La trisettrice di Ippia

di *Arnaldo Vicentini* e *Nazario Magnarelli*

E’ dato un quadrato ABCD, di lato $\overline{AB} = a$. Il vertice A coincide con l’origine di un riferimento cartesiano Axy e i vertici B e D cadono rispettivamente sugli assi x e y del riferimento.
Facciamo traslare in modo uniforme il segmento DC fino a farlo coincidere con il lato AB e nello stesso tempo facciamo ruotare di moto uniforme il lato AD sino a farlo coincidere con lo stesso lato AB. Trovare l’equazione del luogo geometrico γ dei punti di intersezione dei due segmenti durante il loro movimento. Esso è detto trisettrice di Ippia.
(L’enunciato del problema è tratto dal libro “ Le curve celebri”, di Luciano Cresci; pag. 9).

Indichiamo anzitutto la costruzione grafica del luogo geometrico (Fig. 1).

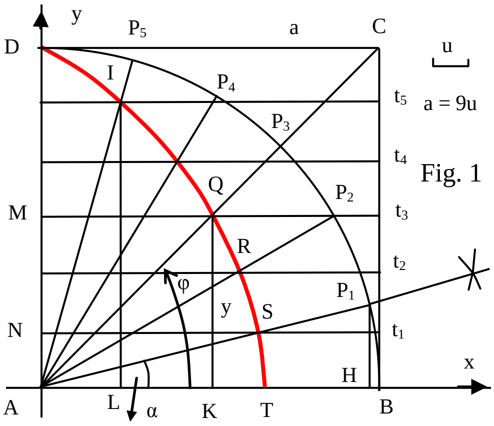


Fig. 1

A partire dal punto A dividiamo il lato AD del quadrato in sei parti uguali e dai punti di divisione conduciamo le parallele al lato AB; indicheremo queste parallele con le lettere t_1, t_2, t_3, t_4, t_5. A partire dal punto B dividiamo poi l’angolo retto BAD in sei angoli uguali, di ampiezza $\alpha = 15^o$ ciascuno, e siano P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 i punti di intersezione con l’arco BD di circonferenza.
Preso l’angolo $BAP_1 = 15^o$, sia H la proiezione ortogonale del punto P_1 sull’asse x.
Per la lunghezza del lato del quadrato, si prenda $\overline{AB} = 9u$. Il punto P_3 è comune alla circonferenza e alla bisettrice del 1° quadrante; i punti P_2 e P_4 si

trovano ricordando che $\sin 30^o = 1/2$ e $\cos 60^o = 1/2$. Il punto P_1 si trova dividendo l'arco BP_2 in 2 parti uguali.
I punti $S = AP_1 \cap t_1$, $R = AP_2 \cap t_2$, $Q = AP_3 \cap t_3$, ecc. appartengono al luogo geometrico γ. In seguito ci farà comodo considerare Q(x,y) come un punto generico del luogo.
Eseguendo costruzioni analoghe, possiamo infittire i punti della curva γ a nostro piacere e quindi possiamo tracciare la nostra curva con l'accuratezza desiderata.

Consideriamo ora un generico punto Q della curva γ; sia y l'ordinata del punto e K la sua proiezione ortogonale sull'asse x, quindi $\overline{KQ} = y$.
Poniamo $KAQ = \varphi$ .Consideriamo ora due triangoli aventi un vertice sulla curva γ ed il lato opposto sull'asse x, es. i triangoli KAQ ed LAI. Per come abbiamo costruito la curva, si vede che il rapporto fra i lati KQ ed LI è uguale a quello dei corrispondenti angoli opposti. In particolare,quando $I \to D$ sussiste la proporzione:

$$y : a = \varphi : \pi/2, \quad \Rightarrow \quad (1)\ \varphi = \frac{\pi y}{2a} \qquad e \quad (2)\ \ y = \frac{2 \cdot a\ \varphi}{\pi} \ .$$

