\delta - \beta^2 \neq 0$ l'involuzione non può avere mai due punti uniti coincidenti, cioè non esistono involuzioni paraboliche.

Diciamo inoltre: se due forme u e u' sono involutorie, data la simmetria del loro comportamento, non è necessario distinguere la u dalla u' e si parla quindi di involuzione sopra una retta o in un fascio di rette o di piani.

10. L'invariante assoluto di una proiettività

Consideriamo una proiettività fra due punteggiate r ed r', distinte o coincidenti, ed in generale tra due forme di prima specie.
Se U e V sono i punti uniti, supposti distinti, della proiettività e se (A, A'), $(B, B'), \ldots, (X, X')$ sono coppie di elementi corrispondenti, si ha:

(1) $$(UVAB) = (UVA'B') = \ldots = (UVXX') = h = \text{costante} .$$

Dimostrazione. Per definizione si ha:

(2) $$(UVAB) = (UVA'B'), \qquad \text{da cui}$$

(*) $$\frac{(UVA)}{(UVB)} = \frac{(UVA')}{(UVB')}, \quad \rightarrow \quad \frac{(UVA)}{(UVA')} = \frac{(UVB)}{(UVB')}, \quad \text{infine}$$

(3) $$(UVAA') = (UVBB') = h .$$

Il numero h si dice **invariante assoluto della proiettività**. Se le due punteggiate sono sovrapposte e la proiettività è una involuzione si ha

(4) $$(UVAA') = (UVA'A) = -1 ,$$

cioè l'invariante assoluto di una proiettività involutoria vale -1: infatti, abbiamo visto che quando in un birapporto i punti sono distinti e il suo valore non varia scambiando i due primi o i due ultimi punti, allora il birapporto è armonico.

Ricordando che i punti che si corrispondono in doppio modo si dicono coniugati, possiamo dire:

" In una involuzione, ogni coppia di elementi coniugati separa armonicamente gli elementi doppi; e viceversa".

Esempio

Consideriamo una involuzione sopra una retta e supponiamo che uno dei due punti doppi sia improprio, per es. $U = U_\infty$ (fig 4).

Fig. 4

Allora, se (A, A') è una coppia di punti coniugati si ha:

(5) $$(U_\infty VAA') = -1, \quad \text{da cui} \quad (A'AVU_\infty) = (A'AV) = -1 .$$

Si ricava $\frac{A'V}{AV} = -1$, da cui (6) $AV = -A'V$,

quindi l'involuzione considerata non è altro che la simmetria rispetto al punto doppi V (L. Campedelli, Geometria I, pg. 224).

11. Il centro e la potenza dell'involuzione sopra una punteggiata

Sopra una punteggiata r si abbia una involuzione ω_o, i cui punti doppi U e V siano a distanza finita (fig.5).

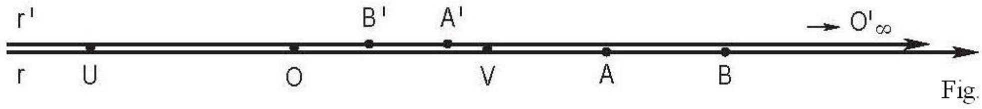


Fig. 5

Allora al punto improprio O'_∞ della r' sovrapposta ad r corrisponde un punto O, detto centro dell'involuzione e che è l'unico punto limite della ω_o; (per il concetto di punto limite vedi N. 13) . Ovviamente per esso si ha:

(*) $(UVOO'_\infty) = -1$, quindi $(UVO) = -1$, $\rightarrow$ $\frac{UO}{VO} = -1$,

ossia (1) $UO = OV$;

la (1) ci dice che " il centro dell'involuzione è il punto medio del segmento finito UV, che ha per estremi i due punti doppi dell'involuzione".

Ora, se (A, A') e (B, B') sono due coppie di elementi coniugati si ha:

(2) $(ABOO'_\infty) = (A'B'O'_\infty O)$;

ma il valore di un birapporto non varia scambiando due elementi qualsiasi fra di loro e simultaneamente gli altri due; possiamo quindi scrivere

(3) $(ABOO'_\infty) = (B'A'OO'_\infty)$.

Ne segue $(ABO) = (A'B'O)$, da cui $\frac{AO}{BO} = \frac{B'O}{A'O}$, e quindi

(4) $AO \cdot A'O = BO \cdot B'O = k$,

cioè: " il prodotto delle distanze orientate di due punti coniugati dal centro dell'involuzione è una costante k. Questo valore prende il nome di potenza della involuzione".

In particolare, se i punti coniugati A, A' coincidono con il punto doppio U e i punti B, B' con il punto doppio V, si ha:

(5) $\overline{OU}^2 = \overline{OV}^2 = k$,

ed è $k > 0$ o $k < 0$ a seconda che l'involuzione ω_o sia iperbolica o ellittica (L. Campedelli, Esercizi di Geometria, pg. 199).

Viceversa, le coppie dei punti per i quali ha luogo la (4) appartengono ad una stessa involuzione di centro O e di potenza k.

Infine, se quattro punti U,V,A e A' formano un gruppo armonico, due di essi, U e V, possono sempre riguardarsi come punti doppi di una involuzione individuata in modo unico e in cui i punti A e A' si corrispondono in doppio modo. Il centro O dell'involuzione corrisponde con il punto medio del segmento UV e per le (4),
(5) si ha:

$$\overline{UO}^2 = \overline{VO}^2 = AO \cdot A'O = -1. \tag{6}$$

La (6) esprime una proprietà caratteristica del gruppo armonico.

12. Problemi di applicazione su proiettività e involuzioni

Consideriamo due punteggiate sovrapposte r ed r', fissiamo su di esse uno stesso riferimento cartesiano e consideriamo due punti U e V di ascisse rispettive 2 e 1.

a) Trovare l'equazione dell'involuzione che ha U e V come punti doppi.
b) Trovare l'equazione della proiettività che ha U e V come punti uniti e nella quale si corrispondano i punti $A(-1)$ e $A'(3)$ (L. Campedelli; Esercizi pag. 212)

Problema a)
L'equazione di una involuzione su una punteggiata è

$$\alpha xx' + \beta(x + x') + \delta = 0, \quad \text{con} \quad \alpha\delta - \beta^2 \neq 0. \tag{7}$$

Poiché α, β, δ sono determinati a meno di un comune coefficiente di proporzionalità, possiamo porre $\alpha = 1$ e scrivere:

$$xx' + \beta(x + x') + \delta = 0. \tag{8}$$

Ponendo prima $x = x' = 2$ e poi $x = x' = 1$ la (8) fornisce il sistema:

$$\begin{cases} 4 + 4\beta + \delta = 0 \\ 1 + 2\beta + \delta = 0 \end{cases}, \quad \to \quad \begin{cases} 4\beta + \delta = -4 \\ 2\beta + \delta = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 4\beta + \delta = -4 \\ -2\beta - \delta = +1 \end{cases}. \tag{9}$$

Si trova subito la soluzione $\beta = -\frac{3}{2}, \quad \delta = 2;$
quindi l'equazione dell'involuzione è

$$2xx' - 3(x + x') + 4 = 0. \tag{10}$$

Problema b).

L'equazione generale di una proiettività è:

$$\alpha xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0, \quad \text{ossia, assumendo } \alpha = 1, \tag{*}$$

$$xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0. \tag{11}$$

Ponendo prima $x = x' = 2$, poi $x = x' = 1$ e infine $x = -1,\ x' = 3$ si ha il sistema di tre equazioni in tre incognite:

(12) $$\begin{cases} 4+2\beta+2\gamma+\delta=0 \\ 1+\beta+\gamma+\delta=0 \\ -3-\beta+3\gamma+\delta=0\ , \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2\beta+2\gamma+\delta=-4 \\ \beta+\gamma+\delta=-1 \\ -\beta+3\gamma+\delta=3\ . \end{cases}$$

Risolvendo con un qualsiasi metodo si trova che il sistema ha la soluzione:

(*) $$\beta=-\frac{5}{2},\quad \gamma=-\frac{1}{2},\quad \delta=2,$$

e quindi l'equazione della proiettività è:

(*) $$xx'-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}x'+2=0,\qquad \text{ossia}$$

(13) $$2xx'-5x-x'+4=0\,.$$

13. Punti limite di due punteggiate proiettive: 1° esempio.

Scrivere l'equazione della proiettività fra due punteggiate distinte r ed r' nella quale ai punti di ascisse $0,1,2$ della r corrispondono rispettivamente, sulla r', i punti di ascisse $-2;0;2/3$ .Trovare le ascisse dei punti limite sulle due punteggiate
(L. Campedelli, Esercizi di Geometria, pg. 210).

Soluzione

Il birapporto di quattro punti della r è uguale al birapporto dei punti corrispondenti della retta r'. Ne segue che le ascisse di due punti omologhi x, x' sono legate dalla relazione

(1) $$(0,1,2,x)=(-2,0,\frac{2}{3},x'),\qquad \text{da cui}$$

(*) $$\frac{(0,1,2)}{(0,1,x)}=\frac{(-2,0,2/3)}{(-2,0,x')},$$

(*) $$\frac{2-0}{2-1}:\frac{x-0}{x-1}=\frac{2/3+2}{2/3-0}:\frac{x'+2}{x'-0}\ ,$$

(*) $$\frac{2(x-1)}{x}=\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{x'}{x'+2},\quad \rightarrow \quad \frac{2(x-1)}{x}=\frac{4x'}{x'+2},$$

(2) $$\frac{2x'}{x'+2}=\frac{x-1}{x}\ .$$

Liberando dai denominatori si ha: $2xx'=(x-1)\cdot(x'+2)$.

Ne segue che l'equazione fra le due punteggiate è:

(3) $$xx'-2x+x'+2=0\,.$$

Vogliamo ora trovare le ascisse dei punti limite J e I' delle due punteggiate. A tale scopo ricaviamo dalla (3) le espressioni di x e x'. Si ha:

(*) $$x(x'-2) = -(x'+2), \qquad \text{da cui}$$

(4) $$x = \frac{2+x'}{2-x'};$$

ma anche $$x'(x+1) = 2x-2, \qquad \text{da cui}$$

(5) $$x' = \frac{2x-2}{x+1}.$$

Dalla (4) possiamo ricavare l'ascissa del punto limite J, cioè l'ascissa del punto della retta r corrispondente al punto improprio J'_∞ della retta r'. Si ha:

(*) $$x_J = \lim_{x'\to\infty} \frac{2+x'}{2-x'} = -1,$$

e quindi (6) $$J \equiv (-1).$$

Analogamente, dalla (5) possiamo ricavare l'ascissa del punto limite I', cioè l'ascissa del punto della retta r', che corrisponde al punto improprio I_∞ della retta r. Si ha:

(*) $$x_{I'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-2}{x+1} = 2,$$

e quindi (6) $$I' \equiv (2).$$

Se ora X, X' è una coppia di punti corrispondenti sulle due punteggiate, il prodotto delle loro distanze dai punti limite situati sulle rispettive rette è costante, cioè:

(7) $$XJ \cdot X'I' = \cos t.$$

Nel nostro caso si ha:

(*) $$XJ = -1-x, \qquad X'I' = 2-x'; \qquad \text{ne segue}$$

(*) $$(-1-x)\cdot(2-x') = \cos t, \qquad \text{e quindi}$$

(8) $$(x+1)\cdot(x'-2) = k.$$

Possiamo ricavare il valore della costante k ricordando che le ascisse di due punti corrispondenti sono $x=0,\ x'=-2$. Sostituendo nella (8) si ha:

(*) $$k = 1\cdot(-2-2), \quad \text{ossia} \quad k=-4.$$

Sostituendo nella (8) si ricava che l'equazione della proiettività è:

(9) $$(x+1)\cdot(x'-2) = -4, \qquad \text{da cui}$$

(3) $$xx'-2x+x'+2 = 0.$$

Si ritrova così l'equazione (3) della proiettività ottenuta attraverso l'eguaglianza dei birapporti di due quaterne di punti corrispondenti.

14. Punti limite di due punteggiate proiettive: 2° esempio

Scrivere l'equazione della proiettività fra due punteggiate distinte r ed r', conoscendo i punti limite $J(3),\ I'(-1)$ e una coppia di punti omologhi $A \equiv (-2)$ e $A' \equiv (+1)$.

Soluzione

Se $X \equiv (x)$ e $X' \equiv (x')$ sono due punti omologhi, ricordando che il prodotto delle distanze dai punti limite delle rette sulle quali essi giacciono è costante, si ha:

(1) $$XJ \cdot X'I' = AJ \cdot A'I'.$$

Nel nostro caso si ha:

(*) $$\begin{aligned} XJ &= 3 - x, \qquad & X'I' &= -1 - x', \\ AJ &= 3 + 2, \qquad & A'I' &= -1 - 1. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (1) si ha:

(*) $$(3 - x)\cdot(-1 - x') = 5\cdot(-2).$$

Scambiando opportunamente segno nei primi due fattori si ha:

(2) $$(x - 3)\cdot(x' + 1) = -10, \qquad \text{ossia}$$

(3) $$xx' + x - 3x' + 7 = 0.$$

La (3) è l'equazione della proiettività richiesta.

15. Problemi sulle involuzioni

Data una retta e fissato sopra di essa un sistema di ascisse, scrivere l'equazione dell'involuzione individuata dalle due coppie di punti coniugati $A(0),\ A'(-1)$ e $B(2),\ B'(3)$ (L. Campedelli, pag. 214)

Soluzione

L'equazione di una involuzione su una punteggiata è

(1) $$axx' + b(x + x') + d = 0, \quad \text{con} \quad ad - b^2 \neq 0.$$

Ponendo prima $x = -1,\ x' = 0$ e poi $x = 2,\ x' = 3$ si ha il sistema

(2) $$\begin{cases} 0 - b + d = 0 \\ 6a + 5b + d = 0. \end{cases}$$

Si ricava $b = d$; e poiché i coefficienti a,b,c sono determinati a meno di un comune fattore di proporzionalità non nullo, possiamo porre $b = d = 1$. Si ricava $a = 1$ e quindi l'involuzione ha l'equazione

(3) $$xx' - x - x' - 1 = 0.$$

Ponendo $x' = x$ la (3) diventa un'equazione di 2° grado che con le sue radici ci dà le ascisse dei punti doppi U, V dell'involuzione. Si ottiene:

(*) $$x^2 - 2x - 1 = 0, \quad \text{da cui}$$

(3) $$U \equiv x_1 = 1 - \sqrt{2}, \qquad V \equiv x_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

Poiché i due punti doppi sono reali, l'involuzione è iperbolica.

Il punto medio del segmento UV ci dà il centro O dell'involuzione; la sua ascissa è:

(*) $$x_O = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1.$$

La potenza dell'involuzione è la costante k data dall'espressione

(*) $$BO \cdot B'O = \overline{OU}^2 = \overline{OV}^2 = k.$$

Con facili calcoli si ricava:

(*) $$k = \overline{OV}^2 = (1 + \sqrt{2} - 1)^2 = 2,$$

oppure $$BO = 1 - 2 = -1, \qquad B'O = 1 - 3 = -2$$

e quindi $$k = BO \cdot B'O = 2 \; .$$

$$x' \cdot (\alpha x + \gamma) = -\beta x - \delta \; , \quad \rightarrow \quad x' = \frac{-\beta x - \delta}{\alpha x + \gamma} \; ,$$

quindi $$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}} \; , \qquad \text{con} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \; .$$

16. Involuzione ortogonale e involuzione assoluta

La corrispondenza che si ottiene associando, in un fascio proprio di rette, ad ogni retta la retta ad essa ortogonale, si chiama **involuzione ortogonale** (o involuzione degli angoli retti) .
Fissato un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, e indicati con m, m' i coefficienti angolari di due rette ortogonali, la corrispondenza risulta rappresentata dall'equazione

(1) $$m \cdot m' + 1 = 0.$$

Tenuto conto che i coefficienti angolari sono particolari coordinate proiettive nel fascio e che la (1) è del tipo

(2) $$\alpha\xi\xi' + \beta(\xi + \xi') + \delta = 0 \qquad \text{con} \quad \alpha\delta - \beta^2 \neq 0 \quad ,$$

si deduce che la corrispondenza definita dalla (1) è in effetti una involuzione .

Se nella (1) poniamo $m = m'$, si trova che le rette doppie dell'involuzione hanno i coefficienti angolari $m = +i$ ed $m = -i$. Cioè le rette doppie dell'involuzione
Ortogonale sono le rette isotrope

(4) $$x + iy = 0 \quad \text{ed} \quad x - iy = 0 .$$

Ciascuna delle due rette isotrope può dunque considerarsi perpendicolare a se stessa; infatti si ha :

(5) $$i \cdot i = i^2 = -1 \quad \text{e così anche} \quad (-i)\cdot(-i) = -1 .$$

Ne segue che le coppie di rette ortogonali in un fascio possono caratterizzarsi come quelle rette che dividono armonicamente le rette isotrope uscenti dal centro del fascio. Illustreremo presto ciò con un esercizio. Vogliamo prima dire che se si interseca l'involuzione ortogonale in un fascio con la retta impropria del piano cui il fascio appartiene, si ottiene quella che si chiama **involuzione assoluta** (o involuzioni delle direzioni ortogonali).

<u>Esercizio</u>

Dato un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, dimostrare che le rette di coefficienti angolari m=2 ed $m' = -1/2$ sono separate armonicamente dalle rette isotrope del fascio di centro O. Infatti si ha:

(6) $$(2,-1/2,i,-i) = \frac{(2,-1/2,i)}{(2,-1/2,-i)} = \frac{i-2}{i+1/2} : \frac{-i-2}{-i+1/2} = \frac{i-2}{(2i+1)/2} : \frac{-i-2}{(-2i+1)/2} =$$

$$= \frac{2(i-2)}{2i+1} : \frac{i+2}{(2i-1)/2} = \frac{2(i-2)}{2i+1} : \frac{2(i+2)}{2i-1} = \frac{\cancel{2}(i-2)}{2i+1} \cdot \frac{2i-1}{\cancel{2}(i+2)} =$$

$$= \frac{(i-2)\cdot(2i-1)}{(2i+1)\cdot(2i-1)} \cdot \frac{2i-1}{(i+2)} = \frac{\cancel{-2} - 5i \cancel{+2}}{-5} \cdot \frac{(2i-1)\cdot(i-2)}{(i+2)\cdot(i-2)} = \frac{5i}{5} \cdot \frac{2i^2 - 4i - i + 2}{-1-4} .$$

Infine $$(2,-1/2,i,-i) = \frac{5i}{5} \cdot \frac{5i}{5} = i^2 = -1 \qquad \text{C.V.D.}$$

17. Formula di Laguerre

La formula che vogliamo dimostrare ha grande importanza nello studio della geometria iperbolica fornito dal modello di F. Klein: ricordiamo che il matematico di Erlagen considera "piano" la regione interna ad una circonferenza .

Dimostrazione

Consideriamo un riferimento cartesiano Oxy e due rette a,b uscenti dall'origine O e le rette isotrope $y = ix$ e $y = -ix$ uscenti anch'esse dal punto O (fig.17-1).

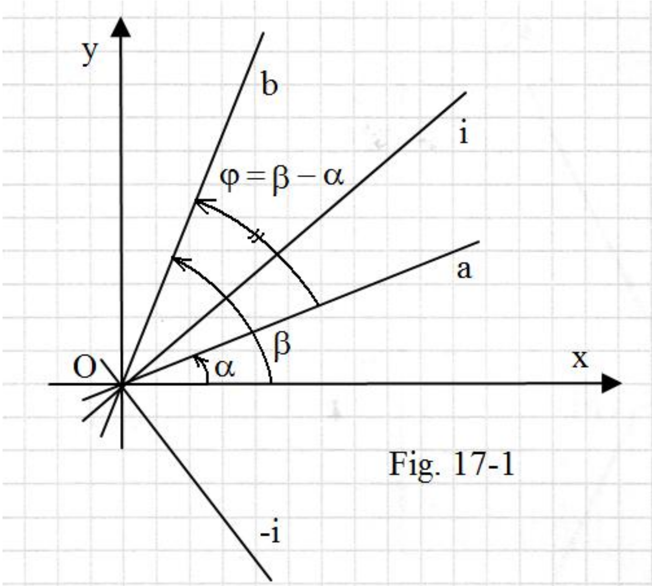


Fig. 17-1

Siano rispettivamente α e β gli angoli che le rette a, b formano con l'asse x e sia $\varphi=\beta-\alpha$ l'angolo formato dalle due rette .
Le equazioni delle quattro rette sono:

(1) $y = x\cdot tg\alpha$, $y = x\cdot tg\beta$, $y = ix$, $y = -ix$.

Consideriamo il birapporto $k=(i,-i,tg\alpha,tg\beta)$ delle quattro rette. Si ha:

(2) $$k=\frac{(i,-i,tg\alpha)}{(i,-i,tg\beta)}=\frac{tg\alpha-i}{tg\alpha+i}:\frac{tg\beta-i}{tg\beta+i}=\frac{tg\alpha-i}{tg\alpha+i}\cdot\frac{tg\beta+i}{tg\beta-i},$$
$$k=\frac{sen\,\alpha-i\cos\alpha}{sen\alpha+i\cos\alpha}\cdot\frac{sen\beta+i\cos\beta}{sen\beta-i\cos\beta}\ .$$

Moltiplicando i termini delle due frazioni per l'unità immaginaria i , e tenendo presente che $i\cdot i=i^2=-1$, si ottiene :

(3) $$k=\frac{\cos\alpha+isen\alpha}{-\cos\alpha+isen\alpha}\cdot\frac{(-\cos\beta+isen\beta)}{\cos\beta+isen\beta}\ .$$

Ricordiamo la formula che ci dà il quoziente di due numeri complessi scritti in forma trigonometrica:

(4) $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1(\cos\alpha+isen\alpha)}{\rho_2(\cos\beta+isen\beta)}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\left[\cos(\alpha-\beta)+isen(\alpha-\beta)\right].$$

Nel nostro caso, riprendendo la (3), si ha:

(5) $$k=(i,-i,tg\alpha,tg\beta)=\frac{\cos\alpha+isen\alpha}{\cos\beta+isen\beta}\cdot\frac{(-1)(\cos\beta+isen\beta)}{(1)(\cos\alpha-isen\alpha)},$$ ossia

(*) $$k=\left[\cos(\alpha-\beta)+isen(\alpha-\beta)\right]\cdot\left[\frac{\cos(-\beta)+isen(-\beta)}{\cos(-\alpha)+isen(-\alpha)}\right],$$ quindi

(*) $$k=\left[\cos(\alpha-\beta)+isen(\alpha-\beta)\right]\cdot\left[\cos(-\beta+\alpha)+isen(-\beta+\alpha)\right],$$ da cui

(*) $$k=\left[\cos(\alpha-\beta)+isen(\alpha-\beta)\right]\cdot\left[\cos(\alpha-\beta)+isen(\alpha-\beta)\right]$$ e quindi

(*) $$k=\cos^2(\alpha-\beta)-sen^2(\alpha-\beta)+2isen(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)\ .$$

Ricordando le formule di duplicazione degli archi si ha:

(6) $$k = \cos 2(\alpha - \beta) + i\,\mathrm{sen}\,2(\alpha - \beta)\,.$$

Posto $\beta - \alpha = \varphi$ si ottiene:

(7) $$k = \cos(-2\varphi) + i\,\mathrm{sen}(-2\varphi) = e^{-2i\varphi}\ .$$

Prendendo i logaritmi naturali di ambo i membri si ottiene

(*) $$-2i\varphi = \ln k\,, \qquad \varphi = -\frac{1}{2i}\ln k\ , \qquad \varphi = \frac{i}{2}\ln k\ .$$

Riassumendo,si ha la formula di Laguerre

(8) $$\varphi = \frac{i}{2}\ln k = \frac{i}{2}\ln(i, -i, \mathrm{tg}\alpha, \mathrm{tg}\beta) = \frac{i}{2}\ln(j_1, j_2, a, b)\,,$$

ove con j_1 e j_2 abbiamo indicato le due rette isotrope .

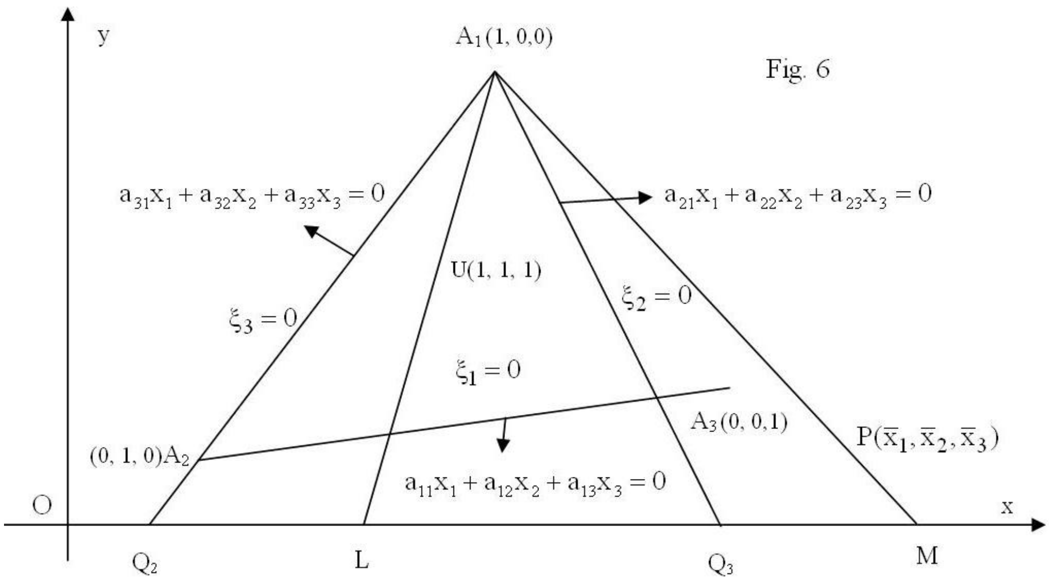
Si ha così la regola

“ L’angolo φ delle due rette a,b è uguale al logaritmo naturale del birapporto formato dalle due rette con le rette isotrope uscenti dal vertice dell’angolo .

Questa formula è notevole perché riconduce la nozione metrica di angolo alla nozione proiettiva di birapporto .

18. Coordinate proiettive omogenee sul piano

Si dice riferimento proiettivo su un piano α un sistema costituito da tre punti non allineati A_1, A_2, A_3, vertici di un triangolo fondamentale, e da un quarto punto U, detto punto unità, che non cada su alcuna delle rette che congiungono due a due i vertici del triangolo (fig. 6).



Fissato un riferimento cartesiano Oxy sul piano α, consideriamo le equazioni cartesiane omogenee delle tre rette

(1) $$\begin{aligned} A_2A_3 &: \ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ A_3A_1 &: \ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ A_1A_2 &: \ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0\ ; \end{aligned}$$

poiché le rette non passano per uno stesso punto, si avrà $\det|a_{ik}| \neq 0$.

Consideriamo ora la trasformazione lineare non degenere

(2) $$\begin{cases} \xi_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \xi_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \xi_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \qquad \text{con } \det|a_{ik}| \neq 0 \;;$$

brevemente (2') $$\xi_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}x_k \qquad \text{con } i = 1,2,3 \;.$$

Come sappiamo, ad ogni terna non tutta nulla (x_1, x_2, x_3) corrisponde un punto P del piano α, mentre ad ogni punto P(x,y) del piano corrisponde una terna (x_1, x_2, x_3) determinata a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo:

(3) $$x = \frac{x_1}{x_3}\ , \qquad y = \frac{x_2}{x_3}\ .$$

Dalle equazioni (2) si ha una conseguenza: terne (x_1, x_2, x_3), che differiscono per un coefficiente di proporzionalità non nullo, hanno come corrispondenti terne (ξ_1, ξ_2, ξ_3), definite anche esse a meno di un coefficiente di proporzionalità.

Facciamo ora corrispondere ad ogni punto $P(x_1, x_2, x_3)$ del piano α la terna (ξ_1, ξ_2, ξ_3), definita a meno di un coefficiente di proporzionalità, tratta dalle (2). Viceversa, ad ogni terna (ξ_1, ξ_2, ξ_3) facciamo corrispondere la terna non tutta nulla (x_1, x_2, x_3), che si ottiene risolvendo il sistema (2) con la regola di Cramer , e quindi un punto P del piano α. Ne segue che le variabili (ξ_1, ξ_2, ξ_3) hanno le stesse proprietà delle coordinate cartesiane omogenee del punto P. Per questo motivo esse si dicono coordinate proiettive omogenee del punto considerato e si scrive $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Così come sono state definite le coordinate proiettive omogenee (ξ_1, ξ_2, ξ_3) di un punto P del piano appaiono legate al sistema di coordinate cartesiane omogenee (x_1, x_2, x_3). E' facile però svincolare la definizione delle ξ_i dal riferimento cartesiano introdotto nel piano; a tal fine faremo vedere che esse si possono esprimere per mezzo di birapporti di quattro rette dei fasci di centri A_1, A_2 e A_3.

Tenendo presente le (2), le rette (1) appaiono come il luogo dei punti del piano α che in coordinate proiettive omogenee hanno le equazioni

(4) $$A_2A_3:\ \xi_1 = 0, \qquad A_3A_1:\ \xi_2 = 0, \qquad A_1A_2:\ \xi_3 = 0.$$

Il punto A_1, comune alle rette $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$, ha quindi ha le coordinate $A_1(1,0,0)$.
Si trova così che i tre vertici del triangolo fondamentale hanno le coordinate (fig. 1):

(5) $$A_1(1,0,0), \qquad A_2(0,1,0), \qquad A_3(0,0,1)\ .$$

Il punto U di coordinate proiettive omogenee (1,1,1) non appartiene ad alcuna delle rette $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ e viene detto **punto unitario**.

Ovviamente, affinché il punto U, di coordinate cartesiane omogenee (e_1, e_2, e_3), abbia le coordinate proiettive $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1$ è necessario che si abbia

(*) $$1 = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + a_{i3}e_3, \qquad \text{con } i = 1,2,3 \ .$$

Consideriamo ora il fascio di rette di centro A_1, che in coordinate cartesiane omogenee ha l'equazione

(6) $$\lambda(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \mu(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) = 0 \ .$$

Affinché tale retta passi per il generico punto di coordinate cartesiane omogenee $P(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ dovrà essere

(*) $$\lambda(a_{21}\overline{x}_1 + a_{22}\overline{x}_2 + a_{23}\overline{x}_3) + \mu(a_{31}\overline{x}_1 + a_{32}\overline{x}_2 + a_{33}\overline{x}_3) = 0 \ .$$

Si ricava la soluzione

(7) $$\lambda = a_{31}\overline{x}_1 + a_{32}\overline{x}_2 + a_{33}\overline{x}_3 \ , \qquad \mu = -(a_{21}\overline{x}_1 + a_{22}\overline{x}_2 + a_{23}\overline{x}_3) \ .$$

Ma dalle equazioni (2) della trasformazione lineare si ricava

(8) $$a_{31}\overline{x}_1 + a_{32}\overline{x}_2 + a_{33}\overline{x}_3 = \overline{\xi}_3 \qquad \text{e} \qquad a_{21}\overline{x}_1 + a_{22}\overline{x}_2 + a_{23}\overline{x}_3 = \overline{\xi}_2 \ .$$

Confrontando le relazioni (7), (8) si ha

(9) $$\lambda = \overline{\xi}_3 \ , \qquad \mu = -\overline{\xi}_2 \ .$$

Con questi valori, l'equazione (6) della retta A_1P diventa:

(10) $$A_1P: \quad \overline{\xi}_3(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) - \overline{\xi}_2(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) = 0 \ .$$

Per avere l'equazione cartesiana della retta A_1U basterà porre nella (10) $\overline{\xi}_3 = \overline{\xi}_2 = 1$ e così si ricava

(11) $$A_1U: \quad (a_{21} - a_{31})x_1 + (a_{22} - a_{32})x_2 + (a_{23} - a_{33})x_3 = 0 \ .$$

Consideriamo ora, nel riferimento $Ox_1x_2x_3$, le rette

(*) $$\begin{aligned} A_1A_2: &\qquad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \\ A_1A_3: &\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \ , \end{aligned}$$

e le rette A_1U e A_1P, e siano rispettivamente Q_2, Q_3, M ed L i loro punti di intersezione con l'asse x $(x_2 = 0)$ del riferimento considerato.

Troviamo le coordinate cartesiane non omogenee del punto M. Ponendo nella (10) $x_2 = 0$ si ha:

(*) $$\overline{\xi}_3(a_{21}x_1 + a_{23}x_3) - \overline{\xi}_2(a_{31}x_1 + a_{33}x_3) = 0 \ , \qquad \text{ossia}$$

(*) $$x_1 \ \ a_{21}\overline{\xi}_3 - a_{31}\overline{\xi}_2 \ \ - x_3 \ \ a_{33}\overline{\xi}_2 - a_{23}\overline{\xi}_3 \ \ = 0 \ , \qquad \text{da cui}$$

(12) $$M \rightarrow \quad \frac{x_1}{x_3}=\frac{a_{33}\bar{\xi}_2-a_{23}\bar{\xi}_3}{a_{21}\bar{\xi}_3-a_{31}\bar{\xi}_2} \; .$$

Per le coord. cartesiane non omogenee del punto Q_2 poniamo nella (10) $\bar{\xi}_3=0$ e $x_2=0$. Si ha:

(13) $$\frac{x_1}{x_3}=-\frac{a_{33}}{a_{31}} .$$

Per le coord. cartesiane non omogenee del punto Q_3 poniamo nella (10) $\bar{\xi}_3=0$ e $x_2=0$. Si ha:

(13’) $$\frac{x_1}{x_3}=-\frac{a_{23}}{a_{21}} \; .$$

Per le coord. cartesiane non omogenee del punto L poniamo nella (11) $x_2=0$. Si ha:

(13’’) $$\frac{x_1}{x_3}=\frac{a_{33}-a_{23}}{a_{21}-a_{31}} \; .$$

Ricordando che il birapporto di quattro semirette condotte da uno stesso punto rimane invariato per operazioni di proiezione e sezione, si ha:

(14) $$A_1(A_2A_3UP)=(Q_2Q_3LM) .$$

Esprimendo il secondo birapporto per mezzo di due rapporti semplici si ha:

(15) $$A_1(A_2A_3UP)=(Q_2Q_3LM)=\frac{(Q_2Q_3L)}{(Q_2Q_3M)}=\frac{Q_2L}{Q_3L}\cdot\frac{Q_3M}{Q_2M} \; .$$

Passiamo alle ascisse dei punti Q_2,Q_3,L,M e sviluppiamo separatamente i due birapporti. Si ha:

(*) $$\frac{Q_2L}{Q_3L}=\frac{\dfrac{a_{33}-a_{23}}{a_{21}-a_{31}}+\dfrac{a_{33}}{a_{31}}}{\dfrac{a_{33}-a_{23}}{a_{21}-a_{31}}+\dfrac{a_{23}}{a_{21}}}=\frac{\dfrac{\cancel{a_{31}a_{33}}-a_{31}a_{23}+a_{33}a_{21}-\cancel{a_{33}a_{31}}}{a_{31}(\cancel{a_{21}-a_{31}})}}{\dfrac{a_{21}a_{33}-\cancel{a_{21}a_{23}}+\cancel{a_{23}a_{21}}-a_{23}a_{31}}{a_{31}(\cancel{a_{21}-a_{31}})}} \; ,$$

(16) $$\frac{Q_2L}{Q_3L}=\frac{a_{21}(\cancel{a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}})}{a_{31}(\cancel{a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}})}=\frac{a_{21}}{a_{31}} \; .$$

(*) $$\frac{Q_3M}{Q_2M}=\frac{\dfrac{a_{33}\bar{\xi}_2-a_{23}\bar{\xi}_3}{a_{21}\bar{\xi}_3-a_{31}\bar{\xi}_2}+\dfrac{a_{23}}{a_{21}}}{\dfrac{a_{33}\bar{\xi}_2-a_{23}\bar{\xi}_3}{a_{21}\bar{\xi}_3-a_{31}\bar{\xi}_2}+\dfrac{a_{33}}{a_{31}}} \; ,$$

(*) $$\frac{Q_3M}{Q_2M}=\frac{\dfrac{a_{21}a_{33}\bar{\xi}_2-\cancel{a_{21}a_{23}\bar{\xi}_3}+\cancel{a_{21}a_{23}\bar{\xi}_3}-a_{23}a_{31}\bar{\xi}_2}{a_{21}(\cancel{a_{21}\bar{\xi}_3-a_{31}\bar{\xi}_2})}}{\dfrac{\cancel{a_{31}a_{33}\bar{\xi}_2}-a_{31}a_{23}\bar{\xi}_3+a_{33}a_{21}\bar{\xi}_3-\cancel{a_{33}a_{31}\bar{\xi}_2}}{a_{31}(\cancel{a_{21}\bar{\xi}_3-a_{31}\bar{\xi}_2})}} \; ,$$

(17) $$\frac{Q_3M}{Q_2M} = \frac{a_{31}\bar{\xi}_2(\cancel{a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}})}{a_{21}\bar{\xi}_3(\cancel{a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}})} = \frac{a_{31}\bar{\xi}_2}{a_{21}\bar{\xi}_3} \; .$$

Sostituendo i valori (16), (17) nel birapporto (15) si ha

(*) $$A_1(A_2A_3UP) = \frac{a_{21}}{a_{31}} \cdot \frac{a_{31}\bar{\xi}_2}{a_{21}\bar{\xi}_3} \; , \qquad \text{quindi}$$

(18) $$A_1(A_2A_3UP) = \frac{\bar{\xi}_2}{\bar{\xi}_3} \; .$$

Con procedimenti analoghi di calcolo, si ricava:

(19) $$A_2(A_3A_1UP) = \frac{\bar{\xi}_3}{\bar{\xi}_1} \; , \qquad \text{da cui} \qquad A_2(A_1A_3UP) = \frac{\bar{\xi}_1}{\bar{\xi}_3} \; ,$$

(20) $$A_3(A_1A_2UP) = \frac{\bar{\xi}_1}{\bar{\xi}_2} \; .$$

Abbiamo così trovato un significato geometrico per il rapporto di due qualsiasi coordinate proiettive omogenee del punto $P(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$ indipendentemente dal riferimento cartesiano introdotto all'inizio. Indicheremo il riferimento proiettivo con la scrittura $RP(A_1A_2A_3U)$.

Le quantità $\bar{\xi}_1/\bar{\xi}_3$, $\bar{\xi}_2/\bar{\xi}_3$, si dicono coordinate proiettive non omogenee del punto P.

<u>RIASSUNTO</u> Se in un piano α introduciamo un sistema di coordinate cartesiane omogenee $O\,x_1x_2x_3$, tre arbitrari punti non allineati A_1, A_2, A_3 , individuano le rette di equazioni

(21) $$\begin{aligned} A_2A_3 &: \; a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ A_3A_1 &: \; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \qquad \text{con} \;\; \det|a_{ik}| \neq 0 \; . \\ A_1A_2 &: \; a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \; , \end{aligned}$$

Possiamo allora definire per i punti del piano un sistema di coordinate proiettive omogenee (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , legate alle precedenti mediante le relazioni

(22) $$\begin{cases} \xi_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \xi_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \xi_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \; , \end{cases} \qquad \text{con} \;\; \det|a_{ik}| \neq 0 \; ,$$

Si è visto che, introducendo un quarto punto U non giacente sui lati del triangolo fondamentale , le coordinate proiettive (ξ_1, ξ_2, ξ_3) di un generico punto P del piano sono espresse dai birapporti

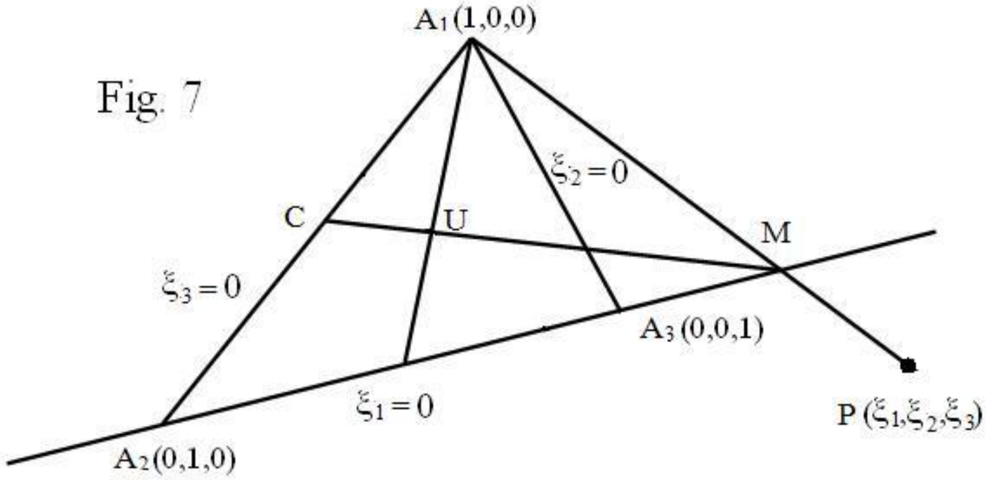
(23) $$A_1(A_2A_3UP) = \frac{\xi_2}{\xi_3} \; , \quad A_2(A_3A_1UP) = \frac{\xi_3}{\xi_1} \; , \quad A_3(A_1A_2UP) = \frac{\xi_1}{\xi_2} \; .$$

I tre rapporti $\frac{\xi_2}{\xi_3}, \frac{\xi_3}{\xi_1}, \frac{\xi_1}{\xi_2}$ permettono di definire ξ_1, ξ_2, ξ_3 a meno di un comune coefficiente di proporzionalità non nullo; essi, infatti, non sono indipendenti perché sono legati dalla relazione

* $\frac{\xi_2}{\xi_3} \cdot \frac{\xi_3}{\xi_1} \cdot \frac{\xi_1}{\xi_2} = 1$. Terne fra loro proporzionali individuano quindi un medesimo punto del piano; con questo procedimento è quindi possibile stabilire sul piano un sistema di coordinate proiettive.

Partiamo ora dal rif. proiettivo e dalla definizione (23) di coordinate proiettive, e facciamo vedere che le rette $A_2 A_3$, A_3A_1, $A_1 A_2$ hanno rispettivamente le equazioni $\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 0,\ \xi_3 = 0$.

Infatti, consideriamo un punto della retta $A_2 A_3$, es. il punto M, e dal punto A_2 proiettiamo i punti A_3, A_1, U, M sulla retta MU, che interseca in C la retta A_1A_2: otteniamo rispettivamente i punti M, C, U, M (fig. 7) .



Per la conservazione dei birapporti si ha:

$$\frac{\xi_3}{\xi_1} = A_2(A_3A_1UM) = (MCUM) = \frac{(MCU)}{(MCM)} ,$$

$$\frac{\xi_3}{\xi_1} = \frac{MU}{CU} \cdot \frac{CM}{MM} = \infty , \qquad \text{da cui} \qquad \xi_1 = 0 .$$

Si ricava così che, in coordinate proiettive, la retta A_2A_3 ha l'equazione $\xi_1 = 0$.

Con procedimenti analoghi si ricava che le rette $A_3 A_1$ e A_1A_2 hanno rispettivamente le equazioni

$$\xi_2 = 0, \qquad \xi_3 = 0 .$$

Abbiamo così ritrovato le equazioni dei lati del triangolo fondamentale in coordinate proiettive, seguendo un altro procedimento .

19. Valore del birapporto $A_3(A_1A_2UM)$ di un riferimento proiettivo e dei birapporti analoghi

Fissiamo su un piano α un riferimento proiettivo costituito da tre punti non allineati A_1, A_2, A_3, vertici di un triangolo detto **fondamentale**, e da un quarto punto U, detto punto unità, che non cada su alcuna delle tre rette che uniscono a due a due i vertici del triangolo (vedi fig. 7, N. 18) .

Fissiamo anche sul piano un riferimento cartesiano Oxy. Le equazioni dei tre lati del triangolo sono:

$$(1) \qquad \begin{array}{l} A_2A_3: \\ A_2A_3: \\ A_2A_3: \end{array} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \ , \end{cases} \qquad \text{con} \ \det|a_{ik}| \neq 0 \ .$$

Ora, siano (e_1, e_2, e_3) le coordinate cartesiane omogenee del punto unità U del riferimento proiettivo. Poiché U non sta sopra alcuna delle rette del sistema (1), sostituendo in esse e_1, e_2, e_3 alle variabili x_1, x_2, x_3, i primi membri delle equazioni assumono valori non nulli. Allora, alterando eventualmente i coefficienti di ciascuna delle (1) per un eventuale fattore di proporzionalità non nullo, si ottiene:

$$(2) \qquad \begin{array}{l} a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3 = 1 \\ a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3 = 1 \\ a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3 = 1 \ . \end{array}$$

Tornando ai lati del triangolo fondamentale, consideriamo il fascio di rette di centro A_3 e individuato dalle rette A_3A_2 e A_3A_1. La sua equazione è

$$(3) \qquad \lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \mu(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0 \ .$$

Posto $k = \mu/\lambda$, al variare del parametro k otteniamo tutte le rette del fascio.

Consideriamo anche il birapporto delle rette che dal punto A_3 proiettano i punti A_1, A_2, U, M, cioè il birapporto

$$(4) \qquad A_3(A_1A_2UM) .$$

Per calcolare questo birapporto basta trovare i valori di k che corrispondono rispettivamente alle rette A_3A_1, A_3A_2, A_3U e A_3M.

Ora, per $k = 0$ e $k = \infty$ si hanno le rette A_3A_1 e A_3A_2 .

Per $k = -1$ si ha la retta:

$$(5) \qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \ ,$$

e questa è la retta A_3U, essendo essa soddisfatta dalle coordinate (e_1, e_2, e_3) del punto unità U.

Infine, troviamo il valore di k corrispondente alla retta A_3M, ossia al punto M di coordinate cartesiane omogenee A_3M. Si ha:

$$(6) \qquad a_{11}\overline{x}_1 + a_{12}\overline{x}_2 + a_{13}\overline{x}_3 + k(a_{21}\overline{x}_1 + a_{22}\overline{x}_2 + a_{23}\overline{x}_3) = 0 \ ,$$

da cui

$$(7) \qquad k_M = -\frac{a_{11}\overline{x}_1 + a_{12}\overline{x}_2 + a_{13}\overline{x}_3}{a_{21}\overline{x}_1 + a_{22}\overline{x}_2 + a_{23}\overline{x}_3} \ .$$

Possiamo ora calcolare il valore numerico del birapporto $A_3(A_1A_2UM)$. Si ha:

$$(8) \qquad A_3(A_1A_2UM) = (0, \infty, -1, k_M) .$$

Poiché il valore di un birapporto non cambia scambiando due elementi qualsiasi fra di loro e simultaneamente gli altri due, possiamo scrivere:

$$(9) \qquad A_3(A_1A_2UM) = (-1, k_M, 0, \infty) = (-1, k_M, 0) = \frac{0+1}{0-k_M} = -\frac{1}{k_M} \ .$$

Sostituendo nella (7) si ha:

$$(10) \qquad A_3(A_1A_2UM) = -\frac{1}{k_M} = +\frac{a_{21}\overline{x}_1 + a_{22}\overline{x}_2 + a_{23}\overline{x}_3}{a_{11}\overline{x}_1 + a_{12}\overline{x}_2 + a_{13}\overline{x}_3} \ .$$

Similmente si procede per trovare i valori dei birapporti analoghi .

20. Equazione di una retta in un riferimento proiettivo

Consideriamo su un piano α un riferimento proiettivo costituito dal triangolo fondamentale $A_1A_2A_3$ e dal punto unità U. Fissiamo ora sul piano un riferimento cartesiano Oxy. Le equazioni che legano le coordinate proiettive ξ_1, ξ_2, ξ_3 di un punto alle coordinate omogenee x_1, x_2, x_3 sono:

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \xi_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \xi_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \qquad \text{con } \det|a_{ik}| \neq 0 \ .$$

Le formule che nella geometria piana esprimono, in coordinate cartesiane, le relazioni di appartenenza tra punto e rette sono valide anche in coordinate proiettive.

Facciamo vedere ciò con un esempio.
Sia (2) $\qquad ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$
l'equazione di una retta nel riferimento $Ox_1x_2x_3$. Ricaviamo le variabili x_1, x_2, x_3 dalle (1) e sostituiamo nella (2). Si ottiene

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 = a'_{11}\xi_1 + a'_{21}\xi_2 + a'_{31}\xi_3 \\ x_2 = a'_{12}\xi_1 + a'_{22}\xi_2 + a'_{32}\xi_3 \\ x_3 = a'_{13}\xi_1 + a'_{23}\xi_2 + a'_{33}\xi_3 \end{cases} \qquad \text{con } a'_{hk} = \frac{A_{hk}}{A} \ ,$$

ove A_{hk} è il complemento algebrico dell'elemento a_{hk} e a'_{hk} è l'elemento reciproco di a_{hk} .

Sostituendo le (3) nella (2) si ha:

$$(4) \qquad \begin{aligned} & a \cdot (a'_{11}\xi_1 + a'_{21}\xi_2 + a'_{31}\xi_3) + b \cdot (a'_{12}\xi_1 + a'_{22}\xi_2 + a'_{32}\xi_3) + \\ & + c \cdot (a'_{13}\xi_1 + a'_{23}\xi_2 + a'_{33}\xi_3) = 0 \end{aligned} \ ,$$

da cui

$$(5) \qquad \begin{aligned} & \xi_1 \cdot (a'_{11}a + a'_{12}b + a'_{13}c) + \xi_2 \cdot (a'_{21}a + a'_{22}b + a'_{23}c) + \\ & + \xi_3 \cdot (a'_{31}a + a'_{32}b + a'_{33}c) = 0 \end{aligned} \ .$$

Indicando con α, β, γ le espressioni entro parentesi tonde, si ottiene così la retta di equazione

(6) $$\alpha\xi_1+\beta\xi_2+c\xi_3=0\ .$$

Viceversa, data una equazione della forma (6), che nel riferimento proiettivo rappresenta una retta, sostituendo in essa le ξ_i con le espressioni date dalle (1) si ottiene una equazione lineare del tipo

(7) $$cx_1+dx_2+ex_3=0\ ,$$

che nel riferimento $Ox_1x_2x_3$ rappresenta una retta .

In un riferimento proiettivo sussistono molte relazioni già trovate in un riferimento di coordinate cartesiane omogenee.

Per esempio, le equazioni parametriche della retta passante per i punti $P'(\xi_1',\xi_2',\xi_3')$ e $P''(\xi_1'',\xi_2'',\xi_3'')$ sono:

(8) $$\xi_1=\lambda\xi_1'+\mu\xi_1''\ ,\qquad \xi_2=\lambda\xi_2'+\mu\xi_2''\ ,\qquad \xi_3=\lambda\xi_3'+\mu\xi_3''\ .$$

Analogamente, il fascio di rette di centro A_3 , individuato dalle rette $\xi_1=0$ e $\xi_2=0$, ha l'equazione

(9) $$\lambda\xi_1+\mu\xi_2=0\ ,\quad \text{o anche}\quad \xi_1+k\xi_2=0\ .$$

21. Problema notevole di Geometria Proiettiva

Risolvere il seguente problema di Geometria Proiettiva. Esso è tratto dal libro del prof. G. Vaccaro : Curve e Superfici, pag 100 – Ed. Veschi e la sua soluzione è lasciata allo studioso.

Nello spazio riferito ad un sistema cartesiano ortogonale monometrico O(x,y,z) si considerino il piano $z=0$ e il piano improprio.

Scrivere le equazioni della proiettività tra questi due piani che all'origine O, al punto improprio dell'asse x, al punto improprio dell'asse y e al punto U(1,1,0) del piano $z=0$, fa corrispondere ordinatamente sul piano improprio i seguenti elementi:

il punto improprio dell'asse delle z, il punto improprio dell'asse delle x, il punto improprio dell'asse delle y e il punto improprio U' di coordinate cartesiane omogenee $(1,-1,1,0)$.

Se P_∞' è il corrispondente di un punto P del piano $z=0$, nella detta proiettività, si consideri la retta $r: PP_\infty'$ e il piano α per l'origine O e ortogonale alla retta r.

Scrivere l'equazione del luogo – che risulta una superficie F^3 del terzo ordine – descritto dal punto M comune alla retta r ed al piano α, al variare di P nel piano $z=0$.

Soluzione

Un punto proprio P del piano $z=0$ ha coordinate omogenee $P(x_1,x_2,0,x_4)$ e nel piano stesso ha le coordinate $P(x_1,x_2,x_4)$ rispetto al sistema di coordinate indotto da quello dello spazio. Ne segue che l'origine O, il punto improprio X_∞ dell'asse x,

il punto improprio Y_∞ dell'asse y, e il punto proprio $U(1,1,0)$ del piano $z=0$ hanno, rispetto al sistema di coordinate indotto da quello dello spazio, le coordinate seguenti:

(1) $$O(0,0,1)\ ,\quad X_\infty(1,0,0)\ ,\quad Y_\infty(0,1,0)\ ,\quad U(1,1,1)\ .$$

(Notare: nel nostro caso, il punto U(1,1,0) non è il punto improprio della retta $x-y+k=0$ giacente sul piano xy, ma è un punto proprio dello spazio che giace sul piano $z=0$).

Analogamente, un punto Q del piano improprio $x_4=0$ ha le sue coordinate omogenee spaziali $Q(\ell,m,n,0)$, mentre le sue coordinate omogenee indotte nel piano improprio da quelle dello spazio sono $Q(\ell,m,n)$.

In questo piano improprio dello spazio, il punto improprio dell'asse z, il punto improprio dell'asse x, il punto improprio dell'asse y e il punto improprio $U'(1,-1,1,0)$ hanno rispettivamente le coordinate

(2) $$Z'_\infty(0,0,1)\ ,\quad X'_\infty(1,0,0)\ ,\quad Y'_\infty(0,1,0)\ ,\quad U'_\infty(1,-1,1)\ .$$

Facendo riferimento ai due sistemi di coordinate omogenee nei due piani considerati, la proiettività fa corrispondere le seguenti coppie di punti:

(3) $$\begin{cases} O(0,0,1)\to Z'_\infty(0,0,1), & X_\infty(1,0,0)\to X'_\infty(1,0,0), \\ Y_\infty(0,1,0)\to Y'_\infty(0,1,0), & U(1,1,1)\ \to U'_\infty(1,-1,1)\ . \end{cases}$$

Generalizzando, possiamo dire che si hanno quattro terne di parametri corrispondenti del tipo

(4) $$(x_1,x_2,x_4)\to(\ell,m,n)\ .$$

Ora, le equazioni della più generale proiettività fra due punti corrispondenti dei due piani considerati sono

(5) $$\begin{cases} \rho\ell = a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{14}x_4\ , \\ \rho m = a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{24}x_4\ , \\ \rho n = a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{34}x_4\ . \end{cases}$$

Nel nostro caso, la corrispondenza fra le quattro coppie di punti corrispondenti date dalle (1) dà luogo al sistema

(6) $$\begin{cases} 0 = 0+0+a_{14} & \\ 0 = 0+0+a_{24} & \leftarrow \text{ per } O(0,0,1)\to Z'_\infty(0,0,1) \\ \rho_1 = 0+0+a_{34} & \\ \rho_2 = a_{11}+0+0 & \\ 0 = a_{21}+0+0 & \leftarrow \text{ per } X_\infty(1,0,0)\to X'_\infty(1,0,0) \\ 0 = a_{31}+0+0 & \\ 0 = 0+a_{12}+0 & \\ \rho_3 = 0+a_{22}+0 & \leftarrow \text{ per } Y_\infty(0,1,0)\to Y'_\infty(0,1,0) \\ 0 = 0+a_{32}+0 & \\ \rho_4 = a_{11}+a_{12}+a_{14} & \\ -\rho_4 = a_{21}+a_{22}+a_{24} & \leftarrow \text{ per } U(1,1,1)\to U'_\infty(1,-1,1) \\ \rho_4 = a_{31}+a_{32}+a_{34}\ . & \end{cases}$$

Si vede subito che alcuni coefficienti del sistema sono nulli :

$$a_{14}=a_{24}=0\ ,\qquad a_{21}=a_{31}=0\ ,\qquad a_{12}=a_{32}=0\ .$$

Tenendo conto di questi coefficienti nulli, si ha il sistema più semplice

(7) $$\begin{cases} a_{34}=\rho_1=\rho_4, \quad a_{11}=\rho_2=\rho_4, \\ a_{22}=\rho_3=-\rho_4\ . \end{cases}$$

Poiché i coefficienti a_{ik} sono determinati a meno di un comune fattore di proporzionalità non nullo, possiamo porre $a_{34}=1$.

Si ricava :

$$\rho_4 = \rho_1 = \rho_2 = 1, \quad \rho_3 = -1 \tag{8}$$
$$a_{34} = 1, \quad a_{11} = 1, \quad a_{22} = -1 \ .$$

Raccogliendo i risultati, i coefficienti a_{ik} del sistema (5) hanno i valori dati dal seguente prospetto:

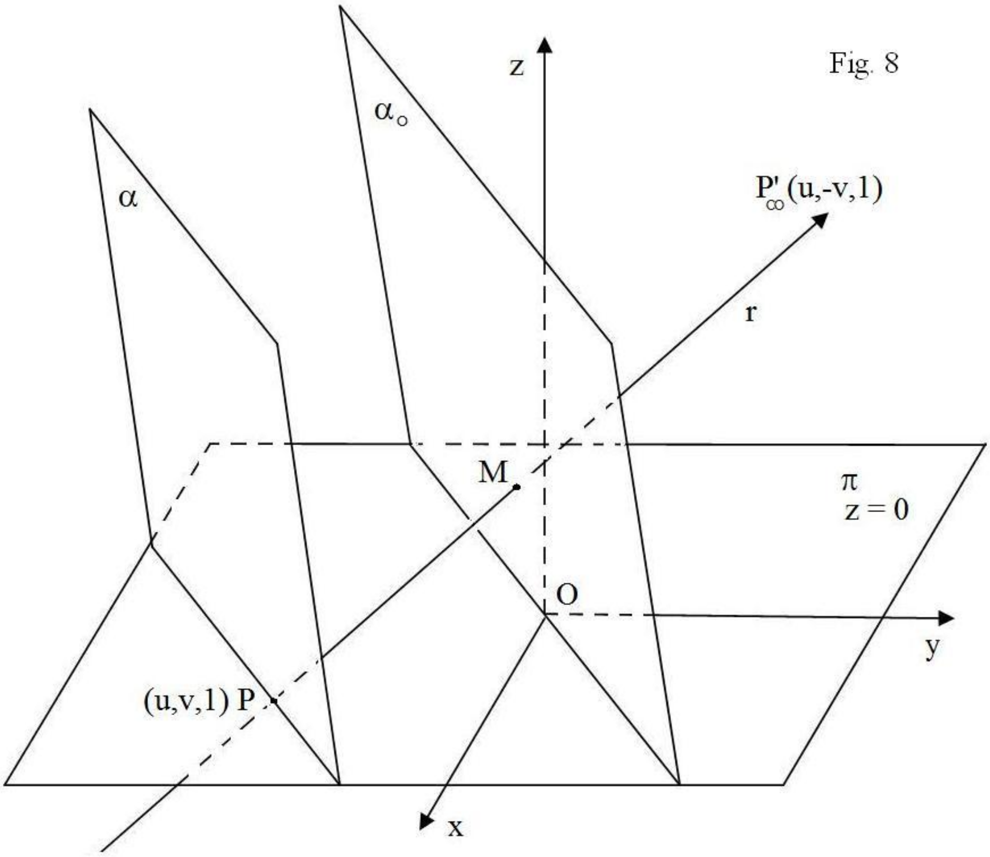
$$\begin{array}{lll} a_{11} = 1 & a_{12} = 0 & a_{14} = 0 \\ a_{21} = 0 & a_{22} = -1 & a_{24} = 0 \\ a_{31} = 0 & a_{32} = 0 & a_{34} = 1 \ . \end{array} \tag{9}$$

Dalla tabella (9) si ricava che le equazioni della nostra proiettività sono:

$$(10) \qquad \begin{cases} \rho\ell = x_1 \\ \rho m = -x_2 \\ \rho n = x_4 \ , \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad (11) \qquad \begin{cases} \ell = x_1 \\ m = -x_2 \\ n = x_4 \ . \end{cases}$$

Nel passare dal sistema (10) al sistema (11) si è tenuto conto che i coefficienti ℓ, m, n sono determinati a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo e quindi possiamo dare il valore 1 al fattore ρ .

Consideriamo ora un punto proprio P del piano $z = 0$; le sue coordinate omogenee nel sistema di coordinate indotto saranno $P(u, v, 1)$. Le precedenti relazioni (11) ci dicono che il punto P'_∞ ad esso corrispondente nella proiettività ha le coordinate $P'_\infty(u, -v, 1)$.



La retta $r: PP'_\infty$ ha i parametri direttori $u, -v, 1$ e quindi le sue equazioni parametriche sono date dal sistema

(12) $$x = ut + u \ , \qquad y = -vt + v \, , \qquad z = t + 1 \ .$$

Il generico piano α perpendicolare alla retta r ha l'equazione

$$\alpha: \ ux - vy + z + k = 0 \ .$$

Il piano α_0 ad esso parallelo e passante per l'origine O ha l'equazione

(13) $$\alpha_0 : \ \ ux - vy + z = 0 \ .$$

Sia M il punto di intersezione fra la retta r e il piano α_0 (fig. 8) .