Consideriamo ora il riferimento polare $(\rho\varphi)$ di polo A e asse polare coincidente con l'asse x . Per 1° teor. sui triangoli rettangoli, dal triangolo AKQ si ha: $\overline{KQ} = \overline{AQ}\sin\varphi$, $\Rightarrow$ (3) $y = \rho\sin\varphi$.
Per la (2) possiamo scrivere:

$$y = \rho\sin\varphi = \frac{2a\varphi}{\pi} \quad \Rightarrow \quad (4)\ \ \rho(\varphi) = \frac{2a}{\pi}\cdot\frac{\varphi}{\sin\varphi} \ .$$

La (4) ci dà l'equazione polare della trisettrice γ.

Vogliamo ora trovare le equazioni parametriche di γ.
Dal triangolo rettangolo KAQ si ha, per il 3° teor:

$$y = x \cdot tg\varphi, \quad \Rightarrow \quad (5) \quad x = \frac{y}{tg\varphi} \ .$$

Se ricordiamo che per la (2) si ha $y = 2a\varphi/\pi$, sostituendo nella (5) si trova (6) $x = 2a\varphi/\pi tg\varphi$.
Le equazioni parametriche della trisettrice sono pertanto:

$$(7) \qquad x = \frac{2a}{\pi}\cdot\frac{\varphi}{tg\varphi} \quad e \quad y = \frac{2a}{\pi}\varphi \ .$$

Dalle equazioni parametriche (7) e dall'equazione polare (4) possiamo ricavare alcuni valori notevoli.

(8) Per $\varphi = \pi/2$ si ha x=0 e $y = \rho = a$.

(9) Per $\varphi = \pi/4$ si ha $x = y = \frac{a}{2}$, $\rho = \frac{2a}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{\cancel{\pi}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}$, da cui $\rho = a\sqrt{2}/2$.

(10) Per $\varphi \to 0$, dalla (4) si ha:

$$\lim_{\varphi\to 0} \rho(\varphi) = \frac{2a}{\pi} \lim_{\varphi\to 0} \frac{\varphi}{\sin\varphi} = \frac{2a}{\pi} \approx 0,6366a .$$

Se prendiamo $a = 9u$, per l'ascissa del punto T, intersezione della curva γ con l'asse x, si ha:

$$x_T = 2a/\pi \approx 5,73u , \quad \text{quindi} \quad \overline{AT} \approx 5,73u .$$

2ª parte

Costruita la curva γ con la necessaria accuratezza e detto Q un punto generico di essa, vogliamo vedere come si può dividere in tre parti uguali l'angolo $TAQ = \varphi$; per fare questa operazione non è necessario conoscere l'equazione polare di γ .

A tale scopo, si conduca dal punto Q la parallela all'asse x e sia M il punto di intersezione con l'asse y; dividiamo il segmento AM in tre parti uguali e sia $AN = AM/3$. Dal punto N si conduca la parallela all'asse x e sia S il punto di intersezione con la curva γ. La costruzione geometrica della curva ci fa capire che si ha $TAS = \frac{1}{3} TAQ$, ossia $TAS = \frac{1}{3}\varphi$.

Rimane così giustificato il nome di <u>trisettrice</u> dato al luogo geometrico.

3ª parte: la <u>quadratrice di Dinostrato.</u>

La trisettrice di Ippia, come ha dimostrato Dinostrato (350 a.C. circa), si presta ad operare la <u>rettificazione</u> della circonferenza e la <u>quadratura</u> del cerchio; in tal caso essa è nota con il nome di <u>quadratrice di Dinostrato</u>.Teniamo sempre presente che la curva non è costruibile con la sola riga e compasso.