Le sue coordinate sono date dal sistema:

(14) $$\begin{cases} x = ut + u, \quad y = -vt + v, \quad z = t \\ ux - vy + z = 0. \end{cases}$$

Eliminando i parametri u, v, t fra le quattro equazioni del sistema (14) si ottiene la superficie descritta dal punto M , al variare del punto P sul piano $z = 0$.
Infatti, sostituendo $t = z$ nelle prime due equazioni si ha:

$$\begin{cases} x = uz + u \\ y = -vz + v \end{cases} , \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x = u(1+z) \\ y = v(1-z) \end{cases} .$$

Si ricava : (15) $u = \dfrac{x}{1+z}$, $v = \dfrac{y}{1-z}$.

Sostituendo le (15) nell'equazione $ux - vy + z = 0$ del piano α_o si ha:

$$\frac{x^2}{1+z} - \frac{y^2}{1-z} + z = 0 \ , \qquad \text{da cui}$$

(16) $$x^2(1-z) - y^2(1+z) + z(1-z^2) = 0 \ .$$

Come si vede, il luogo descritto dal punto M è una superficie F^3 del terzo ordine. L'origine O(0,0,0) è un punto semplice avente come piano tangente il piano $z = 0$.

A conclusione del problema, vogliamo fare una opportuna precisazione: il punto U(1,1,0), di cui parla il testo del quesito, non è il punto improprio della retta $x - y + k = 0$ giacente sul piano xy, ma è un determinato punto proprio dello spazio che giace sul piano $z = 0$. Nel riferimento (x_1, x_2, x_4) esso ha le coordinate U(1,1,1) .

La traccia della soluzione di questo interessante problema ci è stata suggerita dal Prof. Tomaso Millevoi, del Dipartimento Matematico dell'Università di Padova .

OMOGRAFIE

22. Definizione di omografia tra due piani

(F. Conforto; Geom. Descrittiva , pag. 267). Si dice che fra due piani punteggiati π e π', distinti o coincidenti, è definita una omografia, o anche che i due piani sono fra loro omografici, se fra essi intercorre una relazione tale che:

induce una corrispondenza biunivoca tra i punti dei due piani;
induce una corrispondenza biunivoca fra la totalità delle rette del piano π e la totalità delle rette di π';
la relazione è tale che la corrispondenza induce una proiettività su ogni coppia di rette corrispondenti .

La proprietà b) implica che, se un punto P appartiene alla retta r, il suo corrispondente P' deve appartenere alla retta r' corrispondente della r su π'. In altre parole le omografie conservano le relazioni di appartenenza fra punto e retta.

L'esistenza di omografie fra due piani π e π' è dimostrata dal fatto che si può sempre, ed in infiniti modi, passare da π a π', con un seguito di proiezioni e sezioni. In altre parole, **ogni omografia è generabile mediante proiezioni e sezioni** .

23. Equazioni di una omografia tra due piani sovrapposti

(F. Conforto; Geometria Descrittiva, pag. 286) . Siano π e π' due piani sovrapposti ed x_1, x_2, x_3 e ξ_1, ξ_2, ξ_3 due sistemi di coordinate proiettive omogenee distese rispettivamente su π e π' . In particolare le x_1, x_2, x_3 possono essere anche coordinate cartesiane omogenee. Supponiamo inoltre che fra le coordinate x_h e ξ_h di punti corrispondenti intercorrano le relazioni

$$(1) \qquad T: \begin{cases} \rho\xi_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho\xi_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho\xi_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \ , \end{cases} \quad \text{con} \quad |A| = \det|a_{ik}| \neq 0$$

e il coefficiente di proporzionalità $\rho \neq 0$.

Vogliamo dimostrare che la trasformazione T rappresenta una omografia tra i piani π e π' Infatti:

a) la T , come è evidente, dà luogo ad una corrispondenza biunivoca fra i punti di π e di π';

b) la T induce una corrispondenza biunivoca fra la totalità delle rette di π e la totalità delle rette di π' .
Infatti sia

$$(2) \qquad v_1\xi_1 + v_2\xi_2 + v_3\xi_3 = 0$$

una retta qualunque di π' .
Sostituendo le (1) nella (2) si avrà:

$$v_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + v_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \\ + v_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) = 0 \ ;$$

infine (3) $\qquad u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, dove

(4) $$\begin{cases} bu_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 \\ bu_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 \\ bu_3 = a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3 \end{cases}$$

essendo b un coefficiente di proporzionalità non nullo.

Si conclude che i punti della retta (2) del piano π' sono i trasformati, per la T, dei punti della retta di equazione (3) del piano π.

Inversamente, se è data a priori la retta (3), dalle (1) possiamo ricavare con le formule di Cramer le x_1, x_2, x_3. Sostituendo poi nella (3) si ritrova la retta (2) del piano π'.
Si conclude che la trasformazione T induce una corrispondenza biunivoca tra la totalità delle rette del piano π e la totalità delle rette del piano π'.

c) Infine, facciamo vedere che la T induce una proiettività fra rette corrispondenti.
Infatti, previo un eventuale cambiamento di coordinate proiettive sulle x e sulle ξ, si potrà sempre supporre che le due rette corrispondenti nella T abbiano le equazioni $x_1 = 0$ e $\xi_1 = 0$.

Nelle equazioni (1) sarà allora $a_{12} = a_{13} = 0$ e le ultime due equazioni della trasformazione (1) si scriveranno, sulla retta $x_1 = 0$, nel modo seguente :

(5) $$\begin{cases} \rho\xi_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho\xi_3 = a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} .$$

Ora x_2, x_3 e ξ_2, ξ_3 rappresentano rispettivamente ascisse proiettive sulle rette $x_1 = 0$ e $\xi_1 = 0$.

D'altra parte, nella nostra ipotesi si ha:

(6) $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Ma allora le (5) rappresentano una proiettività tra la $x_1 = 0$ e la $\xi_1 = 0$.
La corrispondenza T soddisfa in tal modo alla definizione di omografia .

Inversamente, si può dimostrare che ogni omografia fra due piani distinti o coincidenti si può sempre rappresentare con una sostituzione lineare non degenere tra le coordinate proiettive omogenee di due riferimenti.

24. Omologia piana: genesi spaziale
(E. Martinelli; Geom. Descrittiva, pag. 136) . Si dice **omologia** la corrispondenza che nasce fra due piani sovrapposti $\pi \equiv \pi'$ quando si proiettano su di essi i punti di un altro piano π_o da due punti distinti dello spazio S ed S', purché questi non giacciano su π e π_o (Fig. 24-1).

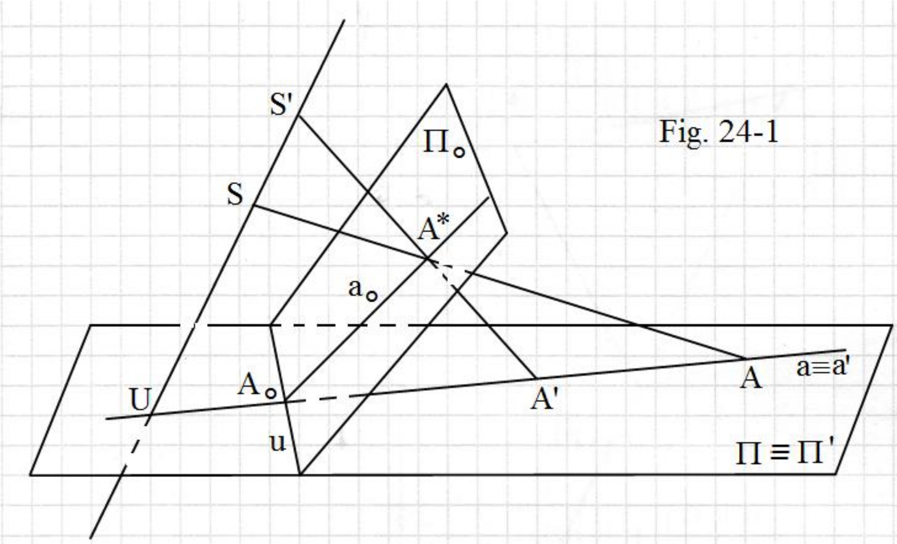


Fig. 24-1

La retta u comune a π e a π_o si dice asse dell'omologia, mentre il punto U, intersezione del piano π con la retta SS' che unisce i due centri , si dice centro . Se il centro U cade sull'asse, si ha una omologia speciale .

Ogni omologia si può generare in tal modo.

La costruzione indicata ci dice che punti corrispondenti A e A' sono allineati con il centro U e che rette corrispondenti si intersecano sull'asse .

La costruzione ci dice anche che l'omologia è una particolare omografia: essa, infatti, si può costruire mediante operazioni di proiezione e sezione.

Teorema fondamentale dell'omologia (E. Martinelli; Geometria II, pag. 140)

Esiste una e una sola omologia della quale siano dati a piacere il centro U, l'asse u e due elementi corrispondenti, e cioè o due punti A e A' allineati con u , o due rette a, a' che si incontrano sull'asse u.

Dati due punti corrispondenti A, A' , la fig. 24·2 ci mostra come si può trovare il corrispondente di un altro punto B . Essa ci mostra anche che rette corrispondenti si intersecano sull'asse u.

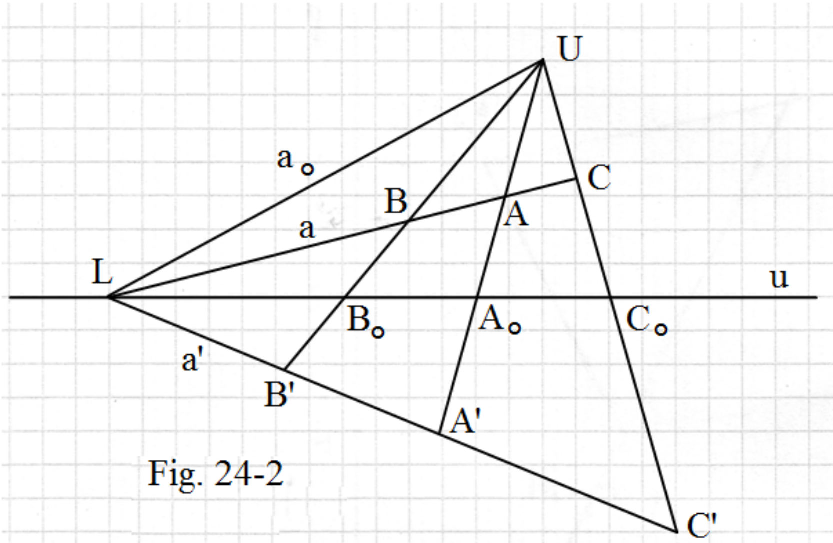


Fig. 24-2

Un'omologia generale subordina su ciascuna retta UA una proiettività iperbolica che ha come punti uniti U e il punto A_o, intersezione delle rette UA e u. Quindi la retta UA_o è unita, ma non è luogo di punti uniti.

Una omologia speciale,invece, subordina su ciascuna retta UA una proiettività parabolica , con l'unico punto unito in U : infatti un'omologia speciale non ammette punti uniti fuori dell'asse u .

Torniamo ad una omologia generale e siano (A,A') , (B,B') due coppie di elementi corrispondenti . Se A_o, B_o sono le intersezioni delle rette AA', BB' con l'asse u (fig. 24.2) , sono uguali i birapporti

(1) $$(AA'UA_o) = (BB'UB_o) = k ,$$

perché le due quaterne di punti sono prospettive rispetto al centro L .

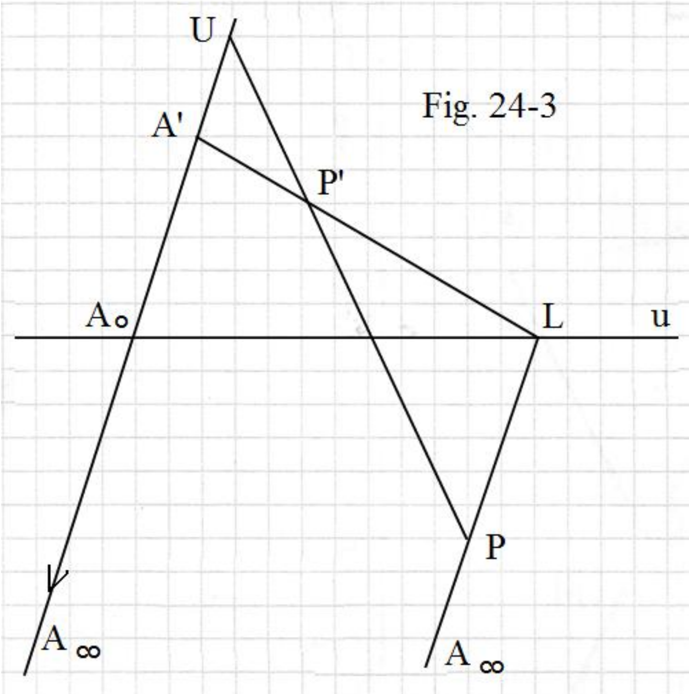
Si ha dunque:
" In una omologia generale è costante il birapporto $(AA'UA_o) = k$ di due punti corrispondenti A,A', del centro U e del punto A_o comune alla retta AA' e all'asse u. Questo valore costante si chiama caratteristica dell'omologia " .

Nella generica omologia indicata dalla Fig. $29 \cdot 2$, le rette a,a' sono omologhe; se allora indichiamo con a_o la retta LU, si ha l'eguaglianza di birapporti

(2) $$(aa'a_o u) = (AA'UA_0) = k \ .$$

Anche il birapporto $(aa'a_o u) = k$ ci dà la caratteristica dell'omologia.

La costruzione dell' omologia rimane sostanzialmente la stessa se è improprio il punto A o l'asse u : basta trattare allo stesso modo elementi propri e impropri. Pertanto, se A diventa il punto improprio A_∞, la Fig 24.2 si trasforma nella Fig.24.3 . Se poi è improprio l'asse u , si ha la costruzione del parag. N. 32.

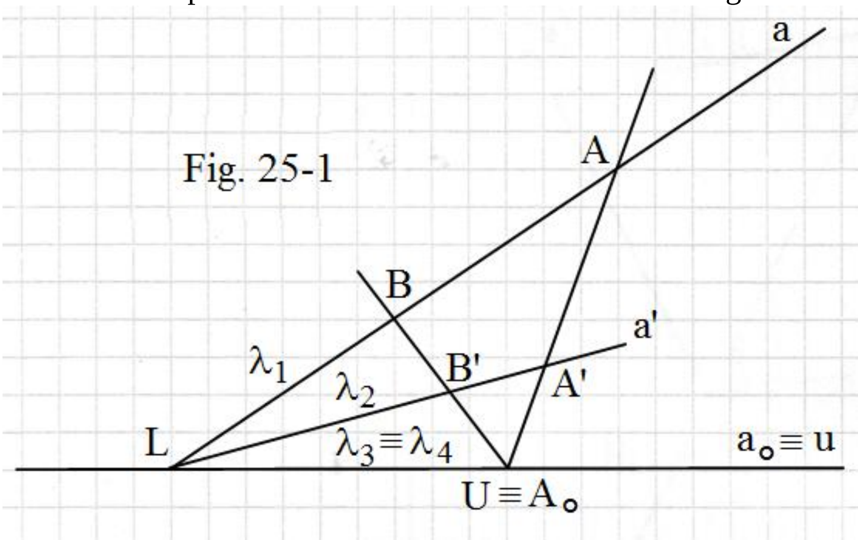


Se il centro U è improprio e l'asse proprio, l'omologia si dice **affinità omologica.**

Se il centro è improprio ed è in direzione all'asse, si ha una affinità omologica ortogonale. Essa si può ottenere nel modo seguente. Siano α e π due piani dello spazio euclideo reale S_3. Ribaltiamo il piano α intorno alla retta $r = \alpha \cap \pi$ fino a farlo coincidere con π e consideriamo corrispondenti due punti A e A' di π che siano rispettivamente la proiezione ortogonale e il ribaltamento di uno stesso punto A_O del piano α. Si ottiene così su π una omologia affine ortogonale che ha r come asse (M. Beltrametti; Geom. Proiettiva, pag. 97).

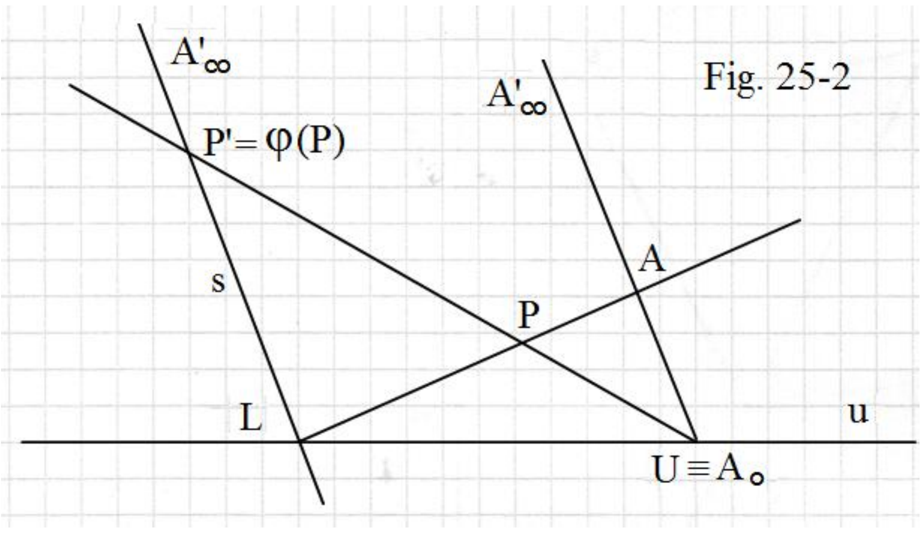
25. Omologie speciali

Come accennato, un'omologia si dice speciale se il suo centro U cade sull'asse dell'omologia. In tal caso la retta che unisce due punti corrispondenti A,A' interseca l'asse u in un punto A_o che coincide con il centro U e il corrispondente di un punto B si trova con la costruzione di Fig. 25.1 .



Se invece è improprio il punto A' (A'_∞), il corrispondente di un punto P si trova con la costruzione di fig. 25.2 . In tal caso la caratteristica dell'omologia è

(3) $$k = (AA'_\infty UA_o) = (AA'_\infty UU) = (AUUA'_\infty) = (AUU) = \frac{AU}{UU} = \infty \ .$$



ESERCIZI SULLE OMOLOGIE

Vediamo alcuni esercizi sulle omologie. Se si eccettua il primo, essi si trovano risolti nel testo, citato altre volte, del prof. M. Beltrametti.

26. Equazioni di una omologia di elementi assegnati

Svolgiamo un primo esercizio sulle omologie. Faremo ciò con l'intenzione di mostrare che, da un punto di vista omografico o omologico (e quindi proiettivo), una circonferenza è equivalente ad una qualsiasi parabola, iperbole o ellisse.

ESERCIZIO . Consideriamo due piani sovrapposti α e α' e fissiamo su di essi un medesimo sistema di coordinate cartesiane omogenee $Ox_1x_2x_3$.

Trovare le equazioni dell'omologia avente l'asse $u: \ x_1 + x_2 = 0$, il centro $U\,(0;1;1)$ e la coppia di punti corrispondenti $P(-1;0;2)$ e $P'\,(-1;-1;1)$, allineati con U (vedi N. Magnarelli: Geom. Analitica e Proiettiva II, pag. 4) .

Soluzione

Possiamo assegnare l'asse
imponendo che due punti scelti arbitrariamente su di esso siano uniti . Scegliamo i punti $O\,(0;0;1)$ ed $F(1;-1;1)$.

Ricordiamo che le equazioni generali di una omografia e quindi di una omologia, che è un suo caso particolare, sono (E. Martinelli, Geometria II, pagg. 125 e 150):

$$(25.1) \qquad \begin{cases} \rho x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \quad \text{con} \quad i = 1,2,3 \quad \text{e} \quad |A| = \det|a_{ik}| \neq 0 \ .$$

Imponiamo quindi che si corrispondano le coppie di punti $O(0,0,1) \to O(0,0,1)$, $F(1,-1,1) \to F(1,-1,1)$, $U(0,1,1) \to U(0,1,1)$ e $P(-1,0,2) \to P'\,(-1,-1,1)$: le prime tre coppie sono costituite da punti uniti . Poiché ogni coppia di punti corrispondenti impone tre condizioni lineari, si ha il sistema:

$$(1.2)\qquad \begin{cases} 0 = 0 + 0 + a_{13} \\ 0 = 0 + 0 + a_{23} \\ \rho = 0 + 0 + a_{33} \\ m = a_{11} - \cancel{a_{12}} + \cancel{a_{13}} \\ -m = a_{21} - a_{22} + \cancel{a_{23}} \\ m = a_{31} - a_{32} + a_{33} \\ 0 = 0 + a_{12} + \cancel{a_{13}} \\ n = 0 + a_{22} + \cancel{a_{23}} \\ n = 0 + a_{32} + a_{33} \\ -t = -a_{11} + 0 + \cancel{2a_{13}} \\ -t = -a_{21} + 0 + \cancel{2a_{23}} \\ t = -a_{31} + 0 + 2a_{33}\ . \end{cases}$$

Si ha un sistema di 12 equazioni in 13 incognite. Ricordando che i coefficienti ρ, m, n, t sono determinati a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, le incognite si riducono a 12.

Dalla 1^a e 2^a equazione de sistema si vede subito che si ha: $a_{13} = a_{23} = 0$;
quindi, dalla 7^a equazione del sistema (2) si ha $a_{12} = 0$.

Poiché i coefficienti ρ, m, n, t sono determinati a meno di un comune fattore di proporzionalità non nullo, possiamo porre $t = 1$.
Dalla 10^a e 11^a equazione ricava allora $a_{11} = a_{21} = 1$.
Quindi $m = 1$ e dalla 5^a equazione del sistema (2) si ha $a_{22} = 2$.
Seguitando con l'ausilio di un computer si trova la soluzione:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 1 & a_{12} = 0 & a_{13} = 0 \\ a_{21} = 1 & a_{22} = 2 & a_{23} = 0 \\ a_{31} = 1 & a_{32} = 1 & a_{33} = 1\ . \end{array}$$

Si ricava così che le equazioni della nostra omologia sono:

$$(1.3)\qquad \begin{cases} \rho x_1' = x_1 \\ \rho x_2' = x_1 + 2x_2 \\ \rho x_3' = x_1 + x_2 + x_3\ . \end{cases}$$

Si vede che $\quad |A| = \det|a_{ik}| = 2 \neq 0 \quad$ con $\quad A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$

Nella fig.11 abbiamo disegnato l'omologia indicando l'asse u , il centro U, la retta limite j del piano α , corrispondente alla retta impropria $x'_3 = 0$ del piano α' , e la retta limite i' del piano α' (vedi la T^{-1} del N. 18). Abbiamo anche indicato varie coppie di punti corrispondenti nell'omologia; essi, ovviamente, sono allineati con il centro $U(0;1;1)$.

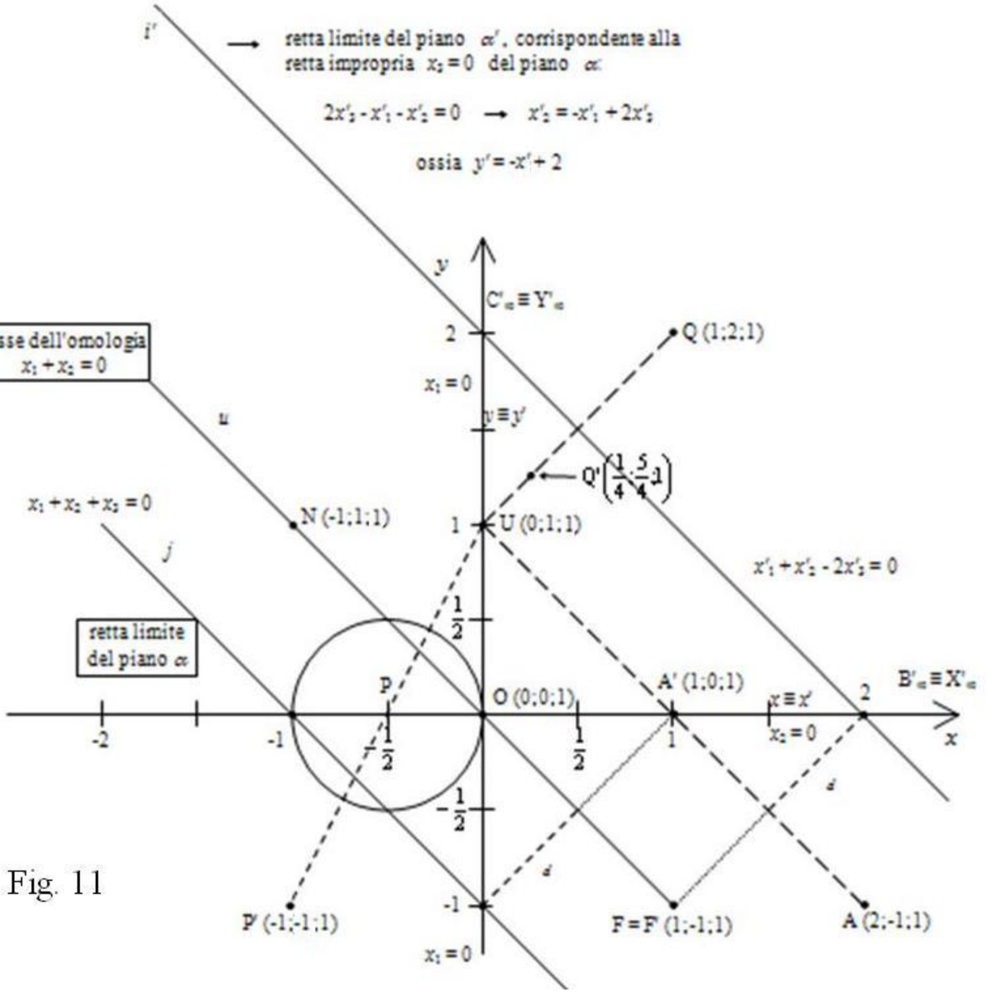


Fig. 11

Possiamo verificare subito due note proprietà:
1) le due rette limite dell'omologia sono parallele all'asse;
2) la distanza $d = \sqrt{2}/2$ fra l'asse dell'omologia e la retta limite del piano α è uguale alla distanza fra il centro U dell'omologia e la retta limite del piano α' .

27. Omografie aventi le proprietà di una omologia

Percorriamo ora il cammino inverso. A prescindere da ogni elemento già fornito in precedenza, consideriamo l'omografia di equazioni (3) e facciamo vedere che essa è una omologia. Ciò ci darà modo di rivedere molti aspetti della teoria sulle trasformazioni omografiche nel piano.
Notiamo anzitutto che si ha un punto unito quando la terna (x'_1, x'_2, x'_3) è proporzionale alla terna (x_1, x_2, x_3) poiché, in tal caso, le due terne rappresentano lo stesso punto. Deve essere quindi

$$x'_1 = \lambda x_1, \qquad x'_2 = \lambda x_2, \qquad x'_3 = \lambda x_3 \ .$$

Sostituendo nel sistema (1.3) si ha

$$(2.1)\qquad \begin{cases}(1-\lambda)x_1 \;\; +0+ \quad 0=0 \\ x_1 \;\; +(1-\lambda)x_2+ \quad 0=0 \\ x_1+ \quad x_2+ \quad (1-\lambda)x_3=0,\end{cases} \qquad \text{con la matrice} \qquad B=\begin{Vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 0\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{Vmatrix}$$

Abbiamo così un sistema omogeneo di tre equazioni nelle tre incognite x_1, x_2, x_3. Affinché esso ammetta soluzioni non tutte nulle (dette autosoluzioni del sistema) è necessario e sufficiente che sia

$$(2.2)\qquad \begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 0\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad .$$

L'equazione di 3° grado (2.2) è detta equazione caratteristica dell'omografia o della matrice quadrata A, vista al parag. 15, mentre le radici dell'equazione si dicono anche autovalori della matrice A .

Nel nostro caso le radici dell'equazione caratteristica sono

$\lambda_1=\lambda_2=1 \qquad \lambda_3=2$.

E' ovvio che per ognuno di tali valori la matrice B acquista rango $r < 3$.

Ora, per quanto riguarda lo studio delle omografie, il punto essenziale da ricordare è il seguente:

a) se l'equazione (2.2) ha le radici $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ e per $\lambda = \lambda_1$ il rango della matrice B è $r = 2$, allora si ha una omografia nella quale coincidono due delle tre rette unite e due dei tre punti uniti.

b) Se l'equazione (2.2) ha sempre le radici $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ e per $\lambda = \lambda_1$ il rango della matrice B è $r = 1$, allora si ha una omografia che in pratica ha una sola retta unita e un sol punto unito fuori di essa. Una tale omografia si dice omologia generale .
La retta unita si dice asse dell'omologia, mentre il punto unito si dice centro dell'omologia .

Nella nostra omografia si verifica proprio il caso b). Infatti già si è visto che si ha
$\lambda_1=\lambda_2=1,\;\; \lambda_3=2$ e per $\lambda=1$ si ha

$$B=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{Vmatrix} \;,$$

cioè la matrice B assume rango $r=1$ e quindi l'omografia di equazioni (1.3) si riduce ad una omologia generale.

Riprendiamo il sistema (2.1) e troviamo il punto unito e la retta unita dell'omologia.

Per $\lambda=1$ il sistema (2.1) si riduce a

$$(2.3)\qquad \begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_1+x_2=0\end{cases} \quad .$$

Tale sistema è indeterminato e ammette le infinite soluzioni date dalle terne di numeri $(x_1, -x_1, k)$ con k arbitrario. Ricordando che le coordinate cartesiane omogenee di un punto sono determinate a meno di un comune coefficiente di proporzionalità non nullo, tali terne si riducono a $(t, -t, 1)$. Ciò vuol dire che sono uniti tutti i punti della retta
$x_1 + x_2 = 0$.

Troviamo ora il punto unito corrispondente alla radice $\lambda_3 = 2$.
Il sistema (2.1) fornisce

(2.4)
$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} .$$

La soluzione è $x_1 = 0 \quad x_2 = t \quad x_3 = t$.

Ricordando ancora una volta che le coordinate omogenee di un punto sono determinate a meno di un coefficiente di proporzionalità, a questa soluzione corrisponde il solo punto unito U_3 (0;1;1).

28. Posizione di una circonferenza rispetto alla 2^ retta limite di una omologia

Riprendiamo ora le equazioni generali di una omografia, ma ciò che diremo vale esattamente anche per una omologia:

(3.1)
$$\begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} , \qquad \text{con} \quad |A| = \det|a_{ik}| \neq 0 .$$

Ponendo $x'_3 = 0$ si ottiene la retta

(3.2)
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 .$$

Essa è la retta del piano α che si trasforma nella retta impropria $x'_3 = 0$ del piano α' e si dice retta limite del piano α o seconda retta limite dell'omologia .
Risolvendo le (3.1) rispetto a x_1, x_2, x_3 (e lo faremo in seguito con la nostra particolare omografia), si ottengono le equazioni della trasformazione inversa T^{-1} della omografia T .
Queste equazioni permettono di trasformare una conica Γ del piano α in una conica Γ' , del piano α', che può essere un'ellisse, un'iperbole o una parabola indipendentemente dalla natura di Γ : ciò dipende dalla posizione rispetto a Γ della retta limite (3.2) del piano α.
Se questa retta $(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0)$ ha in comune con Γ due punti reali e distinti o reali e coincidenti o immaginari coniugati, la retta $x'_3 = 0$ avrà rispettivamente in comune con Γ' due punti impropri reali e distinti o reali e coincidenti o immaginari coniugati. In corrispondenza Γ' sarà un'iperbole, una parabola o un'ellisse. Questo fatto è molto importante perché ci mostra che da un punto di vista omografico o omologico tutte le coniche sono uguali.
Tale punto di vista è detto anche proiettivo perché le omografie e le omologie si possono generare mediante operazioni di proiezioni e sezioni. Il fatto è ancora più rilevante se si pensa che esso non si desume dalla teoria delle coniche come ci è pervenuta dal trattato di Apollonio.

29. Applicazioni algebriche delle omologie nelle trasformazioni di una circonferenza.

Verifichiamo ora algebricamente la proprietà più importante di una omologia. Di questa proprietà abbiamo già parlato estesamente nel paragrafo n. 25; cioè, a seconda che una circonferenza Γ del piano α sia tangente, secante o esterna rispetto alla retta limite $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$ del piano stesso, l'omologia trasformerà la Γ rispettivamente in una parabola, in un'iperbole o in una ellisse del piano α' . Questa proprietà, è utile ripeterlo, ci fa vedere che da un punto di vista proiettivo tutte le coniche sono eguali.

Prendiamo le equazioni della nostra omologia T e le equazioni della trasformazione inversa che subito si ricavano:

$$T \quad \begin{cases} \rho x_1' = x_1 \\ \rho x_2' = x_1 + 2x_2 \\ \rho x_3' = x_1 + x_2 + x_3 \ , \end{cases} \qquad\qquad T^{-1} \quad \begin{cases} x_1 = \rho x'_1 \\ x_2 = \dfrac{\rho}{2}(x'_2 - x'_1) \\ x_3 = \dfrac{\rho}{2}(2x'_3 - x'_2 - x'_1) \ . \end{cases}$$

Le rette limite dei piani α e α' sono rispettivamente:

$$j: \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \qquad \text{e} \qquad i': \ x'_1 + x'_2 - 2x'_3 = 0 \ .$$

Per comodità di scrittura indicheremo x_1, x_2, x_3 con le lettere x, y, z e x'_1, x'_2, x'_3 con le lettere x', y', z' .

1° caso

Consideriamo la circonferenza di centro O (0;0;1) e raggio $r = \sqrt{2}/2$.

Essa è tangente alla retta limite $x + y + z = 0$ e quindi si trasformerà in una parabola.

Equazione della circonferenza $\quad x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}z^2 \ \rightarrow \ 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$.

Trasformazione T^{-1} $\qquad 2\rho^2 x'^2 \ + \ 2\dfrac{\rho^2}{4}(y' - x')^2 \ - \ \dfrac{\rho^2}{4}(2z' - x' - y')^2 = 0$

Semplifichiamo e passiamo a coordinate non omogenee ponendo $z' = 1$; si ha

$$8x'^2 + 2(y' - x')^2 - (2 - x' - y')^2 = 0 \ .$$

Con semplici calcoli si vede che l'omologia trasforma Γ nella conica di equazione

$$(y' - 3x')^2 + 4x' + 4y' - 4 = 0 \ .$$

Si è ottenuta effettivamente una parabola.

2° caso

Consideriamo la circonferenza di centro $C_1\left(-\dfrac{1}{2};0;1\right)$ e raggio $r = \dfrac{1}{2}$.

Essa interseca la retta limite x + y + z = 0 in due punti distinti e quindi si trasformerà in un'iperbole.

Troviamo prima l'equazione in coordinate cartesiane non omogenee e passiamo poi a coordinate omogenee

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4} \quad \to x^2+x+\frac{1}{4}+y^2-\frac{1}{4}=0 \quad \to x^2+y^2+x=0 \ .$$

In coordinate omogenee l’equazione della Γ è $x^2+y^2+xz=0$.

Applicando la trasformazione T^{-1} si ha:

$$x'^2+\frac{1}{4}(y'-x')^2+\frac{1}{2}x'(2z'-x'-y')=0 \ .$$

Semplifichiamo e passiamo a coordinate cartesiane non omogenee sul piano α' ponendo z' = 1;si ha:

$$4x'^2+(y'-x')^2+2x'(2-x'-y')=0 \ ,$$

$$4x'^2+y'^2-2x'y'+x'^2+4x'-2x'^2-2x'y'=0 \ ,$$

(1) $$3x'^2-4x'y'+y'^2+4x'=0 \ .$$

La conica effettivamente è un'iperbole. Trovo il centro e gli asintoti :

$f_{x'} = 0 \ \to \quad 6x'-4y'+4=0$; $\qquad f_{y'}=0 \ \to \quad -4x'+2y'=0$.

Mettendo a sistema si ha $\begin{cases} y'=2x' \\ 3x'-2y'+2=0 \end{cases}$;

Si ha la soluzione $x'=2, \quad y'=4$.

Ne segue che il centro dell’iperbole è $C(2;4)$.

Eguagliamo a zero il complesso dei termini di 2^o grado della (1) e poniamo $x'/y'=m$. Si ha la seguente equazione di 2^o grado

(2) $m^2-4m+3=0$; le sue radici sono $m_1=1$ ed $m_2=3$.

1° asintoto $\quad y-4=x-2$, $\qquad y=x+2$.
2° asintoto $\quad y-4=3(x-2)$, $\qquad y=3x-2$.

3° caso
Consideriamo infine la circonferenza del piano α di centro C_2 (1;0;1) e raggio r = 1 . Essa è esterna alla retta limite $x+y+z=0$ del piano α, cioè è esterna alla retta che si trasforma nella retta impropria z' = 0 del piano α'. Quindi la circonferenza si trasformerà in un'ellisse.

Coordinate non omogenee $\quad (x-1)^2+y^2=1, \qquad x^2+y^2-2x=0$.

Coordinate omogenee $\qquad x^2+y^2-2xz=0$.

Applicando la trasformazione T^{-1} si ha :

$$x'^2 + \frac{1}{4}(y'-x')^2 - 2x'\frac{1}{2}(2z'-x'-y') = 0 \ .$$

Passiamo a coordinate cartesiane non omogenee ponendo $z' = 1$. Si ottiene

$$4x'^2 + (y'-x')^2 - 4x'(2-x'-y') = 0 \, ;$$
$$4x'^2 + (y'-x')^2 - 4x' \cdot (2-x'-y') \ ;$$
$$9x'^2 + 2x'y' + y'^2 - 8x' = 0 \ .$$

L'omologia trasforma effettivamente la circonferenza Γ in una ellisse .

30. Omologia di elementi assegnati

Riprendiamo l'omologia del N. 26, illustrata dalla Fig. 11. Ricordiamo il testo dell'esercizio proposto: Fissato sui piani sovrapposti $\alpha \equiv \alpha'$ un sistema di coordinate cartesiane omogenee $Ox_1x_2x_3$, trovare le equazioni dell'omologia avente il centro C(0,1,1), l'asse $u: \ x_1 + x_2 = 0$ e la coppia di punti corrispondenti $A(-1, 0, 2)$ e $A' \ (-1,-1,1)$.

Vogliamo risolvere l'esercizio seguendo il procedimento che il prof. Beltrametti illustra nel suo testo di Geometria. Può essere utile anche la fig. 36-1 del N. 36 ; essa è di carattere generale .

Prendiamo a piacere nel piano $Ox_1x_2x_3$ il punto P(a,b,c). Vogliamo trovare il suo corrispondente P', che evidentemente si troverà sulla retta r_{CP} .

(1) retta $r_{CP} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$ $\qquad r_{CP}: \ (c-b)x_1 + ax_2 - ax_3 = 0 \, ;$

(2) retta $r_{AP} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -1 & 0 & 2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$ $\qquad r_{AP}: -2bx_1 + (2a+c)x_2 - bx_3 = 0$.

Trovo il punto M in cui la retta r_{AP} interseca l'asse u dell'omologia:

(3) $$M = u \cap r_{AP} = \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -2bx_1 + (2a+c)x_2 - bx_3 = 0 \ . \end{cases}$$

Poiché $x_1 = -x_2$ si ha l'equazione $2bx_2 + (2a+c)x_2 - bx_3 = 0$, ossia

(4) $$(2a+2b+c)x_2 = bx_3 \ .$$

Soluzione del sistema (3) : $x_3 = 2a+2b+c$, $x_2 = b$, $x_1 = -b$.

Il punto M ha quindi le coordinate:

(3_1) $$M = (-b, \ b, \ 2a+2b+c) \ .$$

(5) retta $r_{A'M} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -b & b & 2a+2b+c \end{vmatrix} = 0$,

$$r_{A'M}: -(2a+2b+c)x_1 - bx_2 - bx_3 - bx_1 + (2a+2b+c)x_2 = 0 \ .$$

$$r_{A'M}: -(2a+3b+c)x_1 + (2a+2b+c-b)x_2 - 2bx_3 = 0 \ .$$

Troviamo il punto $P' = \varphi(P)$ intersecando la retta $r_{A'M}$ con la retta r_{CP} . Si ha il sistema

(6) $\begin{cases} (2a+3b+c)x_1 + 2bx_3 = (2a+b+c)x_2 \\ (c-b)x_1 - ax_3 = -ax_2 \ , \end{cases}$ da cui

(6') $\begin{cases} (2a+3b+c)x_1 + 2bx_3 = (2a+b+c)x_2 \\ 2b(c-b)x_1 - 2abx_3 = -2abx_2 \ . \end{cases}$

Moltiplicando la 1ª eq. per il coeff. A e sommando membro a membro si ha:

$$(2a^2+3ab+ac)x_1 + (2bc-2b^2)x_1 = (2a^2+ab+ac-2ab)x_2 ,$$

(7) $$(2a^2+3ab+ac+2bc-2b^2)x_1 = a(2a-b+c)x_2 \ .$$

Consideriamo il coefficiente K dell'incognita x_1 che compare nell'equazione. Per esso si ha:

$$K = 2a^2+3ab+ac+2bc-2b^2 = 2a^2-ab+ac+4ab-2b^2+2bc \ ,$$

(8) $$K = a(2a-b+c)+2b(2a-b+c) = (2a-b+c)\cdot(a+2b) \ .$$

Sostituendo la (8) nella (7) si ha:

$$\cancel{(2a-b+c)}\cdot(a+2b)x_1 = \cancel{(2a-b+c)}\cdot ax_2 , \qquad \text{ossia}$$

(9) $$(2a+b)x_1 = ax_2$$

La (9) ha la soluzione : $x_1 = a$, $x_2 = a+2b$.

Sostituendo nella (6_2) si ha:

$$a(c-b) - ax_3 = -a(a+2b) \ , \quad \rightarrow \quad ac-ab+a^2+2ab = ax_3 \ ,$$

$$ax_3 = a^2+ab+ac , \qquad \text{quindi} \qquad (9') \quad x_3 = a+b+c \ .$$

Riassumendo, il punto $P' = \varphi(P)$ ha le coordinate

(10) $$\varphi(P) = (a,\ a+2b,\ a+b+c) \ .$$

Ciò ci permette di dire che l'omologia proposta ha le equazioni:

(11) $$\begin{cases} \rho x_1' = x_1 \\ \rho x_2' = x_1 + 2x_2 \\ \rho x_3' = x_1 + x_2 + x_3 \quad . \end{cases}$$

Si trova così il risultato ottenuto con altro procedimento al N. 26.

31. Esercizio su omologie (M. Beltrametti; Geom. Proiettiva, pg. 164)

Fissato su un piano α un riferimento cartesiano omogeneo $Ox_1x_2x_3$, determinare l'omologia avente il centro C(1,1,1), come asse la retta $u: 2x_1 + x_2 = 0$ e avente i punti omologhi $A_\infty[1,1,0]$ e $A'[2,2,1]$.

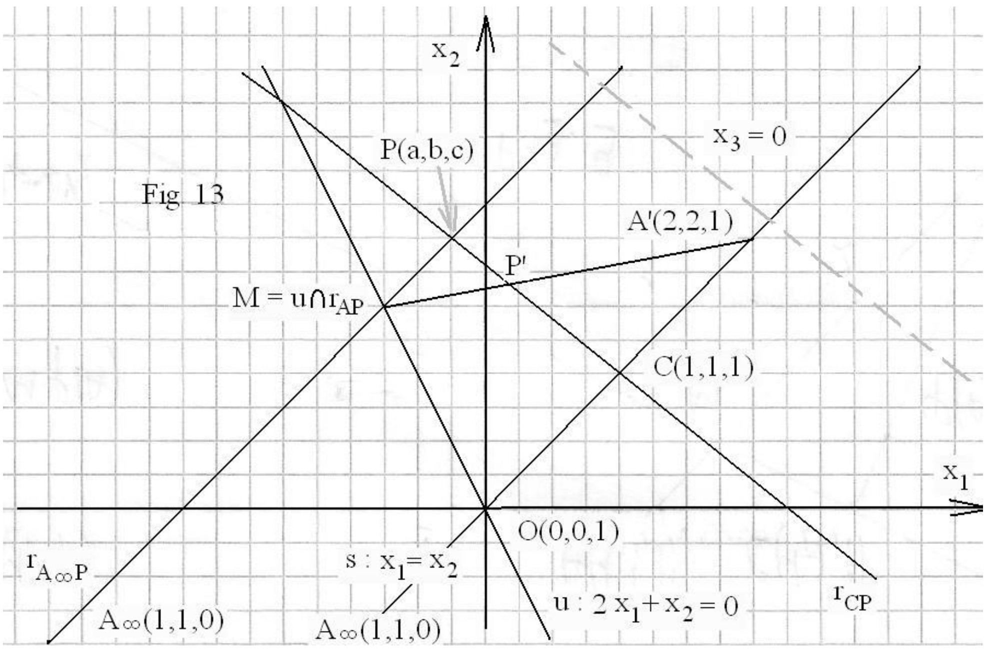
Soluzione. La costruzione grafica di una omologia ci permette di determinare il corrispondente $P' = \varphi(P)$ di un qualsiasi punto P(a,b,c) del piano; basta trattare alla stessa stregua punti propri e punti impropri. Nel nostro caso , ricalcando le indicazioni date dalla Fig. 24.3, si perviene alla Fig. 13 di questo paragrafo.

Con riferimento a questa figura si ha:

(1) retta $r_{CP} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$, $\quad (c-b)x_1 + (a-c)x_2 + (b-a)x_3 = 0$;

(2) retta $r_{A_\infty P} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$, $\quad cx_1 - cx_2 + (b-a)x_3 = 0$.

Indicando con M il punto di intersezione della retta $r_{A_\infty P}$ con l'asse dell'omologia si ha



(3) $$M = u \cap r_{A_\infty P} = \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ cx_1 - cx_2 + (b-a)x_3 = 0 \quad . \end{cases}$$

Poiché le coordinate x_1, x_2, x_3 sono determinate a meno di un comune coefficiente di proporzionalità non nullo, possiamo porre $x_3 = 1$. Allora il sistema (3), con un piccolo artificio, si riduce a

(4) $$\begin{cases} 2cx_1 + cx_2 = 0 \\ cx_1 - cx_2 = a - b \end{cases}$$, da cui (5) $$3cx_1 = a - b \ .$$

Il sistema (3) ha quindi la soluzione

(6) $$x_1 = \frac{a-b}{3c} \ , \qquad x_2 = -\frac{2(a-b)}{3c} \ , \qquad x_3 = 1 \ .$$

Ne segue che il punto M ha le coordinate

(7) $$M = \left[a - b, \ \ -2a + 2b, \ \ 3c\right] \ .$$

(8) Retta $$r_{MA'} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a-b & -2a+2b & 3c \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$ da cui

$$(-2a + 2b)x_1 + 6cx_2 + 2(a-b)x_3 + 4(a-b)x_3 - 6cx_1 - (a-b)x_2 = 0 \ ,$$

$$(-2a + 2b - 6c)x_1 + (6c - a + b)x_2 + (6a - 6b)x_3 = 0 \ .$$

Interseco la retta r_{CP} con la retta $r_{MA'}$ e trovo il punto di intersezione $P' = \varphi(P)$. Moltiplicando per 6 l'eq. della retta CP si ha il sistema:

(9) $$\begin{cases} (-2a + 2b - 6c)x_1 + (6c - a + b)x_2 + (6a - 6b)x_3 = 0 \\ (6c - 6b)x_1 + (6a - 6c)x_2 + (6b - 6a)x_3 = 0 \ . \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ha l'equazione

(10) $$(-2a - 4b)x_1 + (5a + b)x_2 = 0 \ ;$$

Essa ha la soluzione

(11) $$x_1 = 5a + b \ , \qquad x_2 = 2a + 4b \ .$$

Sostituendo nell'eq. $(c - b)x_1 + (a - c)x_2 + (b - a)x_3 = 0$ della retta r_{CP} si ha:

$$(c - b)\cdot(5a + b) + (a - c)\cdot(2a + 4b) + (b - a)x_3 = 0 \ ,$$ da cui

(12) $$x_3 = \frac{2a^2 - b^2 + 3ac - ab - 3bc}{a - c} \ .$$

Indicando con N il polinomio al numeratore della frazione si ha:

$$N = a^2 - b^2 + 3ac - 3bc + a^2 - ab = (a-b)(a+b) + 3c(a-b) + a(a-b) \ ,$$

$$N = (a-b)\cdot(a + b + 3c + a) \ ,$$ da cui

(13) $$N = (a-b)\cdot(2a + b + 3c) \ .$$

Sostituendo nella (12) e semplificando si ottiene

(14) $$x_3 = 2a + b + 3c \ .$$

Si ottiene così che il punto $P' = \varphi(P)$ ha le coordinate

(15) $$\varphi(P) = [5a + b,\ 2a + 4b,\ 2a + b + 3c] \ .$$

Ne conclude che le equazioni dell'omologia proposta sono:

(16) $$\begin{cases} \rho x_1' = 5x_1 + x_2 \\ \rho x_2' = 2x_1 + 4x_2 \\ \rho x_3' = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ . \end{cases}$$

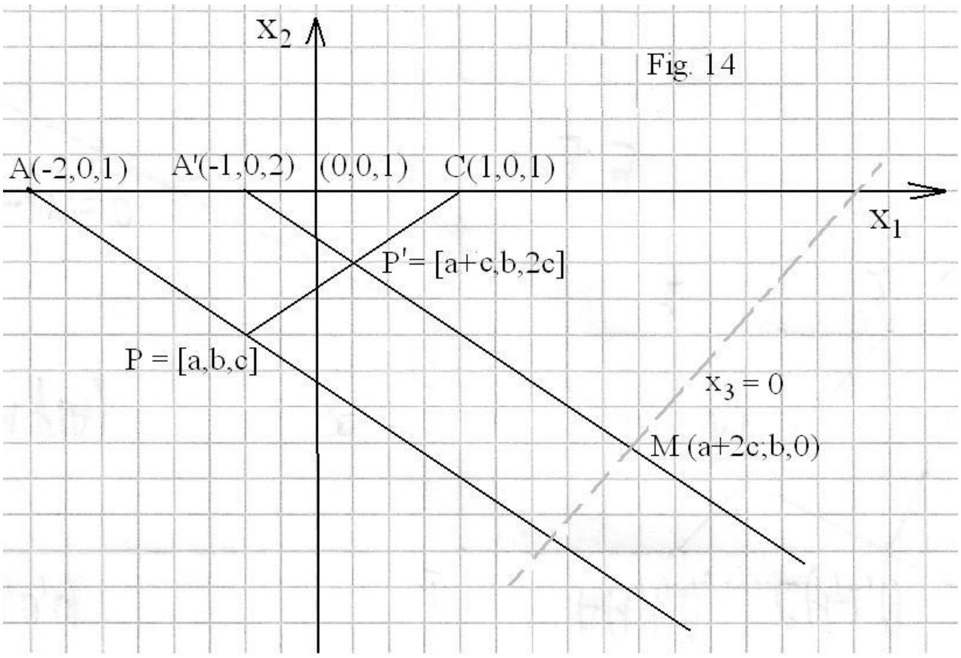
32. Omologia con centro proprio e come asse la retta impropria

Fissato su un piano α un sistema di coordinate cartesiane $Ox_1x_2x_3$, determinare le equazioni dell'omologia $\varphi(P)$ di centro C(1,0,1), avente per asse u la retta impropria $x_3 = 0$ del piano e nella quale sono omologhi i punti $A = [-2, 0, 1]$ e $A' = \varphi(A) = [1, 0, -2]$ (M. Beltrametti, pag. 163).

Soluzione Prima parte.

Sia $P[a, b, c]$ un punto generico dell'omologia; vogliamo trovare il suo corrispondente $P' = \varphi(P)$.

Partiremo sempre dalla fig. 24-2. Se ora teniamo presente che l'asse u dell'omologia è la retta impropria $x_3 = 0$ del piano α, la costruzione dell'omologia è data dalla fig. 14. Si noti che le rette corrispondenti r_{AP} ed $r_{A'P'}$, dovendosi incontrare sulla retta impropria, sono fra loro parallele.



Tracciamo le rette CP e AP e troviamo il punto di intersezione di AP con la retta impropria.

(1) Retta $r_{CP} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$, $\qquad r_{CP}: \ -bx_1 + (a - c)x_2 + bx_3 = 0$,

(2) retta $r_{AP} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -2 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$, $\qquad r_{AP}:\ bx_1 - (a+2c)x_2 + 2bx_3 = 0$.

Troviamo il punto di intersezione M della retta AP con la retta impropria:

(3) $$M = x_3 \cap r_{AP} = \begin{cases} x_3 = 0 \\ bx_1 - (a+2c)x_2 + 2bx_3 = 0\ ; \end{cases} \quad \rightarrow \quad bx_1 = (a+2c)x_2\ .$$

Soluzione : $\qquad x_1 = a+2c$, $\qquad x_2 = b$, $\qquad x_3 = 0$.

Il punto improprio M ha le coordinate

(4) $$M = [a+2c,\ b,\ 0]\ .$$

Troviamo ora la retta A'M, che è la parallela per A' alla retta r_{AP} . Si ha:

(5) $$r_{A'M} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & -2 \\ a+2c & b & 0 \end{vmatrix} = 0\ , \qquad r_{A'M}:\ 2bx_1 - 2(a+2c)x_2 + bx_3 = 0\ .$$

Interseco la retta $r_{A'M}$ con la retta r_{CP} e trovo il corrispondente P' del punto P. Si ha:

(6) $$P' = r_{A'M} \cap r_{CP} = \begin{cases} 2bx_1 - 2(a+2c)x_2 + bx_3 = 0 \\ -bx_1 + (a-c)x_2 + bx_3 = 0\ . \end{cases}$$

Poiché le coordinate x_1, x_2, x_3 sono determinate a meno di un comune coefficiente di proporzionalità non nullo, possiamo porre $x_3 = 1$. Moltiplicando la (6_2) per b si ha il sistema:

(7) $$\begin{cases} 2bx_1 - 2(a+2c)x_2 = -b \\ -2bx_1 + 2(a-c)x_2 = -2b\ . \end{cases}$$

Sommando si ottiene $\quad -6cx_2 = -3b$, da cui $\quad x_2 = b/2c$. Sostituendo nella (6_2) si ha:

$$-bx_1 + \frac{b(a-c)}{2b} + b = 0, \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{a-c}{2c} + 1\ , \ \text{ossia} \quad x_1 = \frac{a+c}{2c}\ .$$

Ne segue che per le coordinate del punto P' si ha

(8) $$P' = \varphi(P) = \left[\frac{a+c}{2c},\ \frac{b}{2c},\ 1\right] = [a+c,\ b,\ 2c]\ .$$

Si conclude che le equazioni dell'omologia sono:

(9) $$\begin{cases} \rho x_1' = x_1 + x_3 \\ \rho x_2' = x_2 \\ \rho x_3' = 2x_3\ . \end{cases} \qquad \text{con la matrice} \qquad A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}\ .$$

Seconda parte.
Consideriamo ora l'omografia φ di equazioni (9) e facciamo vedere che essa è una omologia.
Si ha un punto unito della φ quando la terna (x'_1, x'_2, x'_3) è proporzionale alla terna (x_1, x_2, x_3) poiché, in tal caso, le due terne rappresentano lo stesso punto. Deve essere quindi

$$x'_1 = \lambda x_1, \qquad x'_2 = \lambda x_2, \qquad x'_3 = \lambda x_3 \ .$$

Sostituendo nel sistema (9) si ha

(10) $$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 \ +0 \ + \ x_3 = 0 \\ 0 \ +(1-\lambda)x_2 \ + \ 0 = 0 \\ 0 + \ 0 \ +(2-\lambda)x_3 = 0, \end{cases} \qquad \text{con la matrice} \qquad B = \begin{Vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{Vmatrix}$$

Abbiamo così un sistema omogeneo di tre equazioni nelle tre incognite x_1, x_2, x_3. Affinché esso ammetta soluzioni non tutte nulle (dette autosoluzioni del sistema) è necessario e sufficiente che sia

(11) $$\det B = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \ .$$

L'equazione di 3° grado (2.2) è detta equazione caratteristica dell'omografia o della matrice quadrata A, mentre le radici dell'equazione si dicono anche autovalori della matrice A.

Nel nostro caso le radici dell'equazione caratteristica sono

(12) $$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 , \qquad \lambda_3 = 2 \ .$$

Per $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$ la matrice del sistema (10) diventa rispettivamente

(13) $$B' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{e} \quad B'' = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \ .$$

La prima matrice ha rango $r = 1$, la seconda ha rango $r = 2$. Possiamo quindi dire che l'omografia è una omologia.
Per $\lambda = 2$ il sistema diventa

(14) $$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \ .$$

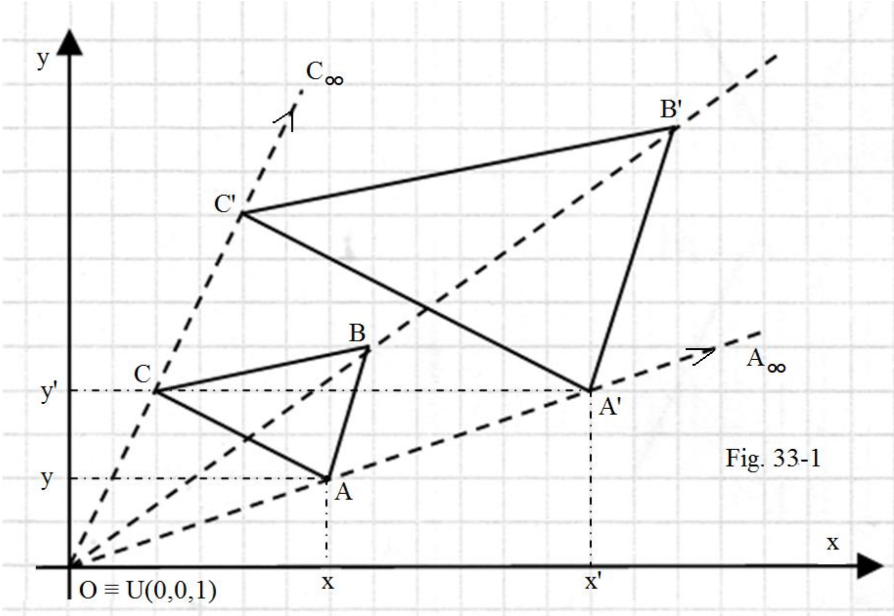
Soluzione $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.
La soluzione ci dà il punto unito C(1,0,1) , che rappresenta il centro dell'omologia.
Per $\lambda = 1$ il sistema (10) ha la soluzione $x_1 = h$, $x_2 = k$, $x_3 = 0$, che è un punto generico della retta impropria del piano, la quale viene ad essere l'asse dell'omologia.

33. L'omotetia come caso particolare dell'omologia (1[a] versione)

(E. Martinelli, Geometria II, pag. 172 - Libreria Bozzi, Genova)

Def. Dato un piano metrico α ampliato con la retta impropria, si dice omotetia una omologia non singolare φ nella quale l'asse è la retta impropria u_∞ del piano, mentre il centro U è un punto proprio.

Ne segue che rette corrispondenti, dovendosi incontrare sull'asse, passano per uno stesso punto improprio e quindi sono parallele. Analogamente, angoli corrispon-denti sono uguali e quindi una omotetia φ è una particolare similitudine . Essendo la φ anche una omologia, punti corrispondenti sono allineati con il centro U. Possiamo rappresentare l'omotetia con la Fig. 31.1 .



Dalla figura si vede che i punti corrispondenti (A, A'), (B, B'), (C, C') sono allineati con il centro U. Dimostriamo anche che in una omotetia è costante il rapporto delle distanze di due punti corrispondenti dal centro U. Infatti, essendo la φ una omologia, è costante il valore $1/k$ del birapporto di due punti corrispondenti A, A', del centro U e del punto A_o comune alla retta A, A' e all'asse u; tale valore è detto caratteristica dell'omologia .

Nel nostro caso A_o coincide con A_∞ e quindi si ha:

(1) $$(A, A', U) = \frac{AU}{A'U} = \frac{1}{k} \ .$$

La (1) si può ricavare anche in un modo più elementare. Infatti, poiché in una omotetia rette corrispondenti sono parallele, dalla Fig. 31.1 si vede che per il teorema di Talete si ha:

(2) $$\frac{AU}{A'U} = \frac{CU}{C'U} = ... = \cos t = \frac{1}{k}$$

Consideriamo ora un riferimento cartesiano Oxy avente l'origine O coincidente con U. Proiettiamo ortogonalmente i punti A, A' sugli assi x,y e indichiamo con x, x' e y, y' le ordinate dei punti proiezione.

Allora, dalla $\frac{AU}{A'U} = \frac{1}{k}$ si ricava:

(3) $$\frac{x}{x'} = \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \frac{y}{y'} = \frac{1}{k} ,$$

da cui (4) $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$.

Le (4) sono le equazioni di una omotetia avente il centro nell'origine O del riferimento cartesiano. La dimostrazione, come si vede, non ha richiesto l'aiuto di alcun esercizio chiarificatore.
Nel prossimo paragrafo daremo una dimostrazione analitica del presente teorema; essa ricalca fedelmente la dimostrazione sintetica ora sviluppata.

34. Le omotetie come caso particolare delle omologie (2^a versione)

Dato su un piano α un sistema di coordinate cartesiane omogenee $Ox_1x_2x_3$, determinare l'equazione dell'omologia $\varphi(P)$ di centro C(4,0,1), avente come asse u la retta impropria $x_3 = 0$ del piano e come coppia di punti corrispondenti i punti $A(-4,0,1)$ e $A' = \varphi(A) = O(0,0,1)$.
Si dimostri anche che una omologia di questo tipo si riduce ad una omotetia di centro C .