Per dimostrare questa proprietà, facciamo vedere che se indichiamo con $\overline{BD}$ l'arco BD rettificato e con ℓ la sua misura, sussiste la proporzione

(11) $$\overline{BD} : AB = AB : AT .$$

Infatti, passando alle misure si ha:

(12) $$\ell : a = a : \frac{2a}{\pi} , \quad \ell = \frac{1}{2} a\pi , \quad \text{cioè} \quad \ell = \frac{1}{4} 2\pi a .$$

Quindi la proporzione (11) è esatta perché essa ci fa ritrovare esattamente la lunghezza di $1/4$ di circonferenza , ossia $\ell = C/4$.
La costruzione grafica del segmento di lunghezza ℓ si ottiene applicando il teorema di Talete. Infatti, scriviamo la (12) nella forma $\frac{2a}{\pi} : a = a : \ell$.
Per eseguire una buona costruzione geometrica del fascio di rette parallele, prendiamo $a = 8u$, anziché $a = 9u$; quindi $2a/\pi \approx 5u$. Si ha la fig. 2 seguente:

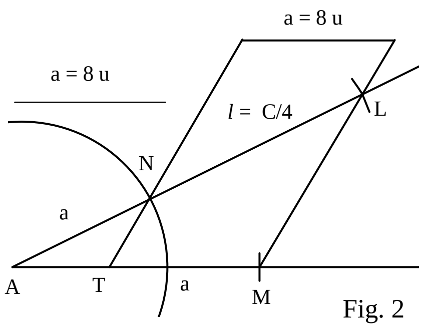
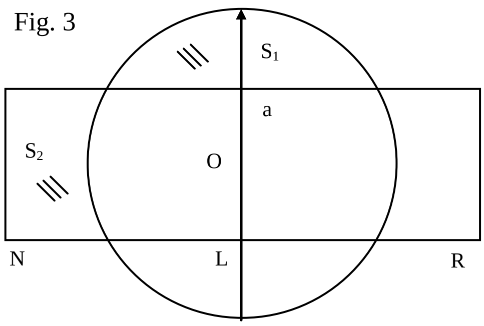


Fig. 2

il segmento NL della figura è il segmento che rettifica $1/4$ di circonferenza di raggio $a = 8u$. Con ciò abbiamo completato il problema della rettificazione della circonferenza.
Per quanto riguarda la <u>quadratura del cerchio</u>, ricordiamo che l'area di un cerchio è equivalente a quella di un rettangolo avente per altezza il raggio e come base un segmento NR pari a mezza circonferenza rettificata. Si ottiene subito la costruzione che risolve il quesito (fig. 3).

La figura ci dice che le superfici segnate S_1 ed S_2 sono equivalenti

Fig. 3


Rimane da trasformare il rettangolo nel quadrato equivalente; la costruzione geometrica corrispondente si ottiene applicando il 1° o il 2° teor. di Euclide.

N. 2 – Trisezione di un angolo: altra dimostrazione.

Consideriamo una semicirconferenza di centro C e di diametro AD (fig.4).

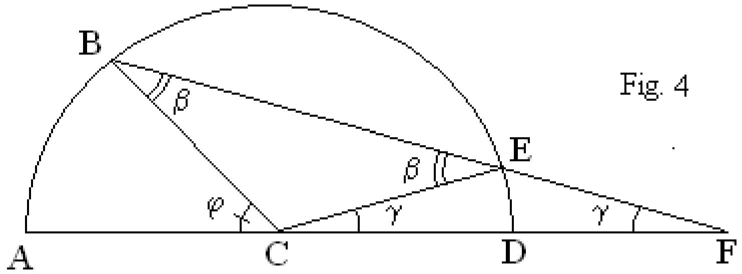


Fig. 4

Preso un punto B su di essa, consideriamo l'angolo $A\hat{C}B = \varphi$ e supponiamo, per semplicità, che esso sia un angolo acuto. Vogliamo indicare una costruzione geometrica che ci permette di dividere l'angolo φ in tre parti uguali. Vedremo che anche questa costruzione non può essere eseguita con la sola riga e compasso, ma solo per tentativi.