Svolgimento
Sia P(a,b,c) un punto generico dell'omologia; troviamo il suo corrispondente $P' = \varphi(P)$. La costruzione di questa omologia è indicata in fig.15.
Notiamo anzitutto che le rette corrispondenti r_{AP} ed $r_{A'P'}$, dovendosi incontrare sull'asse dell'omologia, che è la retta impropria, sono fra loro parallele .

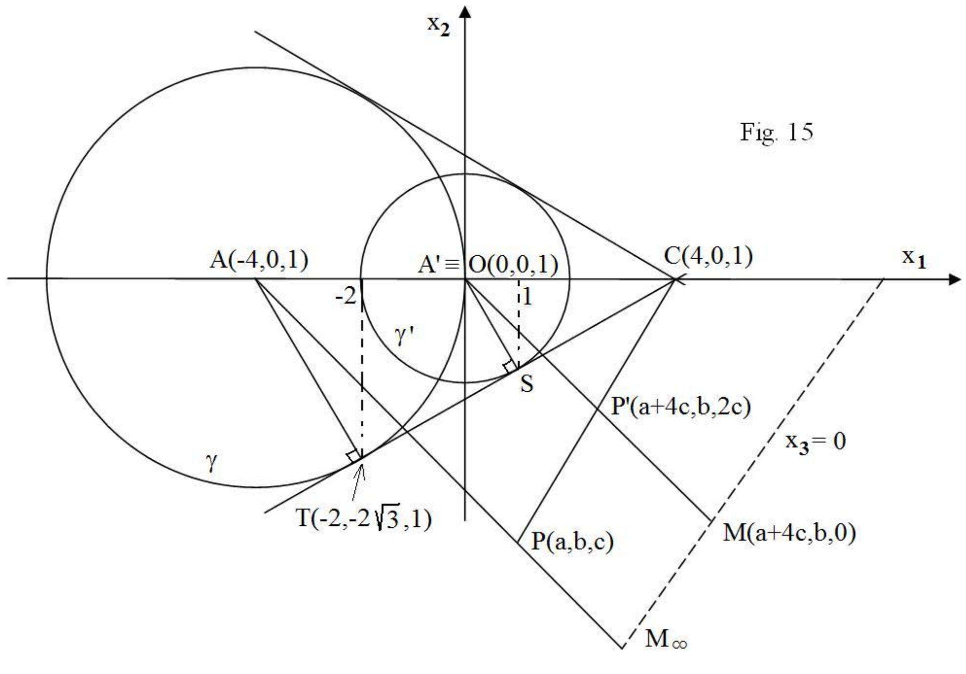


Fig. 15

Tracciamo la retta r_{AP} e troviamo il suo punto di intersezione M con la retta impropria. Si ha:

$$\text{retta } r_{AP} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -4 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \ , \ \rightarrow \ 0 + ax_2 - 4bx_3 - 0 - bx_1 + 4cx_2 = 0 \ ,$$

(1) $$r_{AP} : bx_1 - (a+4c)x_2 + 4bx_3 = 0 \ .$$

$$M = x_3 \cap r_{AP} = \begin{cases} x_3 = 0 \\ bx_1 - (a+4c)x_2 + 4bx_3 = 0, \end{cases} \quad \rightarrow \ bx_1 - (a+4c)x_2 = 0 \ .$$

Soluzione $x_1 = a + 4c$, $x_2 = b$, $x_3 = 0$.

Il punto improprio M ha le coordinate

(2) $$M=(a+4c,\ b,\ 0)\ .$$

Troviamo ora la retta $A'M$ (A' coincide con O), che è la parallela per A' alla retta r_{AP}. Si ha:

$$r_{A'M}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ a+4c & b & 0 \end{vmatrix}=0, \quad \to \quad 0+0+(a+4c)x_2-0-0-bx_1=0\ .$$

(3) Retta $r_{A'M}:\ \ bx_1-(a+4c)x_2=0$.

Trovo ora la retta r_{CA}, la interseco con la retta $r_{A'M}$ e trovo il corrispondente P' del punto P. Si ha:

$$r_{CP}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 4 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}=0, \quad \to \quad 0+ax_2+4bx_3-0-bx_1-4cx_2=0\ ,$$

$$r_{CP}:\ \ -ax_2-4bx_3+bx_1+4cx_2=0\ ; \qquad \text{quindi:}$$

(4) $$r_{CP}:\ \ +bx_1-(a-4c)x_2-4bx_3=0\ .$$

Intersecando, come detto, la retta A'M con la retta CP si trova P'. Si ha

(5) $$P'=r_{A'M}\cap r_{CP}=\begin{cases} bx_1-(a+4c)x_2=0 \\ bx_1-(a-4c)x_2-4bx_3=0\ . \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione del sistema dalla seconda si ha:

$$\cancel{ax_2}+4cx_2-\cancel{ax_2}+4cx_2-4bx_3=0\ , \qquad \text{da cui}$$

$$8cx_2-4bx_3=0\ , \qquad \text{ossia (6)} \qquad 2cx_2-bx_3=0\ .$$

La (6) ha la soluzione $x_2=b$, $x_3=2c$.

Sostituendo i valori di queste coordinate nella prima eq. del sistema (5) si ha:

$$bx_1-(a+4c)b=0\ , \qquad \text{da cui} \qquad x_1=a+4c\ .$$

Abbiamo trovato che le coordinate del punto P' sono:

(7) $$P'=\varphi(P)=(a+4c,\ b,\ 2c)\ .$$

Sostituendo ad a,b,c le coordinate di un generico punto $P(x_1,x_2,x_3)$ della omologia, si trova che questa ha le equazioni:

(T) $$\begin{cases} \rho x_1'=x_1+4x_3 \\ \rho x_2'=x_2 \\ \rho x_3'=2x_3\ , \end{cases}$$

ove ρ è una costante non nulla .

Verifichiamo l'esattezza delle equazioni dell'omologia trovando il corrispondente del centro C(4,0,1) , che è un punto unito dell'omologia . Si ha:

(9) $$\rho x_1'=4+4=8\ , \quad \rho x_2'=0\ , \quad \rho x_3'=2\ .$$

Poiché le coordinate x'_1, x'_2, x'_3 (e x_1, x_2, x_3) sono determinate a meno di un comune coefficiente di proporzionalità non nullo, possiamo porre $\rho = 2$.
Si trova che il corrispondente del punto $C(4,0,1)$ è $C'(4,0,1)$, che coincide con esso. Ne segue che il punto C è unito.

Consideriamo ora le due coppie di punti corrispondenti (A, A') e (P, P') .
Dalla fig. 15 si vede che per il teorema di Talete si ha:

(9) $$\frac{\overrightarrow{CA'}}{\overrightarrow{CA}} = \frac{\overrightarrow{CP'}}{\overrightarrow{CP}} = k \ , \qquad \text{con } k \in R_O \text{ e } k > 0 \ .$$

Ciò ci dice che la corrispondenza di punti indotta dalla nostra omologia è una omotetia diretta di centro C e di rapporto k .

Osservando i triangoli CAP e $CA'P'$ della costruzione geometrica, si vede anche che per il citato teorema di Talete si ha:

(10) $$\overrightarrow{AA'} = k \cdot \overrightarrow{PP'} \ ,$$

cioè la nostra corrispondenza trasforma rette in rette parallele. Come sappiamo, questa è un'altra proprietà delle omotetie.
I dati assegnati dal problema ci permettono subito di dire che $k = \frac{CA'}{CA} = \frac{1}{2}$.

Mostriamo che sussiste una notevole proprietà ; cioè l'omotetia (T) trasforma la circonferenza γ di centro A e raggio $R = 4$ nella circonferenza γ' di centro A' e raggio $r = 2$, ove abbiamo preso intenzionalmente i raggi nel rapporto

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{2} = k \ .$$

Le equaz. delle due circonferenze , in coordinate omogenee, sono

(11) $$\gamma: \ x_1^2 + x_2^2 + 8x_1x_3 = 0 \qquad \gamma': \ x_1^2 + x_2^2 = 4x_3^2 \ .$$

Riprendiamo la trasformazione T e troviamo la sua trasformazione inversa T^{-1} ponendo $\rho = 2$. Subito si ottiene :

(T^{-1}) : $$x_1 = 2x'_1 - 4x'_3 \ , \qquad x_2 = 2x'_2 \ , \qquad x_3 = x'_3 \ .$$

Sostituendo nell'equazione di γ si ha:

$$(2x'_1 - 4x'_3)^2 + 4x_2'^2 + 8 \cdot (2x'_1 - 4x'_3)x'_3 = 0 \ .$$

Svolgendo i calcoli e semplificando si ha:

$$4x_1'^2 + 4x_2'^2 - 16x'_1x'_3 = 0 \ .$$

Semplifichiamo e passiamo a coordinate omogenee ponendo $x'_1 / x'_3 = x'$ e $x'_2 / x'_3 = y'$. Si ottiene

(12) $$x'^2 + y'^2 = 4 \ , \quad \text{o se si vuole} \quad \gamma' : \ x^2 + y^2 = 4 \ .$$

Si trova così che la trasformata di γ è la circonferenza omotetica γ' .

Si dimostra facilmente che le rette tangenti alla circonferenza γ' condotte dal centro di omologia C(4,0) sono tangenti anche a γ . In particolare, la tangente di coeff. angolare positivo tocca γ' nel punto $S(1,-\sqrt{3})$ e la circonferenza γ nel punto $T(-2,-2\sqrt{3})$.

35. Esercizio su una omologia speciale

Dato sul piano α un riferimento cartesiano omogeneo $Ox_1x_2x_3$, determinare l'omologia speciale φ avente come asse la retta r di equazione $x_1 - 2x_2 = 0$, come centro il punto C(2,1,1) dell'asse e, come corrispondenti, i punti A(1,1,1)
e $\varphi(A) = X_\infty(1,0,0)$ della retta $x_1 = x_3$ (Beltrametti; Geom. Proiett., pag. 166) .

Soluzione .
Sia P(a,b,c) un punto generico del piano; il suo corrispondente $\varphi(P)$ dovrà cadere sulla retta r(CP), che unisce il punto P con il centro dell'omologia (fig. 16) .
Tenendo presente la costruzione grafica generale di una omologia (vedi esercizio al N. seguente) tracciamo le rette CP e AP:

$$\text{retta } r_{CP} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0, \quad \to \quad cx_1 + ax_2 + 2bx_3 - ax_3 - bx_1 - 2cx_2 = 0,$$

(1) $$r_{CP}:\ (c-b)x_1 + (a-2c)x_2 + (2b-a)x_3 = 0;$$

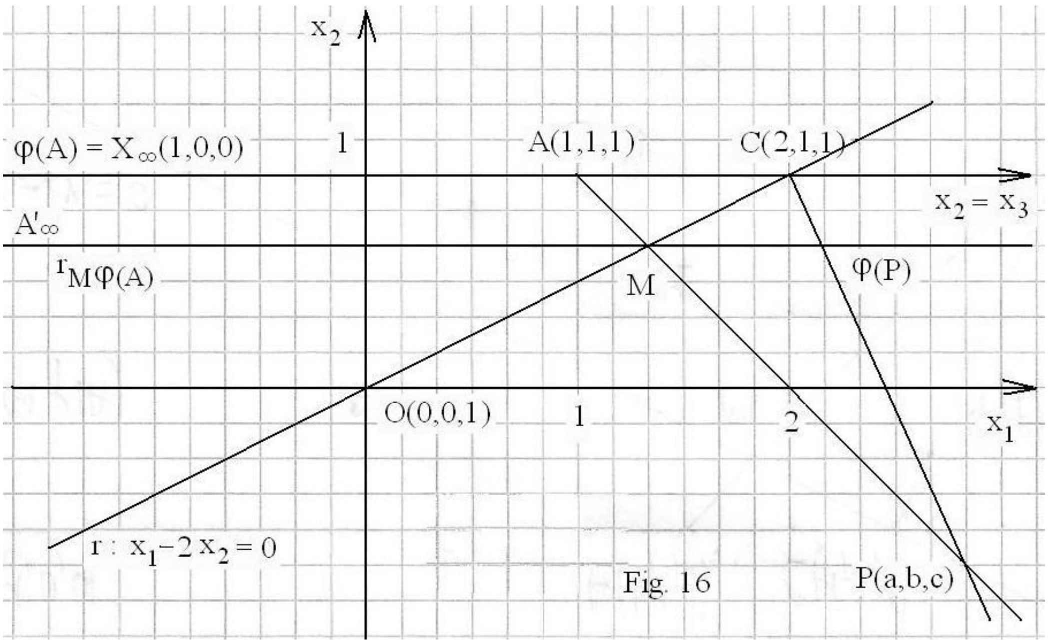


Fig. 16

(2) $$\text{retta } r_{AP} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \ , \quad \to \quad r_{AP}:\ (c-b)x_1 + (a-c)x_2 + (b-a)x_3 = 0 .$$

Troviamo il punto M di intersezione della retta r_{AP} con l'asse $x_1 - 2x_2 = 0$:

(3) $$M = r \cap r_{AP} = \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ (c-b)x_1 + (a-c)x_2 = (a-b)x_3 \ ; \end{cases}$$

(3’) $$2(c-b)x_2+(a-c)x_2=(a-b)x_3\,,\quad (c+a-2b)x_2=(a-b)x_3\ .$$

da cui $$(c+a-2b)x_2=(a-b)x_3\ .$$

La soluzione dell’eq. è : $x_2=a-2b$, $x_3=c+a-2b$.

Le coordinate del punto di intersezione M sono pertanto:

(4) $$M=\left[2(a-b),\ a-b,\ a-2b+c\right]\ .$$

Troviamo ora l’equazione della retta passante per il punto M e per il punto $A_\infty(1,0,0)=\varphi(A)$, corrispondente del punto A(1,1,1); si tratta della parallela condotta dal punto M alla retta $x_1=x_3$. Si ha:

(5) $$r_{MA'}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2(a-b) & a-b & a-2b+c \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0\ ;\quad \text{da cui}$$

(5’) $$x_2(a-2b+c)=(a-b)x_3\ .$$

Troviamo il punto $\varphi(P)$ di intersezione della retta r_{CP} con la retta $r_{MA'}$. Si ha

(6) $$\varphi(A)=r_{CP}\cap r_{MA'}=\begin{cases}(a-2b+c)x_2=(a-b)x_3\\ (c-b)x_1+(a-2c)x_2+(2b-a)x_3=0\ .\end{cases}$$

Dalla (6_1) si ricava $x_3=x_2(a-2b+c)/(a-b)$
e sostituendo nella (6_2) si ha:

$$(c-b)x_1+(a-2c)x_2+(2b-a)\cdot\frac{(a-2b+c)}{a-b}x_2=0\ ,\qquad \text{da cui}$$
$$(c-b)(a-b)x_1+(a-2c)(a-b)x_2+(2b-a)\cdot(a-2b+c)x_2=0\ ,$$
segue (7) $$(ac-cb-ab+b^2)x^2=(4b^2+3ac-3ab-4bc)x_2\ .$$

Scomponiamo in fattori i coefficienti A e B dell’equazione (7); si ha:
$$A=ac-ab-cb+b^2=a(c-b)-b(c-b)=(c-b)\cdot(a-b)\ ;$$
$$B=4b^2-4bc+3ac-3ab=-4b(c-b)+3a(c-b)=(c-b)\cdot(3a-4b)\ \cdot$$

Sostituendo nella (7) si ha:

$$\cancel{(c-b)}\cdot(a-b)x_1=\cancel{(c-b)}\cdot(3a-4b)x_2\ .$$

Si ottiene cosi l’equazione:

(8) $$(a-b)x_1=(3a-4b)x_2\ ,$$

che ha la soluzione $x_1=3a-4b$, $x_2=a-b$.

Ricordando che $x_3 = x_2(a-2b+c)/(a-b)$ per le coordinate del punto $\varphi(P)$ si trova:

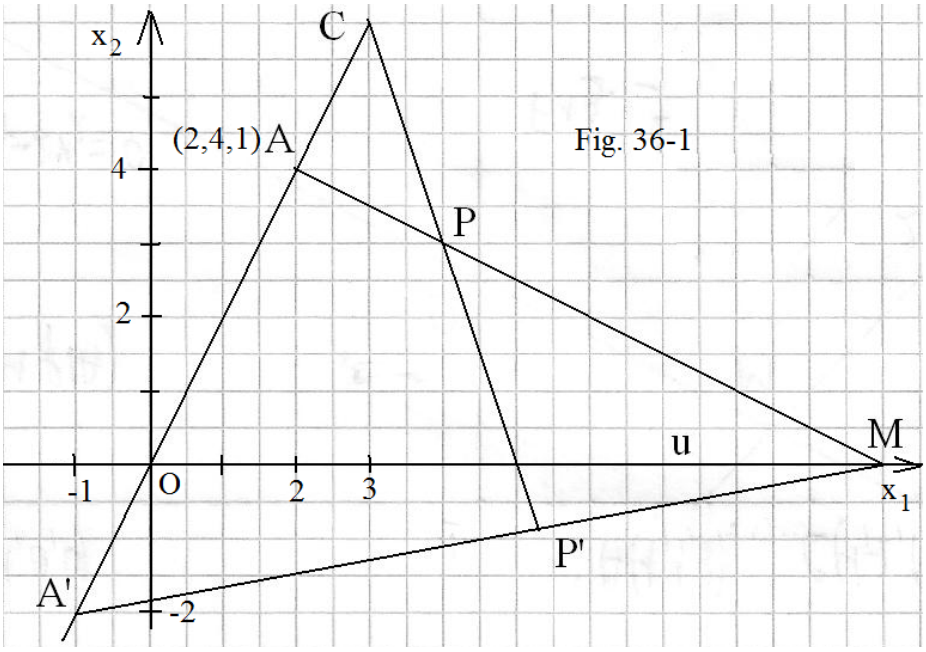
(9) $$\varphi(P) = [3a-4b,\ a-b,\ a-2b+c] \ .$$

Si conclude che la nostra omologia speciale ha le equazioni seguenti:

(10) $$\begin{cases} \rho x_1' = 3x_1 - 4x_2 \\ \rho x_2' = x_1 - x_2 \\ \rho x_3' = x_1 - 2x_2 + x_3 \ . \end{cases}$$

36. Omologia avente asse, centro e punti corrispondenti assegnati

Dato un riferimento cartesiano omogeneo $Ox_1x_2x_3$ su due piani sovrapposti $\alpha \equiv \alpha'$, trovare le equazioni dell'omologia φ di asse x ($x_2 = 0$), centro $C(3,6,1)$ e avente la coppia di punti corrispondenti $A(2,4,1)$ ed $A' = \varphi(A) = \ = (-1,-2,1)$.



<u>Soluzione</u>

Sia $P(a,b,c)$ un qualsiasi punto del piano α; il suo punto corrispondente $P' = \varphi(P)$ si troverà sulla retta r_{CP}. La sua eq. è

(1) $$r_{CP} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 3 & 6 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

da cui $r_{CP}:\ (6c-b)x_1 + (a-3c)x_2 + (3b-6a)x_3 = 0$.

Troviamo ora l'eq. della retta AP:

(2) $$r_{AP} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 4 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \ , \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \qquad r_{AP} : (4c-b)x_1 + (a-2c)x_2 + (2b-4a)x_3 = 0 \ .$$

Sia M il punto di intersezione della retta AP con l'asse x; come sappiamo, esso è un punto unito e le sue coordinate si trovano risolvendo il sistema:

(3) $$M = \text{assex} \cap r_{AP} = \begin{cases} x_2 = 0 \\ (4c-b)x_1 + (a-2c)x_2 + (2b-4a)x_3 = 0. \end{cases}$$

Segue (4) $$(4c-b)x_1 = (4a-2b)x_3 \ ,$$ quindi

(5) $$M = [4a-2b,\ 0,\ 4c-b] \ .$$

Troviamo ora la retta $r(A'M)$; si ha

(6) $$r_{A'M} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4a-2b & 0 & 4c-b \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Sviluppando il determinante si ha:

(7) $$r_{A'M} : 2(b-4c)x_1 + (4a-3b+4c)x_2 + 2(4a-2b)x_3 = 0 \ .$$

Intersecando la retta $r(A'M)$ con la retta $r(CP)$ si trova il corrispondente del punto P. Procedendo nei calcoli si ha:

(8) $$\begin{cases} 2(b-4c)x_1 + (4a-3b+4c)x_2 + (8a-4b)x_3 = 0 \\ (6c-b)x_1 + (a-3c)x_2 - (6a-3b)x_3 = 0 \ , \end{cases}$$ da cui

(9) $$\begin{cases} 6(b-4c)x_1 + 3(4a-3b+4c)x_2 + (24a-12b)x_3 = 0 \\ 4(6c-b)x_1 + 4(a-3c)x_2 - (24a-12b)x_3 = 0 \ . \end{cases}$$

Sommando membro a membro si trova:

$$(6b - \cancel{24c} + \cancel{24c} - 4b)x_1 + (12a - 9b + \cancel{12c} + 4a - \cancel{12c})x_2 = 0 \ ,$$

da cui (10) $$2bx_1 + (16a-9b)x_2 = 0 \ .$$

L'eq. (10) ha la soluzione

(11) $$x_1 = 16a - 9b \ , \qquad x_2 = -2b \ .$$

Sostituendo nella (8_2) e svolgendo i prodotti, subito si trova:

$$96ac - 48bc - 18ab + 9b^2 = (6a-3b)x_3 \ ,$$

e con una doppio raccoglimento a fattor possiamo scrivere:

$$48c \cdot \cancel{(2a-b)} - 9b \cdot \cancel{(2a-b)} = 3 \cdot \cancel{(2a-b)} \cdot x_3 \ ,$$

da cui (12) $3x_3 = 48c - 9b$, ossia $x_3 = 16c - 3b$.

Le espressioni di x_1, x_2, x_3 date dalle (11), (12) , ci permettono di dire che il corrispondente del punto P ha le coordinate

(13) $$P' = \varphi(P) = \left[16a - 9b,\ -2b,\ 16c - 3b\right] ,$$
e quindi le equazioni dell'omologia sono

(14) $$\begin{cases} \rho x_1' = 16x_1 - 9x_2 \\ \rho x_2' = 0 - 2x_2 \\ \rho x_2' = 0 - 3x_2 + 16x_3 \end{cases} .$$

Facciamo qualche piccola verifica.

Per il corrispondente del punto A(2,4,1) le (14) ci permettono di trovare

$$x_1' = 32 - 36 = -4 \ , \qquad x_2' = -8 \ , \qquad x_3' = -12 + 16 = +4 \ .$$

Da esse si ricava che il corrispondente del punto A è $A' = [-4, -8, 4] = \left[-1, -2, 1\right]$.
Questa verifica è esatta.

Per il corrispondente del punto C(3,6,1) le (14) ci permettono di trovare

$$x_1' = 48 - 54 = -6 \ , \qquad x_2' = -12 \ , \qquad x_3' = -18 + 16 = -2 \ .$$

Da esse si ricava che il corrispondente del punto C è :

$$C' = \left[-6, -12, -2\right] \equiv C\left[3, 6, 1\right] \ .$$

Infatti il punto C è unito come centro dell'omologia. La verifica è esatta.

37. Omologia di centro e asse dati (Beltrametti; Geometria, pg. 141)
Fissiamo su un piano α un sistema di coordinate cartesiane omogenee $Ox_1x_2x_3$, vogliamo trovare l'equazione dell'omologia avente come centro il punto $C = \left[a_1, a_2, a_3\right]$ e come asse la retta $r: \ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, con $C \notin r$.

<u>Soluzione</u> . Consideriamo la proiettività di equazioni

(1) $$\begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} ,$$

ove i coefficienti a_{ik} sono dati dalle seguenti relazioni:

(2) $a_{11} = \lambda a_1 u_1 - \mu(u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3)$, $a_{12} = \lambda a_1 u_2$, $a_{13} = \lambda a_1 u_3$,

(2') $a_{21} = \lambda a_2 u_1$, $a_{22} = \lambda a_2 u_2 - \mu(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3)$, $a_{23} = \lambda a_2 u_3$, (2'') $a_{31}=\lambda a_3 u_1,\quad a_{32}=\lambda a_3 u_2\ ,\quad a_{33}=\lambda a_3 u_3-\mu(u_1a_1+u_2a_2+u_3a_3)\ ,$

con $(\lambda-\mu)\cdot\mu^2\neq 0$.

Si può dimostrare che la (1) rappresenta una omologia generale di centro C, asse r e di caratteristica $1-\lambda/\mu$.
Se poi $C\in r$, la (1) rappresenta una omologia <u>speciale</u> nella quale il centro C appartiene all'asse dell'omologia.

<u>Cenno di dimostrazione</u> . Proviamo l'enunciato solo nel caso di una omologia generale.

Sostituendo i coefficienti (2), (2') e (2'') nella (1), le equazioni della proiettività diventano:

$$(3)\qquad \begin{cases}\rho x_1'=\left[\lambda a_1u_1-\mu(u_1a_1+u_2a_2+u_3a_3)\right]x_1+\lambda a_1u_2x_2+\lambda a_1u_3x_3\\ \rho x_2'=\lambda a_2u_1x_1+\left[\lambda a_2u_2-\mu(u_1a_1+u_2a_2+u_3a_3)\right]x_2+\lambda a_2u_3x_3\\ \rho x_3'=\lambda a_3u_1x_1+\lambda a_3u_2x_2+\left[\lambda a_3u_3-\mu(u_1a_1+u_2a_2+u_3a_3)\right]x_3\quad .\end{cases}$$

Facendo comparire il polinomio $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3$ si ha:

$$(4)\qquad \begin{cases}\rho x_1'=\lambda a_1(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)-\mu(u_1a_1+u_2a_2+u_3a_3)x_1\\ \rho x_2'=\lambda a_2(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)-\mu(u_1a_1+u_2a_2+u_3a_3)x_2\\ \rho x_3'=\lambda a_3(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)-\mu(u_1a_1+u_2a_2+u_3a_3)x_3\quad .\end{cases}$$

Posto $u_1a_1+u_2a_2+u_3a_3=m$, il sistema (4) diventa

$$(5)\qquad \begin{cases}\rho x_1'=\lambda a_1(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)-\mu m x_1\\ \rho x_2'=\lambda a_2(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)-\mu m x_2\\ \rho x_3'=\lambda a_3(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)-\mu m x_3\quad .\end{cases}$$

Esempio N. 1 Trovare le equazioni dell'omologia generale che ha centro $C=\left[a_1,a_2,a_3\right]=\left[1,0,1\right]$ e asse la retta $r:\ x_1-2x_3=0$ (M. Beltrametti; Geometria, pag. 142) .

Tenendo presenti i coefficienti dell'asse r si ha $\left[u_1,u_2,u_3\right]=\left[1,0,-2\right]$ e quindi $m=1+0-2=-1.$

Con questi dati, le equazioni dell'omologia sono:

$$(6)\qquad \begin{cases}\rho x_1'=\lambda(x_1-2x_3)+\mu x_1\\ \rho x_2'=+\mu x_2\\ \rho x_3'=\lambda(x_1-2x_3)+\mu x_3\quad ,\end{cases}$$

da cui

$$(7)\qquad \begin{cases}\rho x_1'=(\lambda+\mu)x_1-2\lambda x_3\\ \rho x_2'=+\mu x_2\\ \rho x_3'=\lambda x_1-(2\lambda-\mu)x_3\quad .\end{cases}$$

Per $\lambda = 1$ e $\mu = 2$ si ha l'omologia

$$(8) \qquad \begin{cases} \rho x_1' = 3x_1 - 2x_3 \\ \rho x_2' = 2x_2 \\ \rho x_3' = x_1 + 0 + 0 \ . \end{cases}$$

Esempio N. 2 Fissato un sistema di coordinate cartesiane omogenee $Ox_1x_2x_3$ su due piani sovrapposti $\alpha \equiv \alpha'$, trovare le equazioni dell'omologia che ha il centro U(0,1,1), come asse la retta $r: \ x_1 + x_2 = 0$ e che ha la coppia di punti corrispon-denti $P(-1,0,2)$ e $P'(-1,-1,1)$, allineati con U.

<u>Soluzione</u>
Risolviamo questo esercizio con il procedimento su esposto, ricordando che esso è già stato risolto con altro metodo al N. 23 .
Ricordo che la più generale omologia di asse $r: \ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ e centro $C = [a_1, a_2, a_3]$ ha le equazioni

$$(9) \qquad \begin{cases} \rho x_1' = \lambda a_1(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3) - \mu m x_1 \\ \rho x_2' = \lambda a_2(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3) - \mu m x_2 \qquad \text{ove } \ m = u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 \ . \\ \rho x_3' = \lambda a_3(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3) - \mu m x_3 \ \ , \end{cases}$$

Nel nostro caso si ha $m = 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 1$, e il sistema (9) diventa:

$$(10) \qquad \begin{cases} \rho x_1' = 0 - \mu x_1 \\ \rho x_2' = \lambda(x_1 + x_2 + 0) - \mu x_2 \\ \rho x_3' = \lambda(x_1 + x_2 + 0) - \mu x_3 \ \ , \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \rho x_1' = -\mu x_1 \\ \rho x_2' = \lambda x_1 + (\lambda - \mu)x_2 \\ \rho x_3' = \lambda x_1 + \lambda x_2 - \mu x_3 \ \ . \end{cases}$$

Imponendo che i punti $P(-1,0,1)$ e $P'(-1,-1,1)$ siano corrispondenti si ha la condizione:

$$(11) \qquad \begin{cases} -\rho = \mu \\ -\rho = -\lambda + 0 \\ \rho = -\lambda - 2\mu \ \ , \end{cases} \qquad \text{si ricava la soluzione} \qquad (12) \qquad \mu = -\lambda \ \ .$$

Poiché i coefficienti λ e μ sono determinati a meno di un comune fattore di proporzionalità non nullo, possiamo porre $\lambda = 1$ e $\mu = -1$. Si trova così che l'omologia ha le equazioni:

$$(13) \qquad \begin{cases} \rho x_1' = x_1 \\ \rho x_2' = x_1 + 2x_2 \\ \rho x_3' = x_1 + x_2 + x_3 \ \ . \end{cases}$$

38. Rette limite di una omologia

(F. Conforto; Geom. Descrittiva, pag. 87) . Sia φ una omologia di asse u e centro U propri, definita su due piani sovrapposti $\alpha \equiv \alpha'$. Si dice prima retta limite dell'omologia, e si indica con la lettera i', la lettera del piano α' che corrisponde, tramite l'omologia, alla retta impropria del piano α.

La retta i' e la retta impropria del piano α, come rette corrispondenti, si incon-trano sull'asse u dell'omologia. In altre parole, la retta limite i' deve passare per il punto improprio dell'asse u e quindi i' deve essere parallela all'asse.

Si dice seconda retta limite dell'omologia, e si indica con la lettera j, la retta del piano α che si trasforma, tramite l'omologia, nella retta impropria $x_3' = 0$ del piano α' (sovrapposto ad α) .

La retta j e la retta impropria $x_3' = 0$ del piano α' si debbono incontrare nel punto improprio dell'asse u, essendo esse rette corrispondenti. Ne segue che la j passa per il punto improprio dell'asse u e quindi è parallela ad esso.

Una omologia non identica è perfettamente individuata quando siano noti il suo centro, il suo asse ed una delle due rette limiti .

39. Costruzione delle due rette limite di una omologia di asse e centro propri

Questa costruzione è immediata non appena si conosca una coppia di rette corrispondenti nell'omologia considerata. Infatti, consideriamo una omologia di centro U, asse u e siano r ed r' una coppia di rette corrispondenti, che si intersecano in un certo punto A dell'asse u . Come sappiamo, esiste una e una sola omologia che soddisfa queste condizioni (fig. 18).

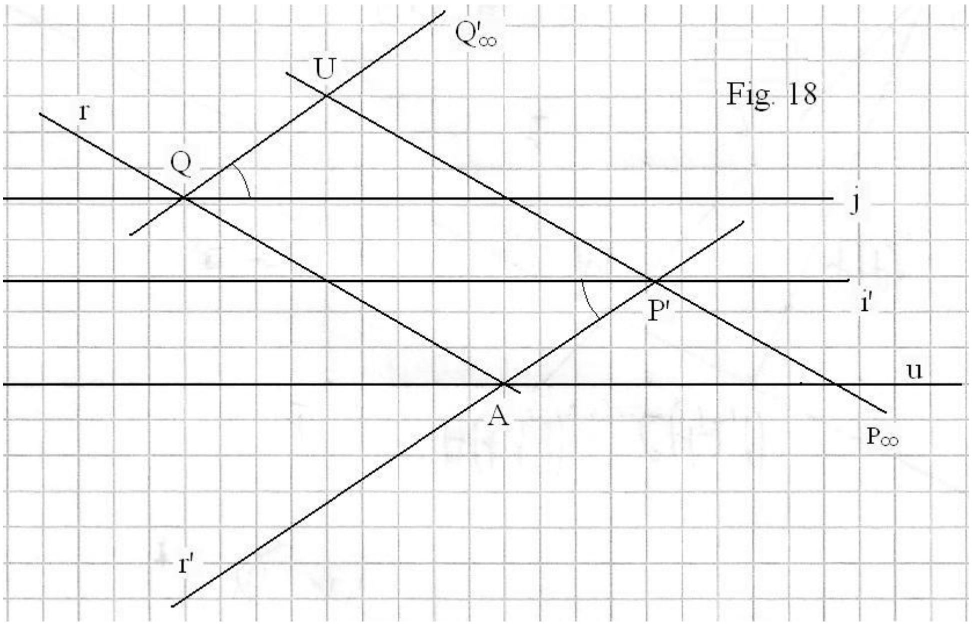


Fig. 18

Troviamo il corrispondente P' del punto all'infinito P_∞ della retta r ; esso deve stare sulla retta r' e sulla UP_∞ . Quindi esso è il punto di intersezione della retta r' con la retta UP_∞ passante per U e parallela alla retta r. La retta limite i', come corrispondente della retta impropria , deve passare per P'ed essere parallela all'asse u.

In modo analogo si ragiona per trovare l'altra retta limite j. Precisamente, sia Q il corrispondente del punto Q'_∞ della retta r'. Esso deve stare sulla retta r e sulla retta UQ'_∞ passante per il centro U dell'omologia e parallela ad r'; quindi Q deve essere il punto di intersezione di queste due rette. La retta j , come corrispondente della retta impropria , deve passare per Q ed essere parallela all'asse u.
Tenendo conto che il quadrilatero UP'AQ è un parallelogramma, si ricava che la distanza del centro U dalla retta limite j è uguale alla distanza dell'asse u dalla retta limite i' .

40. Omologia con retta limite

Prima parte. Fissato un sistema di coordinate cartesiane omogenee $Ox_1x_2x_3$ su due piani sovrapposti α e α', trovare le equazioni dell'omologia piana che ha come asse la retta $r: x_1 + x_2 = 0$, come centro il punto $U(0,1,1)$ e la retta $j: x_1 + x_2 + x_3 = 0$ come seconda retta limite del piano α (retta del piano α che si trasforma nella retta impropria $x'_3 = 0$ del piano α').

Soluzione . La più generale omologia che ha il centro $C(a_1, a_2, a_3)$ e come asse la retta

(*) $\quad r: u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ ha le equazioni

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho x'_1 = \lambda a_1(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3) - \mu m x_1, \\ \rho x'_2 = \lambda a_2(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3) - \mu m x_2, \\ \rho x'_3 = \lambda a_3(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3) - \mu m x_3 \end{cases} \quad \text{con} \quad m = u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 \ .$$

Nel nostro caso si ha:

(2) $\quad u_1 = u_2 = 1\ ,\ u_3 = 0\ ,\quad a_1 = 0,\ a_2 = a_3 = 1\ ;$

quindi $\quad m = 1\times 0 + 1\times 1 + 0\times 1 = 1$

Sostituendo nelle (1) si ha il sistema

(3) $\quad \rho x'_1 = 0 - \mu x_1,\quad \rho x'_2 = \lambda(x_1 + x_2) - \mu x_2,\quad \rho x'_3 = \lambda(x_1 + x_2) - \mu x_3\ ;$

da cui (4) $\quad \rho x'_1 = -\mu x_1,\quad \rho x'_2 = \lambda x_1 + (\lambda - \mu)x_2,\quad \rho x'_3 = \lambda(x_1 + x_2) - \mu x_3\ .$

Ora l'equazione

(5) $\quad \lambda(x_1 + x_2) - \mu x_3 = 0$

è la retta del piano α che si trasforma nella retta impropria $x'_3 = 0$ del piano α'; ossia, è la seconda retta limite del piano α. Essa, quindi, coincide con la retta (6) $j: x_1 + x_2 + x_3 = 0$, assegnata dal problema. Possiamo quindi eguagliare i polinomi delle due equazioni ottenendo:

(7) $\quad \lambda(x_1 + x_2) - \mu x_3 = x_1 + x_2 + x_3\ .$

Poiché questa eguaglianza deve essere identicamente soddisfatta, si ricava (*)

$\lambda = 1,\quad \mu = -1.$

Sostituendo questi valori nell'equazioni (1) si ricava che le equazioni dell'omologia sono date dalla trasformazione:

$$(8) \qquad T: \begin{cases} \rho x'_1 = x_1 \\ \rho x'_2 = x_1 + 2x_2 \\ \rho x'_3 = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases} \qquad \text{con} \ \det|a_{ik}| \neq 0 \ .$$

La sua trasformazione inversa è

$$(9) \qquad T^{-1}: \begin{cases} x_1 = \rho x_1' \\ x_2 = \rho(x_2' - x_1')/2 \\ x_3 = \rho(2x_3' - x_2' - x_1')/2 \quad . \end{cases}$$

Poiché le coordinate sono determinate a meno di un comune coefficiente di proporzionalità non nullo, nelle equazioni dei sistemi (8) e (9) possiamo anche omettere il fattore ρ .

Seconda parte. Posizione di una circonferenza rispetto alla 2^ retta limite di una omologia

Consideriamo le equazioni generali di una omologia:

$$(10) \qquad T: \begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \quad , \end{cases} \qquad \text{con} \quad \det|aik| \neq 0$$

Ponendo $x_3' = 0$ si ottiene la retta

$$(11) \qquad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \ .$$

Essa è la retta del piano α che si trasforma nella retta impropria $x'_3 = 0$ del piano α' e si dice retta limite del piano α o seconda retta limite dell'omologia , e si indica con la lettera j .
Risolvendo le (10) rispetto a x_1, x_2, x_3 si ottengono le equazioni della trasformazione inversa T^{-1} della omologia T .
Queste equazioni permettono di trasformare una conica Γ del piano α in una conica Γ' , del piano α', che può essere un'ellisse, un'iperbole o una parabola indipendentemente dalla natura di Γ : ciò dipende dalla posizione rispetto a Γ della retta limite j del piano α.
Precisamente, se questa retta ha in comune con Γ due punti reali e distinti o reali e coincidenti o immaginari coniugati, allora la retta $x'_3 = 0$ avrà rispettivamente in comune con Γ' due punti impropri reali e distinti o reali e coincidenti o immaginari coniugati. In corrispondenza Γ' sarà un'iperbole, una parabola o un'ellisse. Questo fatto è molto importante perché ci mostra che da un punto di vista omologico (o proiettivo che dir si voglia) tutte le coniche sono uguali.

Applicazioni algebriche delle omologie nelle trasformazioni di una circonferenza
Riprendiamo, per es., l'omologia T di equazioni (8) già vista, e la sua inversa T^{-1} , e consideriamo la circonferenza di centro O(0,0,1) e raggio $r = \sqrt{2}/2$. In coordinate omogenee la sua equazione è:

$$(12) \qquad 2x_1^2 + 2x_2^2 = x_3^2 \quad .$$

Come subito si può verificare, essa è tangente alla seconda retta limite $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ del piano α, e quindi la sostituzione T^{-1} trasformerà questa circonferenza in una parabola.

Infatti, sostituendo le (9) nella (12) si ha in successione:

$$2\rho^2 x_1'^2 + 2\cdot\frac{1}{4}\rho^2(x_2' - x_1')^2 = \frac{1}{4}\rho^2(2x_3' - x_2' - x_1')^2,$$
$$8x_1'^2 + 2x_2'^2 + 2x_1'^2 - 4x_1'x_2' = 4x_3'^2 + x_2'^2 + x_1'^2 - 4x_3'x_2' - 4x_3'x_1' + 2x_2'x_1',$$
$$9x_1'^2 + x_2'^2 - 6x_1'x_2' = 4x_3'^2 - 4x_3'x_2' - 4x_3'x_1',$$

$$(x_2' - 3x_1')^2 = 4x_3'^2 - 4x_3'x_2' - 4x_3'x_1' .$$

Passando a coordinate cartesiane non omogenee x', y' si ha

(13) $$(y' - 3x')^2 + 4x' + 4y' - 4 = 0 .$$

Come si vede, la conica trasformata è una parabola ; come era stato previsto.

41. Esempio di omologia affine

Su un piano π è dato un riferimento cartesiano omogeneo $Ox_1x_2x_3$. Trovare le equazioni dell'affinità omologica generale (AOG) che ha come asse u la retta $x_2 = 0$ (asse x_1), come punti corrispondenti i punti A(2,4,1), $A'(-1,-2,\ 1)$ e come centro il punto improprio C_∞ della retta AA' (e quindi delle rette a questa parallele) (fig. 19) .

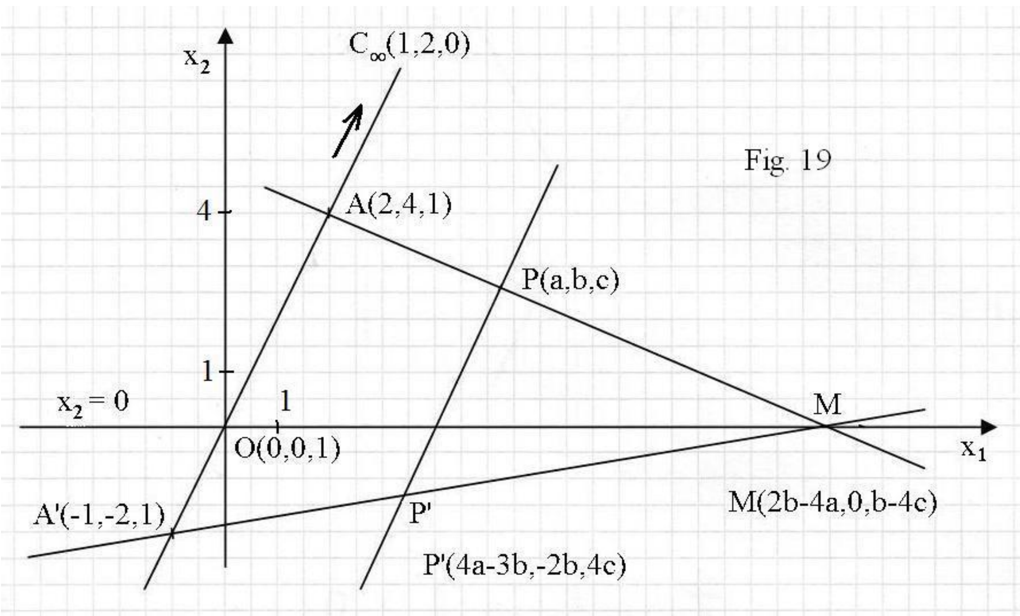
<u>Soluzione</u>

Trovo l'equazione della retta AA' e il suo punto improprio C_∞ , intersecando con la retta $x_3 = 0$. Si ha :

$$\text{retta } r_{AA'} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ , \ \rightarrow$$

$$4x_1 - x_2 - \cancel{4x_3} + \cancel{4x_3} + 2x_1 - 2x_2 = 0 \ ,$$

(1) $$r_{AA'} : \ 2x_1 - x_2 = 0 \ ; \text{ il suo punto improprio è } C_\infty(1,\ 2,\ 0) \ .$$



Detto P(a,b,c) un punto del piano, trovo l'eq. della retta r_{AP} . Si ha:

$$r_{AP} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 4 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0, \ \rightarrow \ 4cx_1 + ax_2 + 2bx_3 - 4ax_3 - bx_1 - 2cx_2 = 0 \ .$$

(2) Retta r_{AP} : $(4c - b)x_1 + (a - 2c)x_2 + (2b - 4a)x_3 = 0$.

Interseco la retta r_{AP} con l'asse dell'affinità omologica $x_2 = 0$ e trovo le coordinate del punto di intersezione M . Si ha:

$$M = r_{AP} \cap x_1 = \begin{cases} x_2 = 0 \\ (4c - b)x_1 + (a - 2c)x_2 + (2b - 4a)x_3 = 0 \ . \end{cases}$$

(3) $(4c\text{-}b)x_1 + (2b - 4a)x_3 = 0$.

L'equazione tre ha la soluzione $x_1 = 2b - 4a$, $x_3 = b - 4c$. Quindi

(4) $M = (2b - 4a,\ 0,\ b - 4c)$.

Trovo ora l'equazione della retta $r_{A'M}$. Si ha

$$r_{A'M} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2b - 4a & 0 & b - 4c \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Sviluppando si ha in sequenza :

(*)
$$-2(b - 4c)x_1 + (2b - 4a)x_2 + 0 + 2(2b - 4a)x_3 + 0 + (b - 4c)x_2 = 0$$
$$-2(b - 4c)x_1 + (2b - 4a + b - 4c)x_2 + 2(2b - 4a)x_3 = 0 \ .$$

Infine, cambiando segno, si ha:

(5) $r_{A'M}$ $2(b - 4c)x_1 + (4a + 4c - 3b)x_2 - 2(2b - 4a)x_3 = 0$.

Trovo ora l'equazione della retta PC_∞ , cioè della parallela alla retta AA' condotta dal punto P . Si ha

$$r_{PC\infty} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0, \ \rightarrow \ 2cx_1 + +0 + bx_3 - 2ax_3 - 0 - cx_2 = 0 \ .$$

(6) Retta $r_{PC\infty}$: $2cx_1 - cx_2 + (b - 2a)x_3 = 0$.

Interseco la retta A'M con la retta r_{PC_∞} e trovo P', cioè il corrispondente del punto P nell'affinità omologica data . Si ha:

(7) $$P' = r_{A'M} \cap r_{CP\infty} = \begin{cases} 2(b-4c)x_1 + (4a+4c-3b)x_2 - 2(2b-4a)x_3 = 0 \\ 2cx_1 - cx_2 + (b-2a)x_3 = 0 \ . \end{cases}$$

In forma più opportuna si può scrivere:

(*) $$P' = \begin{cases} 2(b-4c)x_1 + (4a+4c-3b)x_2 - 2(2b-4a)x_3 = 0 \\ 8cx_1 - 4cx_2 + 2(2b-4a)x_3 = 0 \ . \end{cases}$$

Sommando membro a membro le due equazioni del sistema si ha:

$$(2b - \cancel{8c} + \cancel{8c})x_1 + (4a + \cancel{4c} - 3b - \cancel{4c})x_2 = 0 \ ,$$

da cui $$2bx_1 + (4a-3b)x_2 = 0 \ .$$

Si ha la soluzione (8) $x_1 = 4a - 3b$, $x_2 = -2b$.

Sostituendo i valori di queste coordinate nella prima eq. del sistema (7) si ha:

$$2c(4a-3b) + 2bc + (b-2a)x_3 = 0$$

$$8ac - 6bc + 2bc + (b-2a)x_3 = 0 \ ,$$

$$8ac - 4bc + (b-2a)x_3 = 0 \ .$$

Mettendo in evidenza il fattore $-4c$ fra i primi due addendi si ha l'equazione

(9) $-4c \cdot (b-2a) + (b-2a)x_3 = 0$; soluzione $x_3 = 4c$

Le coordinate del punto P' sono quindi:

(10) $P' \equiv (4a-3b, \ -2b, \ 4c)$.

Sostituendo ad a,b,c con le generiche coordinate (x_1, x_2, x_3) del punto P dell'affinità omologia generale (la indicherò con <u>A.O.G</u>) si trova che questa ha le equazioni:

(T) $$\begin{cases} \rho x_1' = 4x_1 - 3x_2 \\ \rho x_2' = -2x_2 \\ \rho x_3' = 4x_3 \ , \end{cases}$$ o se si vuole (T) $$\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 3x_2 \\ x_2' = -2x_2 \\ x_3' = 4x_3 \ . \end{cases}$$

<u>Verifica</u> : vediamo se queste equazioni ci fanno ritrovare le coordinate del corrispondente del punto A(2,4,1) . Si ha:

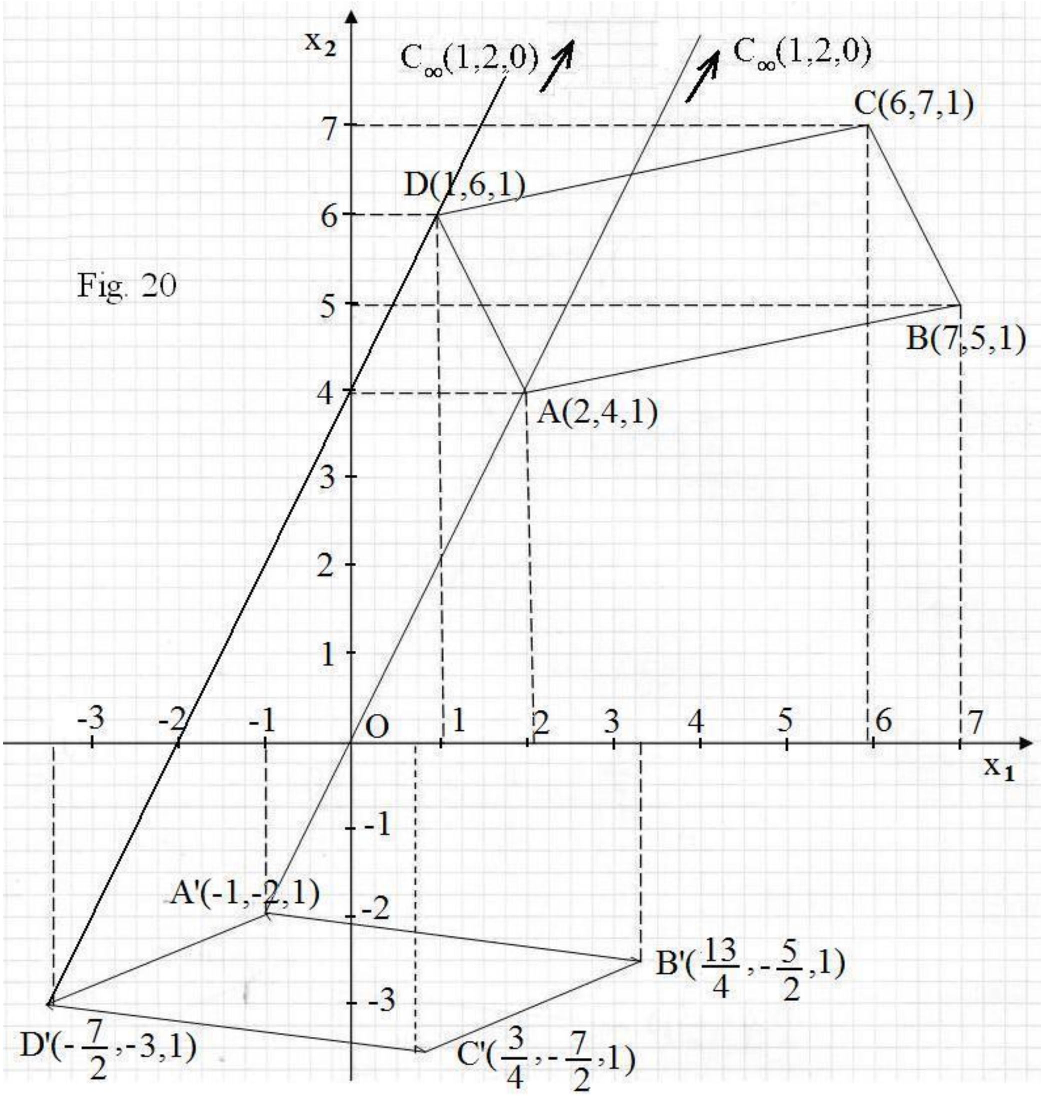
$$x_1' = 8 - 12 \ , \quad x_2' = -8 \ , \quad x_3' = 4 \ , \quad \text{cioè} \quad A'(-4, -8, 4)$$

ossia (11) $A'(-1, \ -2, \ 1)$.

Verifica esatta.

Ultimo: la trasformazione (T) è effettivamente una affinità omologica perché essa trasforma la retta impropria $x_3 = 0$ del piano π in se stessa.

La teoria ci dice anche che la trasformazione del piano considerata trasforma rette parallele in rette parallele, in generale diversamente orientate, e quindi un parallelogramma in un altro (fig 20).
Illustriamo quest'ultima proprietà, sfruttando le equazioni della AOG data .



Consideriamo il parallelogramma che in coordinate omogenee ha i vertici

A(2,4,1) , B(7,5,1), C(6,7,1), D(1,6,1) .

La trasformazione T ci permette di trovare .

1) Punto omologo di A(2,4,1) :

(*) $x_1' = 8-12 = -4;\ \ x_2' = -8;\ \ x_3' = 4 \quad \to A'(-2,-8,4) = (-1,-2,1)$.

2) Punto omologo di B(7,5,1) : (*) $x_1' = 28-15 = 13,\ \ x_2' = -10;\ \ x_3' = 4 \ \to\ B'(13,-10,4) = (13/4; -5/2;\ 1)$.

3) Punto omologo di C(6,7,19) :

(*) $x_1' = 24-21 = 3;\ \ x_2' = -14;\ \ x_3' = 4 \ \to\ C'(3,-14,\ 4) = (3/4, -7/2, 1)$.

4) Punto omologo di D(1,6,1) :

(*) $x_1' = 24-21 = 3;\ \ x_2' = -14;\ \ x_3' = 4 \ \to\ C'(3,-14,\ 4) = (3/4, -7/2, 1)$.

Congiungendo i vertici A', B', C', D', la figura ottenuta ci mostra che il parallelogramma viene trasformato in un altro parallelogramma e le rette $A'A$, $B'B$ ecc. hanno il punto improprio coincidente con il centro C_∞ dell'affinità omologica

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE DEL PIANO

42. Le affinità nel piano

(Vedi: 1) Enzo Martinelli, Geometria II, pag 152 . Libreria Bozzi Genova
2) Zwirner- Scaglianti ; Prospettive della Matematica, I ; CEDAM, pag. 195).

Si dice **affinità** una omografia fra due piani sovrapposti $\pi \equiv \pi'$ nella quale si corrispondono le rette improprie.
Da questa definizione segue che un'affinità muta rette parallele in rette parallele, un parallelogramma in un parallelogramma e quindi segmenti equipollenti in segmenti equipollenti . Ne segue anche che fra due rette proprie corrispondenti l'affinità subordina una similitudine.

Dalla definizione discende che le equazioni di una affinità sono

(1)
$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' = a_{33}x_3 \end{cases} \quad \text{con} \quad \det|a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot a_{33} \neq 0 \ .$$

Dividendo membro a membro la prima e seconda equazione per la terza , e passando a coordinate non omogenee, si ha

(2)
$$\begin{cases} X = ax + by + p \\ Y = cx + dy + q \end{cases} ,$$

dove a,b,c,d,p,q sono costanti ed $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, $\rightarrow$ $ad - bc \neq 0$.
Possiamo quindi dire:
" Si chiama affinità nel piano π ogni corrispondenza biunivoca algebrica che ad ogni punto P(x,y) associa il p.to $\overline{P}$, le cui coordinate sono date dal sistema (2)".

La matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ si chiama <u>matrice dell'affinità</u> ; le (2) si dicono <u>equazioni dell'affinità</u> .

Poiché una affinità T del piano è una corrispondenza biunivoca algebrica, essa è invertibile, cioè esiste una trasformazione inversa (la indicheremo con T^{-1}), che alla coppia (X,Y) associa la coppia (x,y) .
Si può dimostrare che anche la T^{-1} è una affinità .

In una affinità è costante il rapporto k delle aree corrispondenti. Questo rapporto si chiama rapporto di affinità ed è uguale al valore assoluto del determinante della matrice dell'affinità . Questa si dice <u>positiva o diretta</u> se $|A| = ad - bc > 0$, si dice <u>negativa o inversa</u> se $|A| < 0$.

Altre Proprietà. In una affinità un punto (x,y) si dice unito se esso è il corrispondente di se stesso cioè se si ha

$$X = x , \qquad Y = y \ .$$

Deve quindi essere

(2)
$$\begin{cases} x = ax + by + p \\ y = cx + dy + q \end{cases} , \quad \rightarrow \quad \begin{cases} (a-1)x + by + p = 0 \\ (c-1)x + dy + q = 0 \end{cases} .$$

Vi è un punto unito, che si chiama centro dell'affinità , se risulta

(3) $$\begin{vmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{vmatrix} = ad - a - d + 1 - cb \neq 0 \ ,$$ cioè se risulta

(4) $ad - cb \neq a + d - 1$, ossia (4') $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq a + d - 1 \neq 0$

In una affinità una retta si dice unita (o fissa, o invariante) se essa è la corrispondente di se stessa. Inoltre questa retta si dice puntualmente invariante se è luogo di punti uniti; altrimenti essa si dice globalmente invariante .

43. Proprietà generali di una affinità

Sappiamo che le equazioni generali di una affinità sono:

(1) $$A = \begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases} , \quad \text{con} \quad |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 \ ,$$

Alcuni semplici esercizi ci permettono di dimostrare che una affinità gode delle seguenti proprietà:

a) muta rette in rette ;
b) a rette incidenti corrispondono rette incidenti;
c) a rette parallele corrispondono rette parallele;
d) il valore assoluto del determinante della matrice dell'affinità è uguale al rapporto k delle figure corrispondenti nell'affinità
e) al punto medio di un segmento corrisponde il punto medio del segmento corrispondente ;
f) non conserva in generale l'eguaglianza di segmenti ,
g) ultimo, l'affinità non conserva gli angoli e quindi la perpendicolarità fra rette non è una proprietà invariante .

Ci limitiamo a verificare la proprietà a) con un esercizio.

Data l'affinità $A = \begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = 2x - y + 1 \end{cases}$ e la retta r di equazione $r:\ x - 2y + 1 = 0$,

verificare che A muta r in se stessa .

Soluzione.

Si trova subito che la trasformazione A^{-1}, inversa di a, ha le equazioni:

(1) $$A^{-1} = \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}(x' + y' - 2) \\ y = \dfrac{1}{3}(2x' - y' - 1) \ . \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione di r si ha:

(2) $$\frac{1}{3}(x' + y' - 2) - \frac{2}{3}(2x' - y' - 1) + 1 = 0, \ \rightarrow \ x' + y' - 2 - 4x' + 2y' + 2 + 3 = 0$$

$$-3x' + 3y' + 30 = 0, \ \rightarrow \qquad (3) \qquad x' - y' - 1 = 0 \ .$$

Come si vede, l'affinità muta una retta in un'altra retta (diversamente orientata) .

44. Composizione di affinità

(G. Montanari: Le trasformazioni geometriche nel piano; Centro Programma-zione Editoriale ; Modena) .

Sono date le affinità di equazioni

(1) $A_1 \equiv \begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 2 \end{cases}$, $A_2 \equiv \begin{cases} x' = 2x + y - 1 \\ y' = x - y + 2 \end{cases}$, $A_3 \equiv \begin{cases} x' = 3x + 0 \\ y' = 0 + 5y \end{cases}$.

a) Verificare se le affinità A_1 e A_2 sono dirette o inverse e calcolare il rapporto k di affinità;

b) introdotto nell'insieme A delle affinità l'operazione di composizione o che presto vedremo, verificare che il prodotto $A_1 o A_2$ è ancora una affinità;

c) verificare che la legge di composizione interna o ora detta ammette un elemento neutro I , detto identità ;

d) verificare che l'operazione o introdotta nell'insieme A delle affinità non è commutativa;

e) verificare che ogni affinità A_2 ammette la trasformazione inversa A_2^{-1} e che si ha $A_2 o A_2^{-1} = I$;

f) verificare che è soddisfatta la proprietà associativa del prodotto, cioè che si ha:

$$(A_1 o A_2) o A_3 = A_1 o (A_2 o A_3) \ .$$

Per quanto riguarda il punto e), ricordiamo che una affinità A è una trasformazione lineare intera non degenere, e quindi essa è invertibile, ossia esiste una trasformazione inversa, che indicheremo con A^{-1}, che alla coppia (x', y') associa la coppia (x,y).

Fatte le verifiche, le proprietà indicate ci permettono di dire che l'insieme delle affinità, strutturato con l'operazione di composizione interna o, è una struttura algebrica di gruppo, in generale non commutativo.

Svolgimento a) Esaminiamo le affinità A_1 e A_2 . Si ha:

(2) $A_1 \equiv \begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 2 \end{cases}$, $\rightarrow ad - bc = 1 + 1 > 0$; affinità diretta, Rapporto di affinità . K=2 ;

(3) $A_2 \equiv \begin{cases} x' = 2x + y - 1 \\ y' = x - y + 2 \end{cases}$, $\rightarrow ad - bc = -2 - 1 < 0$; affinità inversa, rapp. aff. K=3 .