Conduciamo dal punto B una retta; sia E il punto di intersezione con la semicirconferenza ed F il punto di intersezione con il prolungamento del diametro AD. Scegliamo l'inclinazione della retta in modo che il segmento EF sia uguale al raggio della semicirconferenza, quindi

$$EF = CE = \text{raggio} \ .$$

Consideriamo il triangolo (CEF) ; poiché esso è isoscele sulla base CF possiamo scrivere l'eguaglianza

$$D\hat{F}E = D\hat{C}E = \gamma \ .$$

Inoltre, per il teorema dell'angolo esterno, l'angolo $C\hat{E}B$ è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti; quindi si ha

$$C\hat{E}B = E\hat{C}D + D\hat{F}E \ ,$$

e per la (1) possiamo scrivere

$$C\hat{E}B = 2 \cdot D\hat{F}E \ .$$

Consideriamo ora il triangolo (CBF) ; per il teorema dell'angolo esterno si ha

$$A\hat{C}B = C\hat{B}E + D\hat{F}E \ .$$

Ma il triangolo (CBE) è isoscele sulla base BE, avendo due lati uguali come raggi della semicirconferenza; possiamo quindi scrivere

$$C\hat{B}E = C\hat{E}B \ .$$

In tal modo la (4) diventa

$$A\hat{C}B = C\hat{E}B + D\hat{F}E \ .$$

Ricordando l'espressione di $C\hat{E}B$ data dalla (3), la (5) diventa

$$A\hat{C}B = 2 \cdot D\hat{F}E + D\hat{F}E \, ,$$

da cui $$A\hat{C}B = 3 \cdot D\hat{F}E \, ,$$

o anche $$A\hat{C}B = 3 \cdot D\hat{C}E \quad .$$

Più semplicemente possiamo scrivere

$$\varphi = 3 \cdot \gamma \, , \qquad \text{da cui} \qquad \gamma = \frac{1}{3}\varphi \quad .$$

Se a partire dal punto A riportiamo tre volte l'arco *DE* sulla semicirconferenza, possiamo dividere l'arco *AB* in tre parti uguali.

c.v.d.

N. 2 – Centro di curvatura ed evolvente di una curva

Voglio indicare un procedimento molto semplice che ci permette di trovare le coordinate del centro del cerchio di curvatura di una curva e quindi l'equazione cartesiana dell'evolvente della curva stessa. Ricordo ancora lo sgomento che mi procurò la questione nei primi mesi del mio corso di laurea. Il procedimento che illustrerò riesce molte volte vantaggioso. Diamo un esempio.

In un riferimento cartesiano Oxy è data la parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2$.

Trovare le coordinate del centro del cerchio di curvatura relativo al generico punto $P(t; t^2/2)$, cioè le coordinate del centro del cerchio osculatore della curva in tale punto (fig. 5).

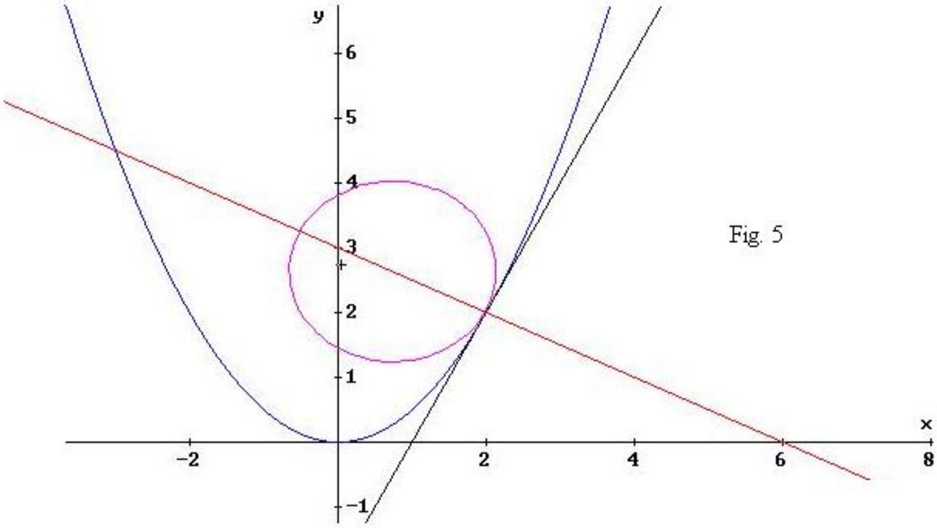


Fig. 5

Consideriamo due punti infinitamente vicini della parabola: siano essi

$P(t;\frac{1}{2}t^2)$ e $Q[t+\Delta t;\frac{1}{2}(t+\Delta t)^2]$.