Si chiama prodotto di A_1 per A_2 , e si indica con il simbolo $A_2 o A_1$, la trasformazione ottenuta applicando successivamente la A_1 e la A_2 , cioè la trasformazione definita da

(3') $A_2 o A_1 \equiv \begin{cases} x' = 2(x - y + 1) + (x + y - 2) - 1 \\ y' = x - y + 1 - 1(x + y - 2) + 2 \end{cases}$, $\rightarrow \begin{cases} x' = 3x - y - 1 \\ y' = -2y + 5 \end{cases}$.

Quindi (4) $A_2 o A_1 \equiv \begin{cases} x' = 3x - y - 1 \\ y' = 0 - 2y + 5 \end{cases}$, con $ad - bc = -6$, affinità inversa .

b) L'operazione eseguita ci mostra chiaramente che il prodotto di due affinità è ancora una affinità ,

cioè $A_1 \equiv \begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 2 \end{cases}$, $\rightarrow ad - bc = 1 + 1 > 0$; affinità diretta,

rapporto di affinità $k = 2$; o è un'operazione interna all'insieme delle affinità .

c) Facciamo vedere che la legge di composizione sopra definita ammette come elemento neutro l'affinità I definita come segue :

(5) $$I \equiv \begin{cases} x' = x + 0 \\ y' = 0 + y \ , \end{cases} \qquad \text{con} \quad ad - bc = 1 \quad \text{(affinità diretta)} \ .$$

In questa affinità I ogni elemento è unito, ed essa è detta <u>identità</u> .

Facciamo vedere che si ha $A_2 o I = A_2$. Infatti , procedendo come al punto a), si ha :

(6) $$A_2 \equiv \begin{cases} x' = 2x + y - 1 \\ y' = x - y + 2 \ , \end{cases} \quad \rightarrow \quad A_2 o I \equiv \begin{cases} x' = 2x + y - 1 \\ y' = x - y + 2 \ ; \end{cases}$$

quindi (7) $A_2 o I = A_2$. Analogamente si dimostra che $I o A_2 = A_2$; pertanto l'identità I è l'elemento neutro per la legge di composizione o .

d) La legge di composizione interna o sopra considerata non è commutativa; infatti, troviamo il prodotto $A_1 o A_2$ e facciamo vedere che esso è diverso dal prodotto $A_2 o A_1$ della formula (4). Infatti, ricordiamo le affinità A_1 e A_2 :

/7) $$A_1 \equiv \begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 2 \ , \end{cases} \qquad A_2 \equiv \begin{cases} x' = 2x + y - 1 \\ y' = x - y + 2 \ , \end{cases}$$

Si ha (8) $$A_1 o A_2 \equiv \begin{cases} x' = 2x + y - 1 - (x - y + 2) + 1 \\ y' = 2x + y - 1 + (x - y + 2) - 2 \ , \end{cases} \qquad \text{ossia}$$

(8)

$$A_1 o A_2 \equiv \begin{cases} x' = x + 2y - 2 \\ y' = 3x - 1 \ , \end{cases}$$

mentre (9) $$A_2 o A_1 \equiv \begin{cases} x' = 3x - y - 1 \\ y' = 0 - 2y + 5 \ . \end{cases}$$

Le (8), (9) dimostrano che $A_2 o A_1 \neq A_1 o A_2$, cioè l'operazione o non è commutativa , quindi, se avremo una struttura di gruppo questa non sarà abeliana.

e) Consideriamo ancora la trasformazione A_2 e facciamo vedere che essa ammette una trasformazione inversa A_2^{-1} , tale che $A_2 o A_2^{-1} = I$. Infatti si ha :

$$A_2 \equiv \begin{cases} x' = 2x + y - 1 \\ y' = x - y + 2 \ , \end{cases} \quad \rightarrow \quad x' + y' = 3x + 1, \qquad \text{e quindi}$$

(10) $$x = \frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{1}{3} \ .$$

Sostituendo nella seconda equaz. dell'affinità A_2 si ha:

$$y' = \frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{1}{3} - y + 2 \ , \qquad \text{da cui}$$

(11) $$y = \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{5}{3} \ .$$

Abbiamo cosi che ogni affinità ha una trasformazione inversa . Nel nostro caso si ha :

(12) $$A_2^{-1} \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{5}{3} \ . \end{cases}$$

Ricordiamo la $A_2 \equiv \begin{cases} x' = 2x + y - 1 \\ y' = x - y + 2 \ , \end{cases}$ e calcoliamo $A_2 o A_2^{-1}$.

Sostituendo A_2^{-1} in A_2 si ha:

$$A_2 o A_2^{-1} \equiv \begin{cases} x = 2(\frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{5}{3}) - 1 \\ y = \frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{1}{3} - (\frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{5}{3}) + 2 \ ; \end{cases}$$

$$A_2 o A_2^{-1} \equiv \begin{cases} x = x' - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3}y' - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ , \end{cases} \quad \text{da cui} \quad A_2 o A_2^{-1} \equiv \begin{cases} x = x' \\ y = y' \ . \end{cases}$$

Infine (13) $$A_2 o A_2^{-1} = I \ .$$

Abbiamo così provato che il prodotto di una affinità e della sua reciproca è uguale all'<u>elemento neutro, o identità, I</u> .

f) Verifichiamo ora la proprietà associativa . Consideriamo una terza affinità

$$A_3 \equiv \begin{cases} x' = 3x + 0 \\ y' = 0 + 5y \ , \end{cases}$$

e facciamo vedere che si ha $(A_1 o A_2) o A_3 = A_1 o (A_2 o A_3)$.

Per comodità, mettiamo sotto l'occhio l'affinità $A_1 o A_2$, che già conosciamo , e A_3 . Si ha:

(*) $$A_1 o A_2 \equiv \begin{cases} x' = x + 2y - 2 \\ y' = 3x - 1 \ , \end{cases} \qquad A_3 \equiv \begin{cases} x' = 3x + 0 \\ y' = 0 + 5y \ . \end{cases}$$

Eseguendo la moltiplicazione come già sappiamo fare, si ha :

(*) $$(A_1 o A_2) o A_3 = \begin{cases} x' = 3x + 2 \cdot 5y - 2 \\ y' = 3(3x) + 0 - 1 \ , \end{cases}$$ da cui

(14) $$(A_1 o A_2) o A_3 = \begin{cases} x' = 3x + 10y - 2 \\ y' = 9x - 1 \ . \end{cases}$$

Calcoliamo ora preventivamente il prodotto $A_2 o A_3$, ricordando che :

(*) $$A_2 \equiv \begin{cases} x' = 2x + y - 1 \\ y' = x - y + 2 \ , \end{cases} \qquad A_3 \equiv \begin{cases} x' = 3x + 0 \\ y' = 0 + 5y \ . \end{cases}$$ Si ottiene:

(15) $$A_2 o A_3 = \begin{cases} x' = 6x + 5y - 1 \\ y' = 3x - 5y + 2 \end{cases} .$$

Possiamo ora calcolare il prodotto $A_1 o (A_2 o A_3)$, tenendo presente che:

(*) $$A_1 \equiv \begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 2 \end{cases} .$$

Si ottiene

(*) $$A_1(A_2 o A_3) = \begin{cases} x' = 6x + 5y - 1 - (3x - 5y + 2) + 1 \\ y' = 6x + 5y - 1 + (3x - 5y + 2) - 2 \end{cases} .$$ Si ricava

(16) $$A_1(A_2 o A_3) = \begin{cases} x' = 3x + 10y - 2 \\ y' = 9x - 1 \end{cases} .$$

Si ottiene che $(A_1 o A_2) o A_3 = A_1 o (A_2 o A_3)$, cioè o introdotta sull'insieme delle affinità gode della proprietà associativa .

Le verifiche effettuate ci permettono di dire che l'insieme delle affinità, strutturato con l'operazione di composizione interna o, è un gruppo non commutativo .

45. Problema sulle affinità

Fissato su un piano π un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la trasformazione

(1) $$T \equiv \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$$

che fa corrispondere rispettivamente ai punti A(0,0), B(0,1), C(2,0) i punti $A'(1,-3)$, $B'(1,-5)$, $C'(-3,-1)$ (fig.21). Dimostrare che la trasformazione è una affinità .

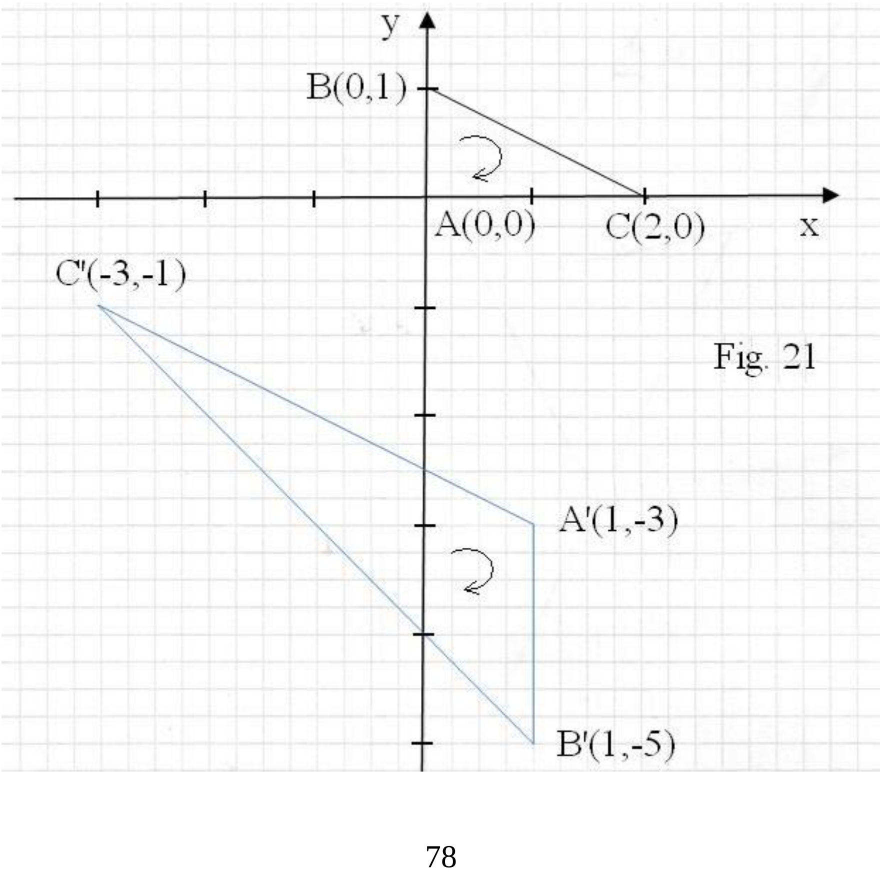


Fig. 21

Svolgimento . Si ha il seguente sistema risolvente di 6 equazioni in 6 incognite

(2) $$\begin{cases} 1 = p, \qquad 1 = 0 + b + p, \qquad -3 = 2a + p \\ -3 = q, \qquad -5 = d + q, \qquad -1 = 2c + q \ . \end{cases}$$

Si ricava $p = 1$, $q = -3$, $b + 1 = 1$, $2a + 1 = -3$, $d - 3 = -5$, $2c - 3 = -1$.

Soluzione : $a = -2$, $b = 0$, $p = 1$ e $c = 1$, $d = -2$, $q = -3$.

L'equazione della trasformazione è

(3) $$T = \begin{cases} x' = -2x + 0 + 1 \\ y' = x - 2y - 3 \end{cases} \qquad \text{con} \qquad |A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = +4 > 0 \ .$$

Si vede così che la trasformazione è una affinità diretta , con rapporto di affinità $k = 4$.

46. Equazione di una affinità con uno degli assi coordinati unito

L'asse delle ascisse ($y = 0$) è unito .In questo caso ogni punto $(h; 0)$ con $h \in R$ si deve trasformare in un punto $(h' ; 0)$.

Sostituendo nell'equazione dell'affinità:

(1) $$A = \begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \ , \end{cases}$$

si ottiene $\begin{cases} h' = ah + p \\ 0 = ch + q \ , \end{cases}$ ossia (2) $\begin{cases} ah + p = h' \\ ch + q = 0 \ . \end{cases}$

Poiché la (2) deve essere vera per qualsiasi valore di h deve essere necessariamente $c = q = 0$.

Pertanto le equazioni di una affinità con l'asse delle ascisse unito sono

(3) $$A = \begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = dy \ . \end{cases}$$

47. Affinità con tre coppie di punti corrispondenti

Scrivere le equazioni dell'affinità nella quale i tre punti $A(2;3)$, $B(-1;2)$, $C(3;-1)$ abbiano come corrispondenti i punti $A'(-1;1)$, $B'(0;4)$, $C'(-4;0)$ (fig. 22) .

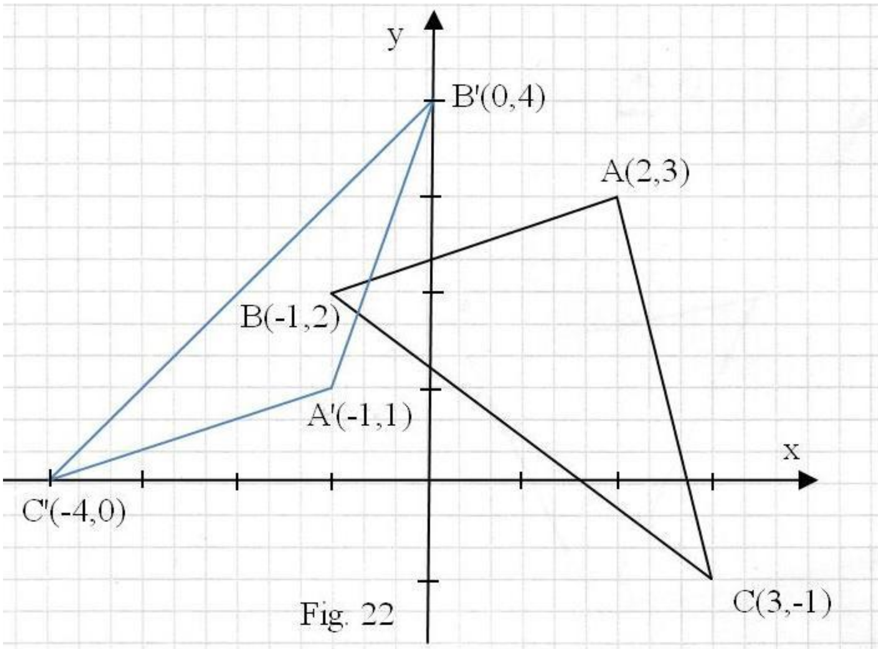


Fig. 22

Svolgimento

$$(1)\qquad \begin{cases} A' \to A \Rightarrow -1 = 2a + 3b + p \\ A' \to A \qquad 1 = 2c + 3d + q \\ B' \to B \qquad 0 = -a + 2b + p \\ B' \to B \qquad 4 = -c + 2d + q \\ C' \to C \quad -4 = 3a - b + p \\ C' \to C \qquad 0 = 3c - d + q \end{cases} \quad \text{ossia, ordinando,}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} -1 = 2a + 3b + p \\ 0 = -a + 2b + p \\ -4 = 3a - b + p \\ 1 = 2c + 3d + q \\ 4 = -c + 2d + q \\ 0 = 3c - d + q \end{cases} \cdot$$

Risolvendo il sistema si trova la soluzione

(3) $\quad a = -\dfrac{7}{13}, \quad b = \dfrac{8}{13}, \quad p = -\dfrac{23}{13}, \quad c = -1, \quad d = 0, \quad q = 3 .$

Le equazioni dell'affinità sono

$$(4)\qquad A \equiv \begin{cases} x' = -\dfrac{7}{13}x + \dfrac{8}{13}y - \dfrac{23}{13} \\ y' = -x + 3 \ . \end{cases}$$

48. Similitudini nel piano

Le similitudini sono particolari affinità in cui $b = \pm c$ e $d = \mp a$ ossia

(1) $\quad a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \quad e \quad ab + cd = 0$

Le sue equazioni sono:

$$(2)\qquad \Sigma = \begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \ , \end{cases} \quad \text{con} \quad a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \quad e \quad ab + cd = 0 \ .$$

In una similitudine rimane invariato il rapporto k fra le distanze di coppie di punti corrispondenti (A,B) e (A',B'), ossia

(3) $\quad \overline{A'B'} = k\overline{AB}$;

k è un numero reale positivo, detto rapporto di similitudine ; il suo valore è $k = \sqrt{a^2 + c^2}$.

La similitudine si dice concorde o diretta se $ad - bc > 0$: essa trasforma un poligono F in un poligono F' i cui vertici si susseguono nello stesso verso che essi hanno nella figura ** ; si ha una similitudine discorde se $ad - bc < 0$; essa trasforma un poligono F in un poligono F' in cui i vertici si susseguono in verso opposto a quello che essi hanno nella figura F.

Le equazioni (2) ci permettono di verificare che un similitudine ha la proprietà di trasformare

1) rette in rette ;
2) segmenti in segmenti di rapporto k ;

3) semipiani in semipiani ;
4) angoli in angoli di uguale ampiezza ;
5) aree in aree di rapporto k^2 (ossia $S' = k^2 \cdot S$) .
6) una similitudine ha un unico punto unito detto centro di similitudine .

Consideriamo le trasformazioni del piano

(4) $\Sigma_1 \equiv \begin{cases} x' = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}y + 1 \\ y' = \frac{5}{6}x + \frac{2}{3}y + 2 \end{cases}$, $\Sigma_2 \equiv \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2y + 1 \end{cases}$, $\Sigma_3 \equiv \begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$.

a) Verificare che le tre trasformazioni sono similitudini ;
b) studiare $\Sigma_2 o \Sigma_1$ e $\Sigma_1 o \Sigma_2$, dove o indica una operaz. di composizione interna all'insieme delle similitudini ;
c) verificare che ogni similitudine è invertibile ;
d) verificare che l'insieme delle similitudini ammette una similitudine identica I, che è un elemento neutro per l'operazione di composizione o .
e) verificare che il prodotto di una similitudine e della sua inversa è uguale ad I (es. $\Sigma_2 o \Sigma_2^{-1} = I$);
f) si riconosca che l'operazione interna o e la similitudine identica I
-
scono ad esso la struttura algebrica di gruppo .

Svolgimento

a) Si vede subito che per le tre trasformazioni si ha : $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ e $ab + cd = 0$, pertanto esse sono delle similitudini .
b) Calcoliamo ora i due prodotti richiesti. Si ha :

(*) $$\Sigma_2 o \Sigma_1 \equiv \begin{cases} x' = 2(\frac{2}{3}x - \frac{5}{6}y - 1) - (\frac{5}{6}x + \frac{2}{3}y + 2) \\ y' = 1(\frac{2}{3}x - \frac{5}{6}y - 1) + 2(\frac{5}{6}x + \frac{2}{3}y + 2) - 1 \end{cases} ,$$

(*) $$\Sigma_2 o \Sigma_1 \equiv \begin{cases} x' = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}y - 2 - \frac{5}{6}x - \frac{2}{3}y - 2 \\ y' = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}y - 1 + \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}y + 4 + 1 \end{cases} ,$$ e da questa si ha

(5) $$\Sigma_2 o \Sigma_1 \equiv \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{7}{6}y - 4 \\ y' = \frac{7}{6}x + \frac{1}{2}y + 4 \end{cases} .$$

Anche per la trasformazione (5) si vede subito che si ha $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ e $ab + cd = 0$, pertanto essa rappresentata una similitudine .

Con procedimento analogo si può dimostrare che si ha

(6) $$\Sigma_1 o \Sigma_2 \equiv \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{7}{3}y + \frac{1}{6} \\ y' = \frac{7}{3}x + \frac{1}{2}y + \frac{8}{3} \end{cases},$$

pertanto si ha : $\Sigma_2 o \Sigma_1 \neq \Sigma_1 o \Sigma_2$.

In modo analogo si riconosce che il prodotto, tramite l'operazione o , di due qualsiasi trasformazioni Σ è anche esso una similitudine. Pertanto l'operazione di composizione o è interna all'insieme Σ delle similitudini .

c) Riprendiamo la similitudine Σ_2 e calcoliamo la trasformazione inversa Σ_2^{-1} . Si ha

(*) $$\Sigma_2 \equiv \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2y + 1 , \end{cases} \rightarrow \Sigma_2 \equiv \begin{cases} 2x' = 4x - 2y \\ y' = x + 2y + 1 , \end{cases}$$

da cui si ricava

(7) $$x = \frac{2}{5}x' + \frac{1}{5}y' - \frac{1}{5} .$$

Poiché $y = 2x - x'$ subito si ottiene (8) $$y = -\frac{1}{5}x' + \frac{2}{5}y' - \frac{2}{5} .$$

Le equazioni (7), (8) ci permettono di scrivere la tra trasformazione Σ_2^{-1} , inversa di Σ_2

Scriviamo su un rigo Σ_2 e la similitudine Σ_2^{-1} . Si ha:

(9) $$\Sigma_2 \equiv \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2y + 1 , \end{cases} \qquad \Sigma_2^{-1} \equiv \begin{cases} x = \frac{2}{5}x' + \frac{1}{5}y' - \frac{1}{5} \\ y = -\frac{1}{5}x' + \frac{2}{5}y' - \frac{2}{5} . \end{cases}$$

Come subito si prova, anche Σ_2^{-1} è una similitudine .

d) Calcoliamo adesso con la nota regola il prodotto $\Sigma_2 o \Sigma_2^{-1}$. Si ha:

(*) $$\Sigma_2 o \Sigma_2^{-1} \equiv \begin{cases} x = 2\left(\frac{2}{5}x' + \frac{1}{5}y' - \frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{1}{5}x' + \frac{2}{5}y' - \frac{2}{5}\right) \\ y = \frac{2}{5}x' + \frac{1}{5}y' - \frac{1}{5} + 2\left(-\frac{1}{5}x' + \frac{2}{5}y' - \frac{2}{5}\right) + 1 , \end{cases}$$

(*) $$\Sigma_2 o \Sigma_2^{-1} \equiv \begin{cases} x = 2\left(\frac{2}{5}x' + \frac{1}{5}y' - \frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{1}{5}x' + \frac{2}{5}y' - \frac{2}{5}\right) \\ y = \frac{2}{5}x' + \frac{1}{5}y' - \frac{1}{5} + 2\left(-\frac{1}{5}x' + \frac{2}{5}y' - \frac{2}{5}\right) + 1 , \end{cases}$$

(*) $$\Sigma_2 o \Sigma_2^{-1} \equiv \begin{cases} x = \frac{4}{5}x' + \frac{2}{5}y' - \frac{2}{5} + \frac{1}{5}x' - \frac{2}{5}y' - \frac{2}{5} \\ y = \frac{2}{5}x' + \frac{1}{5}y' - \frac{1}{5} - \frac{2}{5}x' + \frac{4}{5}y' - \frac{4}{5} + 1 , \end{cases} \rightarrow$$

Si ricava $\Sigma_2 o \Sigma_2^{-1} = I \equiv \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$, cioè $\Sigma_2 o \Sigma_2^{-1} \equiv I$.

Quindi il prodotto $\Sigma_2 o \Sigma_2^{-1}$ ci dà la trasformazione identica I, la quale è anche essa una similitudine .
Infatti a=d=1 , b=0 , c=0 , ; quindi $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ ci dà $1 = 1$, mentre la condizione $ab + cd = 0$ si traduce nella condizione ovvia $0 = 0$.

Si vede subito che si ha

(10) $\Sigma_2 oI = \Sigma_2$, $Io\Sigma_2 = \Sigma_2$ e analoghe .

f) Si può verificare anche che l'operazione o gode della proprietà associativa ossia si ha

(*) $(\Sigma_1 o\Sigma_2)o\Sigma_3 = \Sigma_1 o(\Sigma_2 o\Sigma_3)$.

Possiamo concludere pertanto che l'insieme delle similitudini Σ , strutturato con l'operazione di composizione interna o , è un gruppo non commutativo .

49. Problema sulle similitudini

Consideriamo la trasformazione di equazioni

(1) $$\Sigma \equiv \begin{cases} x' = 2x - y - 2 \\ y' = x + 2y - 1 \, . \end{cases}$$

a) Verificare che essa è una similitudine diretta, trovare il rapporto di similitudine e il centro;
b) verificare se se la trasformata della retta r di equazione $y = 2x$ è una retta ad essa parallela;
d) dato il triangolo di vertici A(0;1) , B(0;0) , C(3;0) trovare il suo trasformato nella (1) e darne una rappresentazione grafica .

<u>Svolgimento</u>

a) Abbiamo $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$, $d = 2$. La condizione per avere una Σ è $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$; condizione verificata perché essa dà $5 = 5$. Inoltre si ha: $ad - bc = 2 \cdot 2 + 1 = 5 > 0$. Si conclude che la trasformazione Σ è una similitudine diretta di coefficiente $k = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{5}$.

Per trovare il centro di similitudine basta porre nella (1) $x' = x$ e $y' = y$. Si ha il sistema :

(2) $$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 1 \, . \end{cases}$$

Risolvendo, si trova che il centro della similitudine è il punto unito $C(3/2; -1/2)$.

b) La (1), essendo una trasformazione lineare non degenere, ammette la trasformazione inversa. Si trova , procedendo come sempre, che questa ha le equazioni

(3) $$\Sigma^{-1} \equiv \begin{cases} x = (2/5)\, x' + y'/5 + 1 \\ y = (2/5)x' - (1/5)y' \, . \end{cases}$$

Applicando la Σ^{-1} alla retta $y = 2x$ si ha:

(4) $\frac{2}{5}y'-\frac{1}{5}x'=\frac{4}{5}x'+\frac{2}{5}y'+2$, ossia (5) $x'=-2$.

Ne segue che r’ non è parallela alla retta r .

c) Veniamo ora al triangolo di vertici A(0;1) , B(0;0), C(3;0) . Si trova con i soliti calcoli che il triangolo trasformato ha i vertici $A'(-3;-1)$, $B'(-2;-1)$, $C'(4;2)$ (fig. 23) .

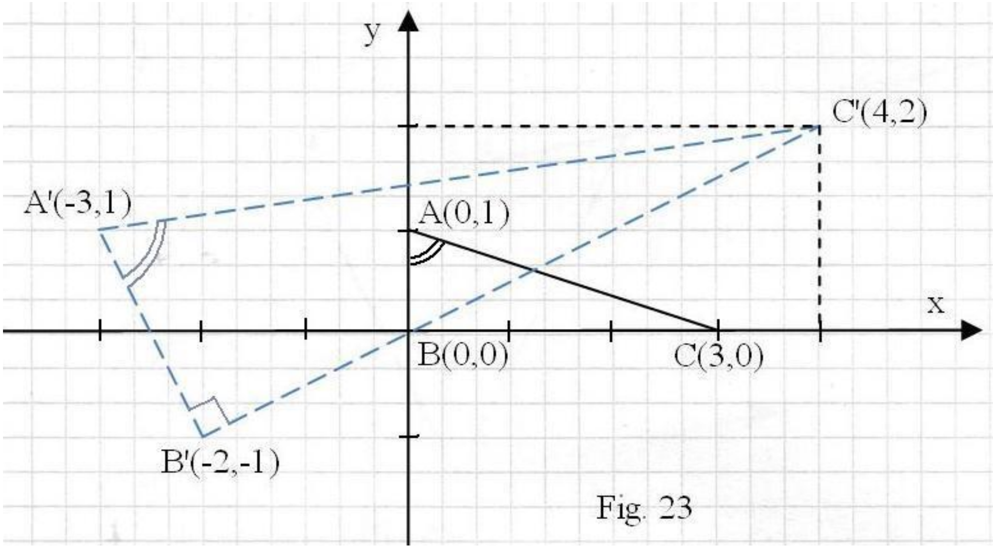


Fig. 23

Limitiamoci a trovare C'.
Dal sistema (1) si ha:

(5) $\begin{cases} x'=2\cdot 3-2 \\ y'=3-1\,. \end{cases}$ Si ricava $x'=4$, $y'=2$, quindi $C'(4;2)$.

La figura mostra che abbiamo due triangoli rettangoli simili diversamente disposti nel piano .

ISOMETRIE

50. Equazioni di una isometria

Si chiamano isometrie le similitudini per la quali <u>il rapporto di similitudine è $k=1$</u> . Esse possono essere <u>dirette</u> o <u>con ribaltamento</u> .

Le isometrie dirette hanno le equazioni

(1) $$\begin{cases} x' = ax - by + p \\ y' = bx + ay + q \end{cases} , \qquad \text{con} \qquad a^2 + b^2 = 1 \ .$$

In queste trasformazioni due figure corrispondenti sono <u>direttamente congruenti</u> .

Le isometrie con ribaltamento hanno le equazioni

(2) $$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = bx - ay + q \end{cases} , \qquad \text{con} \qquad a^2 + b^2 = 1 \ .$$

In queste isometrie una figura è congruente alla sua simmetrica rispetto ad una retta .

Le isometrie comprendono <u>le traslazioni, le rotazioni e le simmetrie assiali</u> .

In forma trigonometrica le equazioni (1) e (2) diventano rispettivamente:

(3) $$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha + p \\ y' = x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha + q \end{cases} ,$$

(4) $$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha + p \\ y' = x\operatorname{sen}\alpha - y\cos\alpha + q \end{cases} ;$$

in queste formule α rappresenta la misura in gradi o in radianti dell'angolo di rotazione preso in senso antiorario .

ESEMPIO

Se si ha una rotazione in senso antiorario di ampiezza $\alpha = 60^o$ e di centro O(0;0) allora si ha
* $p = q = 0$ $\cos\alpha = 1/2$, $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{3}/2$ e le (3) diventano

(5) $$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} y \\ y' = x\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{y}{2} y \ . \end{cases}$$

51. Le geometrie dal punto di vista delle trasformazioni

Abbiamo studiato alcune trasformazioni geometriche elementari del piano , illustrandole con opportuni esempi. Esse ci hanno consentito di scoprire alcune proprietà che si conservano nel passaggio da una figura F alla sua trasformata F', proprietà che vengono dette invarianti .

Fu merito di Felix Klein , famoso matematico tedesco (1849; 1925), aver chiarito il legame esistente tra Geometria e Teoria dei gruppi . Egli, infatti, mostrò come il concetto algebrico di gruppo potesse servire a caratterizzare le varie geometrie .

Nel suo “Programma di Erlangen” (1872), Klein affermò che “ogni geometria è lo studio delle proprietà che restano invarianti rispetto ad un determinato gruppo di trasformazioni” .In tal modo egli giunse alla classificazione delle geometrie.
Possiamo riferirne alcune che abbiamo già visto .

a) Geometria affine : è lo studio delle proprietà delle figure che restano invariate rispetto al gruppo delle affinità;
b) Geometria simile : è lo studio delle proprietà delle figure che restano invariate rispetto al gruppo delle similitudini;
c) Geometria metrica o euclidea : è il gruppo delle trasformazioni affini il cui determinante è uguale a ± 1 .

Vogliamo insistere sul fatto che l’idea fondamentale di Klein è che ogni geometria può essere caratterizzata da un gruppo di trasformazioni e che il vero oggetto della geometria sono le <u>proprietà invarianti rispetto a questo gruppo di trasformazioni</u> .

Inoltre, una sottogeometria di una geometria data è l’insieme delle proprietà che sono invarianti rispetto a ciò che sono le trasformazioni di un sottogruppo del gruppo originale. Con questa definizione tutti i teoremi di una geometria corrispondente ad un dato gruppo <u>continuano ad essere validi in una geometria corrispondente al sottogruppo</u> . Per citare un esempio, le trasformazioni affini costituiscono un sottogruppo del gruppo proiettivo.

Avvertiamo che non tutta la geometria può essere incorporata nello schema di Klein : ad esempio la geometria algebrica e quella differenziale non possono essere inquadrate in questo schema .

52. Equazioni di una omologia generale

(Articolo del Prof. Tomaso Millevoi dell’Università di Padova) .
Un noto Teorema dice : “Un’omologia è individuata dall’asse u, dal centro C e da una ulteriore coppia B, B’ di punti corrispondenti “ .
Se il centro non appartiene all’asse, l’omologia si dice non singolare . Vogliamo trovare le equazioni di una omologia φ non singolare .

Scegliamo allora un sistema di coordinate proiettive (O, x_1, x_2, x_3) tale che il centro C dell’omologia sia uno dei punti fondamentali C(0,0,1), e l’asse u sia la retta fondamentale non passante per C, cioè la retta di equazione $x_3 = 0$. Le equazione di una generica omologia φ sono

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \qquad \text{con } |A| = \det|a_{ik}| \neq 0 \; .$$

Avendo scelto come si è detto il sistema di riferimento, le equazioni soddisfano alle seguenti condizioni:

a) poiché C(0,0,1) è un punto unito si ha
$$a_{13} = 0 \;, \qquad a_{23} = 0 \;;$$
b) poiché anche gli altri due punti fondamentali A_1 (1,0,0) , A_2 (0,1,0) sono uniti si hanno le relazioni
$$a_{21} = a_{31} = 0 \;, \text{ e } \quad a_{12} = a_{32} = 0 \;.$$

Quindi le equazioni dell’omologia sono date dal sistema

(2) $$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 \\ y_2 = a_{22}x_2 \\ y_3 = a_{33}x_3 \end{cases} .$$

c) Inoltre , poiché ogni punto $P(r,s,0)$ dell'asse u è unito si ha :

(3) $$\rho r = a_{11}\cdot r \ , \qquad \rho s = a_{22}\cdot s$$

e dunque $$a_{11} = a_{22} = \rho \ .$$

Le equazioni dell'omologia risultano allora

(3) $$\begin{cases} y_1 = \rho x_1 \\ y_2 = \rho x_2 \\ y_3 = a_{33}x_3 \end{cases} .$$

Da qui si vede che punti corrispondenti sono allineati con il centro C, ossia che è nullo il determinante

(4) $$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \rho x_1 & \rho x_2 & a_{33}x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Infatti, sviluppando il determinante secondo gli elementi dell'ultima riga si ha:

$$\rho x_1 x_2 - \rho x_2 x_1 = 0 \,.$$

Per l'omogeneità delle coordinate, possiamo dividere i coefficienti delle equazioni (3) per a_{33} . Ponendo poi $k = \rho / a_{33}$ otteniamo:

(5) $$\begin{cases} y_1 = kx_1 \\ y_2 = kx_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} .$$

Abbiamo così dimostrato che una omologia non singolare, se si sceglie il primo vertice del triangolo fondamentale delle coordinate coincidente con il centro della omologia e gli altri due vertici sull'asse della stessa, ha le (5) come equazioni .

Se ora B è un punto non unito dell'omologia φ e B' il suo corrispondente, possiamo porre $B(b_1, b_2, 1)$, $B'(b_1', b_2', 1)$ risulta

$$b_1'/b_1 = b_2'/b_2 = k \ (\neq 1)$$

e le equazioni della φ sono perfettamente individuate; ciò dimostra il teorema citato all'inizio.

53. Omotetie come caso particolare delle omologie (3ª versione)

Consideriamo ora un piano metrico α ampliato con la retta impropria e su questo piano consideriamo una omologia φ non singolare avente come asse u la retta impropria e come centro un punto C , ovviamente proprio.

Scegliamo su α un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (O, x, y) avente l'origine $O \equiv C$, e consideriamo il sistema associato di coordinate omogenee (O, x_1, x_2, x_3) , ove $x = x_1/x_3$, $x = x_2/x_3$.

Con riferimento a questo sistema la retta impropria ha l'equazione $x_3 = 0$, e il centro C, coincidente con l'origine O del riferimento cartesiano, ha le coordinate $C(0,0,1)$. Per quanto visto nel **N.** precedente, φ ha allora le equazioni:

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} y_1 = kx_1 \\ y_2 = kx_2 \\ y_3 = x_3 \quad ; \end{cases}$$

queste, con riferimento a coordinate non omogenee, diventano:

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \quad . \end{cases}$$

Queste equazioni , come ben sappiamo, sono quelle di una omotetia con centro nell'origine O e di rapporto k.

Abbiamo così dimostrato che una omologia non singolare avente come asse la retta impropria è una omotetia. Anche il viceversa è immediato.

Consideriamo ora una circonferenza γ di centro $P_o(x_o, y_o)$ e raggio r , e dunque di equazione $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$.

L'omotetia di equazioni (6) trasforma γ in una circonferenza γ' di equazione

$$(x'/k - x_o)^2 + (y'/k - y_o)^2 = r^2 \ .$$

Moltiplicando ogni termine per k^2 otteniamo l'equazione

$$(x' - kx_o)^2 + (y' - ky_o)^2 = k^2 \cdot r^2 \ ;$$

essa rappresenta la circonferenza di centro $P'_o(kx_o, ky_o)$ [che è il corrispondente di P_o tramite la φ] e raggio $|k|r$.

Dunque : una omotetia φ di rapporto k trasforma una circonferenza γ in una circonferenza γ' avente il centro nel trasformato del centro di γ e raggio uguale a $|k|$ volte il raggio r di questa .

54. Affinità tra piani

(E. Martinelli; Geom. Descrittiva, pag. 150)

Riprendiamo lo studio delle affinità solo per far vedere come esse si possono studiare in un piano euclideo ampliato con la sua retta impropria.

Stabiliamo su due piani sovrapposti π e π' due sistemi di coordinate cartesiane omogenee $Ox_1x_2x_3$, $O'x'_1x'_2x'_3$ e consideriamo una omografia fra i due piani.

Le coordinate di punti corrispondenti nella omografia sono legate dalla sostituzione lineare non degenere

$$\text{(1)} \qquad T: \begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \quad , \end{cases} \qquad \text{con } |A| = \det|a_{ik}| \neq 0 \ .$$

Risulta allora che alla retta impropria $x'_3 = 0$ di π' corrisponde su π la retta di equazione

(2) $$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \ ,$$

che dicesi retta limite di π.

Consideriamo ora la trasformazione inversa della (1) . Si ha:

(3) $$T^{-1} \ : \ \begin{cases} x_1 = a'_{11}x'_1 + a'_{21}x'_2 + a'_{31}x'_3 \\ x_2 = a'_{12}x'_1 + a'_{22}x'_2 + a'_{32}x'_3 \\ x_3 = a'_{13}x'_1 + a'_{23}x'_2 + a'_{33}x'_3 \ , \end{cases} \qquad \text{con} \ \left|A^{-1}\right| = \det\left|a'_{i\,k}\right| \neq 0 \ .$$

La trasformazione (3) ci permette di dire che alla retta impropria $x_3 = 0$ di π corrisponde sul piano π' la retta

(4) $$a'_{13}x'_1 + a'_{23}x'_2 + a'_{33}x'_3 = 0 \ ,$$

che dicesi retta limite di π' .

In coordinate non omogenee x,y la retta limite (2) del piano π diventa

(5) $$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0 \ .$$

Le due rette limite di una omografia sono in generale proprie, ma se una di esse è impropria anche l'altra è impropria, giacché nell'omografia si corrispondono le rette all'infinito dei due piani .

Dicesi affinità una omografia fra due piani nella quale si corrispondono le due rette improprie .

Una affinità muta punti propri in punti propri e punti impropri in punti impropri. Se i due piani sui quali è definita l'omografia sono sovrapposti , essa muta la retta impropria in se stessa.
Altre proprietà: una affinità muta rette parallele in rette parallele e quindi un parallelogramma in un parallelogramma e segmenti equipollenti in segmenti equipollenti.
Fra due rette proprie corrispondenti r ed r' l'affinità subordina una similitudine .

La condizione necessaria e sufficiente perché le equazioni (1) di una omografia rappresentino una affinità è che l'equazione

(5) $$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$$

sia equivalente alla $x_3 = 0$, cioè che sia $a_{31} = a_{32} = 0$.
Le equazioni di una affinità sono pertanto del tipo

(6) $$T: \quad \begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{33}x_3 \ , \end{cases}$$

con $$\det\left|a_{ik}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Dividendo membro a membro la prima e la seconda equazione del sistema (6) per la terza, possiamo scrivere le equazioni dell'affinità in coordinate non omogenee:

(7) $\begin{cases} x' = b_{11}x + b_{12}y + b_{13} \\ y' = b_{21}x + b_{22}y + b_{23}, \end{cases}$ con $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

55. Su un problema di Apollonio

Nell'introduzione al libro VII della "Collezione Matematica" il geometra Pappo (III secolo d. C.) ci fa conoscere il seguente famoso teorema: " Dati nel piano due sistemi di due rette ciascuno, trovare i punti C del piano tali che il prodotto delle distanze del punto C dalle rette del primo sistema sia uguale al prodotto delle distanze di C dalle rette del secondo sistema" .

Pappo ci dice che il problema era stato risolto da Apollonio di Perge (III secolo a.C.), il quale aveva mostrato che il punto C sta su una sezione conica.
A distanza di secoli il problema di Apollonio è stato ripreso da Cartesio, nella sua Géometrie, il quale ne indica la soluzione seguendo i metodi della Geometria Analitica. Della versione cartesiana del problema parlano molti storici della Matematica; ma, che io sappia, non ci sono pervenuti esercizi che lo illustrano concretamente. Ciò si vuole fare in questa occasione.

<u>Soluzione</u>
Dato nel piano un riferimento cartesiano ortogonale monometrico Oxy, si consideri il sistema di rette $a:\ X-2Y+8=0$, $b:\ 2X-Y+3=0$ e un secondo sistema dato da $c:\ Y=0$, $d:\ X+4Y-24=0$ (fig. 18) .

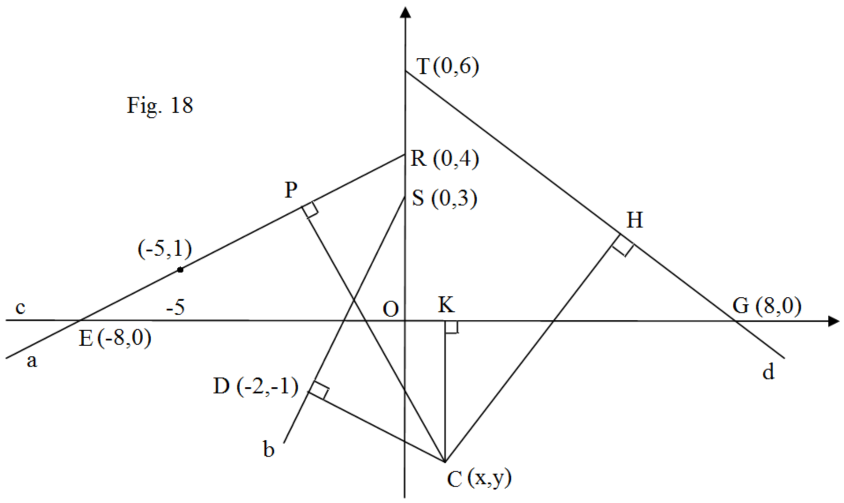


Fig. 18

Sia $C(x,y)$ il punto del piano da cui si prendono le distanze e indichiamo in generale le rette con le scritture $a:\ a_1X+b_1Y+c_1=0$, $b:\ a_2X+b_2Y+c_2=0$ e analoghe .

Eguagliando i prodotti delle distanze del punto C(x,y) dai due sistemi di rette si ha l'equazione del luogo; questa è:

(1) $$\frac{(a_1x+b_1y+c_1)\cdot(a_2x+b_2y+c_2)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}} = \frac{(a_3x+b_3y+c_3)\cdot(a_4x+b_4y+c_4)}{\sqrt{a_3^2+b_3^2}\cdot\sqrt{a_4^2+b_4^2}} \ .$$

Nel nostro caso si ha:

(2) $$\frac{(x-2y+8)\cdot(2x-y+3)}{\cancel{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}} = \frac{y\cdot(3x+4y-24)}{\cancel{1\cdot\sqrt{25}}} \ .$$ Ne segue

- $2x^2 - \underline{xy} + 3x - \underline{4xy} + \underline{\underline{2y^2}} - 6y + \underline{16x} - 8y + 24 = \underline{3xy} + \underline{\underline{4y^2}} - 24y \quad \rightarrow$

(3) $$2x^2 - 8xy - 2y^2 + 19x + 10y + 24 = 0\ .$$

La (3) ci dice che il luogo dei punti C(x,y) da cui vengono prese le distanze, eguagliandone i due prodotti, è una conica, e precisamente è un'iperbole equilatera, essendo $a_{11} + a_{22} = 0$.
Con ciò il nostro asserto è dimostrato .

Vogliamo condurre un rapido studio dell' iperbole.
L'equazione dei diametri coniugati è

- $\lambda(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + \mu(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0$, ossia

(4) $$\lambda(4x - 8y + 19) + \mu(-8x - 4y + 10) = 0\ .$$

I punti impropri della conica sono dati dalle radici dell'equazione :

(5) $$a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda\mu + a_{22}\mu^2 = 0\ , \quad \rightarrow \quad 2\lambda^2 - 8\lambda\mu - 2\mu^2 = 0\ .$$

Equaz. di secondo grado che ha le radici $\lambda = 2 \pm \sqrt{5}$, $\mu = 1$.
Sostituendo questi valori nella (4) si ottengono le polari dei punti impropri dell'iperbole, cioè i suoi asintoti :

(6) $$\begin{aligned} &4\sqrt{5}x - (20 + 8\sqrt{5})y + 19\sqrt{5} + 48 = 0 \\ &4\sqrt{5}x + (20 + 8\sqrt{5})y + 19\sqrt{5} - 48 = 0\ . \end{aligned}$$

Le equazioni degli assi dell'iperbole si ottengono sostituendo nella (4) le radici dell'equazione .

(7) $$a_{12}\lambda^2 + (a_{22} - a_{11})\lambda\mu - a_{21}\mu^2 = 0\ , \rightarrow \quad \lambda^2 + \lambda\mu - \mu^2 = 0\ .$$

Procedendo nei calcoli come sopra fatto, si trovano le equazioni degli assi:

(8) $$\begin{aligned} &(20 + 4\sqrt{5})x - 8\sqrt{5}y + 19\sqrt{5} - 1 = 0 \\ &(20 - 4\sqrt{5})x + 8\sqrt{5}y - 19\sqrt{5} - 1 = 0\ . \end{aligned}$$

Enrico Giusti: Natura degli Oggetti Matematici ; Boringhieri pp. 115.116 .

56. Coniche omologiche

Teorema "Se due coniche di un piano si toccano in un punto esistono due omologie, generalmente distinte, che trasformano una conica nell'altra " .

Illustriamo il teorema con il seguente esercizio.
Un'ellisse Γ è tangente internamente ad una circonferenza K in un punto fisso C ed è tagliata da questa secondo un arco per i cui estremi passa una retta (asse) u . Le rette condotte dal punto C tagliano quindi le coniche Γ e K (o i loro archi) rispettivamente nei punti A , A' , o B, B' .

Dato un riferimento cartesiano Oxy , sia :

1) Γ : $x^2 + 2y^2 = 9$ l'equazione dell'ellisse;

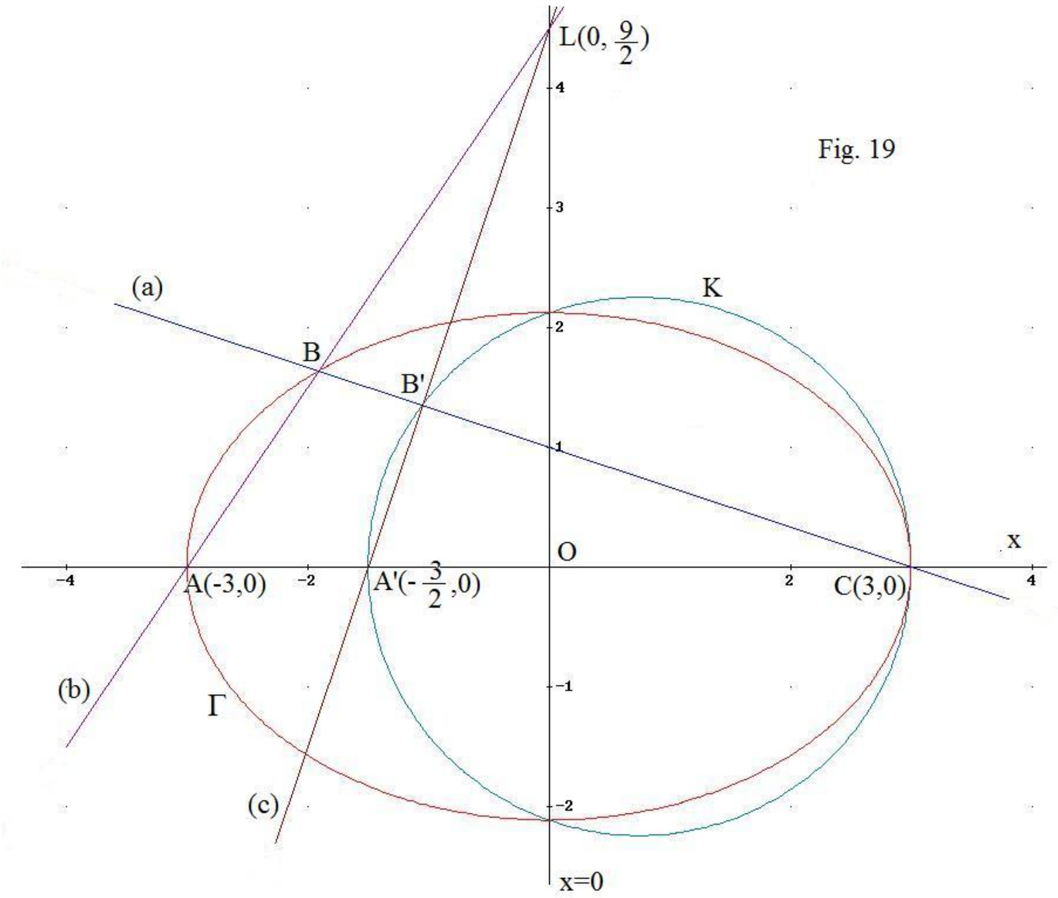
2) K : $2x^2 + 2y^2 - 3x - 9 = 0$ l'equazione della circonferenza ;

3) C(3;0) il punto di tangenza delle due coniche .

Si vede subito che: a) l'ellisse Γ taglia l'asse x nei punti $A(-3;0)$ e $C(3;0)$; b) la circonferenza K taglia l'asse x nei punti $A'(-3/2;0)$ e nel precedente punto C $(3;0)$, che pertanto è il punto di contatto fra le due coniche ; c) le due coniche si intersecano in due punti dell'asse y (fig. 19) .

Passiamo ad un sistema di coordinate omogenee $Ox_1x_2x_3$ e troviamo le equazioni dell'omologia che ha il centro $C(3,0,1)$, come asse u la retta $x_1 = 0$ (asse y) e come corrispondenti i punti $A(-3;0;1)$ e $A'(-3/2;0;1)$ (essa è perfettamente individuata da questi elementi) . Per individuare l'asse dell'omologia basta assegnare due punti giacenti su di esso, esempio $(0;1;1)$ e $(0;-1;1)$. Trascuriamo di spiegare che l'asse $x_1 = 0$ è luogo di punti uniti .

Imponendo le varie condizioni , si ha un sistema risolvente di 12 equazioni in 13 incognite. Poiché i coefficienti a_{ik} sono determinati a meno di un coefficiente di proporzionalità , possiamo risolvere il sistema dando ad uno di essi un valore opportuno.



$$
(4)\qquad \left\{\begin{array}{ll}
3\rho = 3a_{11} + 0 + \cancel{a_{13}} & \\
0 = 3\cancel{a_{21}} + 0 + \cancel{a_{23}} \; * & \to \; (3,0,1) \to (3,0,1) \\
\rho = 3a_{31} + 0 + a_{33} & \\
 & \\
0 = 0 + \cancel{a_{12}} + \cancel{a_{13}} \; \bullet & \\
m = 0 + a_{22} + a_{23} & \to \; (0,1,1) \to (0,1,1) \\
m = 0 + a_{32} + a_{33} & \\
 & \\
0 = 0 - \cancel{a_{12}} + \cancel{a_{13}} \; \bullet & \\
-n = 0 + a_{22} + a_{23} & \to \; (0;-1;1) \to (0;-1;1) \\
n = 0 - a_{32} + a_{33} & \\
 & \\
-3t/2 = -3a_{11} + 0 + \cancel{a_{13}} & \\
0 = -3\cancel{a_{21}} + 0 + \cancel{a_{23}} \; * & \to \; (-3;0;1) \to (-3/2;0;1) \\
t = -3a_{31} + 0 + a_{33} \; . &
\end{array}\right]
$$

Dalle equazioni segnate con il punto ($\bullet$) subito si ricava $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$. Posto poi $a_{11} = 1$, dalla prima e dalla terzultima equazione del sistema si ricava $\rho = 1$ e $\frac{1}{2}t = a_{11} = 1$, da cui $t = 2$. Inoltre, le equazioni segnate con asterisco (*) subito ci danno $a_{21} = 0$, $a_{23} = 0$. Procedendo nei calcoli, possiamo trovare tutti i coefficienti e quindi le equazioni dell'omologia :

(T) $$\rho x'_1 = x_1 \;, \qquad \rho x'_2 = \frac{3}{2}x_2, \qquad \rho x'_3 = -\frac{1}{6}x_1 + \frac{3}{2}x_3 \; .$$

Facciamo vedere che rette corrispondenti nella T si intersecano sull'asse della omologia.
Infatti, dal punto C(3,0,1) conduciamo la retta (a) che taglia l'asse y nel punto di ordinata $y = 1$: la sua equazione è $x = 3 - 3y$.

Per trovare il punto di intersezione B con l'ellisse Γ basta risolvere il sistema:

(S) $$\begin{cases} x = 3 - 3y \\ x^2 + 2y^2 = 9 \; . \end{cases}$$ Si trova $B\left(-\frac{21}{11};\; \frac{18}{11}\right)$.

Possiamo ora trovare l'equazione della retta r_{AB} . Si ha r_{AB} : $2y - 3x - 9 = 0$.
Essa interseca l'asse u nel punto $L\left(0; \frac{9}{2}\right)$.

Troviamo ora il punto di intersezione B' della retta $a \equiv CB$ con la circonfe-renza ; basta risolvere il sistema

(S_1) : $x = 3 - 3y$, $2x^2 + 2y^2 - 3x - 9 = 0$.

Scartando la soluz. $y = 0$, corrispondente al punto C, si ottiene $B'\left(-\frac{21}{20};\; \frac{27}{20}\right)$.

Con semplici calcoli si trova che l'equaz. della retta $r_{A'B'}$ è: $6x-2y+9=0$. Essa interseca l'asse y nel punto $L(0;9/2)$.

Risulta così dimostrato che le rette AB e $A'B'$ si incontrano in uno stesso punto L dell'asse dell'omologia e pertanto esse sono rette corrispondenti .

Punti corrispondenti nella T sono dati dalle coppie (A, A') e (B, B') .

Facciamo ora vedere che le due coniche Γ e K sono omologiche e a tale scopo troviamo la trasformazione T^{-1}, inversa della T . Subito si ricava :

(5) T^{-1} : $x_1 = \rho x_1'$, $x_2 = \frac{2}{3}\rho x_2'$, $x_3 = \frac{1}{9}\rho x_1' + \frac{2}{3}\rho x_3'$.

Scriviamo preventivamente l' equaz. dell'ellisse in coordinate omogenee :

(6) Γ : $x_1^2 + 2x_2^2 - 9x_3^2 = 0$.

Sostituiamo le (5) nella (6) e procediamo nei calcoli. Si ha di seguito:

- $$\rho^2 x_1'^2 + 2\frac{4}{9}\rho^2 x_2'^2 - 9\rho^2\left(\frac{x_1'}{9} + \frac{2}{3}x_3'\right)^2 = 0 ,$$
- $$x_1'^2 + \frac{8}{9}x_2'^2 - 9\left(\frac{x_1'^2}{81} + \frac{4}{9}x_3'^2 + \frac{4}{27}x_1'x_3'\right) = 0 ,$$
- $$x_1'^2 + \frac{8}{9}x_2'^2 - \frac{x_1'^2}{9} - 4x_3'^2 - \frac{4}{3}x_1'x_3' = 0 ,$$
- $$2x_1'^2 + 2x_2'^2 - 3x_1'x_3' - 9x_3'^2 = 0 ,$$
-

Se passiamo a coordinate non omogenee ponendo $x_1'/x_3' = x'$, $x_2'/x_3' = y'$ si ha :

(7) $2x'^2 + 2y'^2 - 3x' - 9 = 0$.

Come si vede, l'omologia trasforma l'ellisse Γ nella circonferenza K .

Bibliografia (per la parte teorica)

G. Castelnuovo : Geometria Vol . I , C. Ed. Dante Alighieri, 1904 – pag . 456 .

<u>Seconda parte</u>. Siano α e α' i piani sovrapposti su cui sono dati i due rif. distinti $Ox_1x_2x_3$ ed $O'x_1'x_2'x_3'$. Riprendiamo la terza equazione della trasformazione T

(8) $\rho x_3' = -\frac{1}{6}x_1 + \frac{3}{2}x_3$

e poniamo $x_3' = 0$; si ottiene l'equazione $x_1 - 9x_3 = 0$.

Essa è la <u>seconda retta limite dell'omologia</u> , cioè è la retta del piano α che si trasforma nella retta impropria $x_3' = 0$ del piano α' .

La teoria ci dice che una conica F del piano α tangente alla retta limite $x_1 - 9x_3 = 0$ si muta, tramite la trasformazione inversa T^{-1} della T, in una parabola .

Infatti, prendiamo come conica F la circonferenza (9) $(x-6)^2+y^2=3^2$

ossia, in coordinate omogenee, (10) $x_1^2+x_2^2-12x_1x_3+27x_3^2=0$,

e applichiamo la trasformazione T^{-1} di equazioni

(11) $x_1=\rho x_1'$, $x_2=\dfrac{2}{3}\rho x_2'$, $x_3=\dfrac{1}{9}\rho x_1'+\dfrac{2}{3}\rho x_3'$.

Fatte le sostituzioni e le dovute semplificazioni, s trova la parabola

(12) $10x_2'^2-9x_1'x_3'+27x_3'^2=0$, ossia (13) $10y'^2-9x'+27=0$.

Tracciando la figura con i dati di questa seconda parte, si verifica facilmente l'esattezza del procedimento seguito .

57. Teorema di Dèsargues sui triangoli omologici

(E. Martinelli; Geometria II, pag. 42) . Dimostriamo, giovandoci delle coordinate proiettive, il seguente teorema sui triangoli omologici (dovuto a Désargues) :

" Consideriamo su uno stesso piano due triangoli $A_1A_2A_3$ e $B_1B_2B_3$. Se le rette congiungenti i vertici omologhi A_i, B_i (i=1,2,3) passano per uno stesso punto U, i punti di intersezione dei lati omologhi A_iA_j, B_iB_j (i,j=1,2,3) stanno su una stessa retta, e viceversa ".

Dimostrazione

Assumiamo il triangolo $A_1A_2A_3$ come triangolo fondamentale di un riferi-mento proiettivo e il punto U, comune alle tre rette A_iB_i ,come punto unità .

Le coordinate di B_1 si ottengono allora come combinazioni lineari delle coordinate di $A_1(1,0,0)$ e $U(1,1,1)$, pertanto si ha $B_1(\lambda+1;1;1)$. Analogamente risulta $B_2(1;\mu+1;1)$ e $B_3(1;1;\nu+1)$.

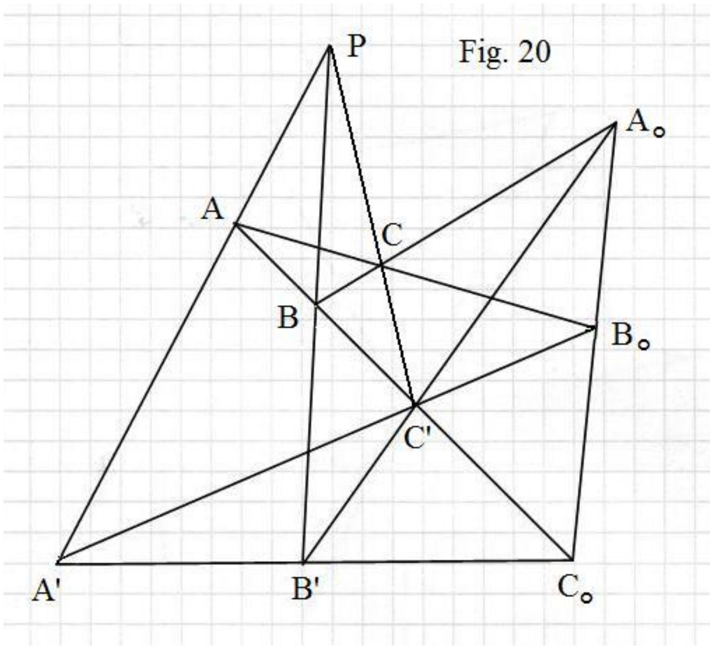
Ora, il punto K_{23} che ha come coordinate la differenza delle coordinate omonime di B_2, B_3, cioè $(0,\mu,-\nu)$, ha nulla la prima coordinata , pertanto esso appartiene simultaneamente alla retta B_2B_3 e alla retta A_2A_3, la quale ha l'equazione $\xi_1=0$.

Analogamente il punto di intersezione dei lati omologhi A_3A_1 e B_3B_1 è $K_{31}(-\lambda,0,\nu)$ e quello dei lati A_1A_2 e B_1B_2 è $K_{12}(\lambda,-\mu,0)$.

L'allineamento di punti K_{23}, K_{31}, K_{12} segue dall'identità

(1)
$$\begin{vmatrix} 0 & \mu & -\nu \\ -\lambda & 0 & \nu \\ \lambda & -\mu & \nu \end{vmatrix} = 0 .$$

La Fig. 20 mostra che i tre punti considerati giacciono su una retta.



La parte inversa del teorema si dimostra per dualità .