La derivata della funzione $y(x)=\frac{x^2}{2}$ in un generico punto è $y'(x)=x$; ne segue che le tangenti alla parabola nei punti P e Q hanno rispettivamente i coefficienti angolari

$$m_P = t \quad \text{ed} \quad m_Q = t+\Delta t \ .$$

Le normali alla parabola nei punti stessi hanno i coefficienti angolari

$$m'_P = -\frac{1}{t} \ , \quad m'_Q = -\frac{1}{t+\Delta t} \ .$$

Scriviamo le equazioni delle due normali e mettiamole a sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} y-\frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{t}(x-t-\Delta t) \\ y-\frac{1}{2}(t+\Delta t)^2 = -\frac{1}{t+\Delta t}(x-t-\Delta t) \ . \end{cases}$$

Troviamo le coordinate del punto di intersezione di queste due rette; passando poi al limite per $\Delta t \to 0$ si ottengono le coordinate del centro del cerchio di curvatura nel punto P, cioè del cerchio osculatore in tale punto.

Dalla $(1)_2$ si ha

$$y-\frac{1}{2}[t^2+(\Delta t)^2+2t\cdot\Delta t]=-\frac{x-t-\Delta t}{t+\Delta t}\ .$$

Poiché $(\Delta t)^2$ è trascurabile, essendo esso un infinitesimo del secondo ordine, il sistema diventa:

$$(2)\qquad \begin{cases} y=-\dfrac{x}{t}+\dfrac{1}{2}t^2+1 \\ y=-\dfrac{x-t-\Delta t}{t+\Delta t}+\dfrac{t^2}{2}+t\cdot\Delta t\ . \end{cases}$$

Eguagliando membro a membro si ha:

$$-\frac{x}{t}+\cancel{\frac{t^2}{2}}+1=-\frac{x-t-\Delta t}{t+\Delta t}+\cancel{\frac{t^2}{2}}+1\ ;$$

da cui $\qquad -x(t+\Delta t)+t(t+\Delta t)=-t(x-t-\Delta t)+t^2\Delta t\cdot(t+\Delta t)\ ,$

cioè $\qquad -\cancel{xt}-x\cdot\Delta t+\cancel{t^2}+\cancel{t\cdot\Delta t}=-\cancel{xt}+\cancel{t^2}+\cancel{t\cdot\Delta t}+t^3\cdot\Delta t+t^2\cdot(\Delta t)^2\ .$

Semplificando e trascurando il termine $t^2\cdot(\Delta t)^2$, che è un infinitesimo del secondo ordine, si ha

$$-x\cdot\Delta t=t^3\cdot\Delta t\ ,\quad \text{da cui}\qquad (3)\qquad x=-t^3\ .$$

Sostituendo la (3) nella $(2)_1$ possiamo trovare l'ordinata del centro del cerchio oscuratore nel punto P:

$$y=t^2+\frac{1}{2}t^2+1\ ,\qquad \text{da cui}\qquad (4)\qquad y=\frac{3}{2}t^2+1\ .$$

Riassumendo, il centro di curvatura ha le coordinate

$$(5)\qquad x=-t^3\ ,\quad y=\frac{3}{2}t^2+1\ .$$

Al variare del parametro t, il punto, come è noto, descrive l'evolvente della parabola. Le equazioni (5) , pertanto, sono le equazioni parametriche dell'evolvente.

L'equazione cartesiana dell'evolvente si ottiene ricavando il parametro t dalla seconda equazione del sistema (5) e sostituendo nella prima; essa è:

$$27x^2=8\cdot(y-1)^3\ .$$