SUGLI INSIEMI *K* DELLA CONGETTURA DI COLLATZ

Michele Ventrone *

Sunto - Dopo un'introduzione alla congettura di Collatz (problema del 3n+1), dimostro proposizioni e teoremi, costruisco e scompongo i nuovi insiemi K_t *e* K^*_t, ne determino il massimo e l'intersezione e propongo una congettura equivalente (partizionamento di N_o mediante gli insiemi K_t o K^*_t).

Parole chiave - Congettura di Collatz, problema di Syracuse, problema del 3n+1, convergenza, partizione, insiemi K_t *e* K^*_t.

Abstract - After a brief presentation of Collatz Conjecture (3n+1 problem), I will demonstrate propositions and theorems about new sets K_t *e* K^*_t furthermore, I will determine their maximum and intersection and propose a conjecture equivalent (partition of N_o using sets K_t or K^*_t).

Key Words - Collatz conjecture, Syracuse problem, 3n+1 conjecture, convergence, partition, sets K_t and K^*_t .

§ 1. - INTRODUZIONE

La congettura - Venni a conoscenza della congettura di Collatz leggendo nell'estate 2004 un articolo divulgativo ([9]) dall'accattivante titolo: *L'enigmatico pari e dispari che da cinquant'anni non fa dormire i matematici*. Si parte da un intero positivo *n*, se è pari lo si divide per due, se è dispari lo si moltiplica per tre e vi si aggiunge uno, poi si ricomincia applicando le stesse regole sul numero ottenuto (v. §3). Ad esempio, partendo da 3 si genera la sequenza: 3 – 10 – 5 – 16 – 8 – 4 – 2 – 1. L'altra forma dell'algoritmo del *3n+1* prevede, se *n* è dispari, il calcolo di *(3n+1)/2* invece di *3n+1*. Con 7 si ottiene la sequenza: 7 – 11 – 17 – 26 – 13 – 20 – 10 – 5 – 8 – 4 – 2 – 1. Dopo qualche prova

* e-mail: mike_ven_s.maria.c.v@libero.it

ci si accorge che le sequenze passano per uno[1]: quelli che studiano la questione dicono che le traiettorie convergono. Si congettura che, da qualunque intero positivo si parta, le sequenze arrivino sempre tutte a uno in un numero finito di passi, ma *nessuno lo ha ancora dimostrato*. Sul problema del *3n+1* si è creata una cospicua letteratura: purtroppo, quella squisitamente matematica che si può trovare sul Web, è in lingua inglese e in buona parte non immediatamente fruibile perché complessa. Il lettore potrà deliziarsi leggendo nella sezione "*Paraphernalia Mathematica*"[2] di Rudi Mathematici ([2]) le idee singolari a cui fanno ricorso i matematici per attaccare il problema e alcuni dei "*risultati*" ottenuti. Nella stessa sezione è enunciato il teorema di Terras[3], che dà buone speranze ma senza quantificare: "*Quasi tutti i numeri hanno una Glide*[4] *finita*" e dove è spiegato che ciò equivale ad affermare che *quasi* tutti gli interi positivi generano sequenze che arrivano ad 1. Sull'argomento esistono congetture equivalenti, lemmi, teoremi, idee bizzarre e collegamenti con diversi settori della matematica da far venire il mal di testa. Si possono trovare altre notizie nei siti Web: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8].

Il software di lavoro - Il mio passatempo estivo era diventato stimolante e, visti i nomi dei matematici che si erano interessati al problema, pensai che sarebbero passati altri cinquant'anni o più per venirne a capo ma, per motivi che non so spiegare, il problema m'incuriosiva molto. Scrissi qualche programma di prova e a poco a poco, osservando il susseguirsi dei numeri e dei grafici sul monitor, iniziai a pormi parecchie domande. Durante le vacanze estive mi dedico alla programmazione dilettevole con maggiore frequenza e alla fine di luglio del 2005 realizzai un programma con più opzioni in Delphi 6. Con il software speravo di evidenziare tendenze o regolarità delle sequenze. Quando formulavo nuove ipotesi, spesso, tralasciando l'approccio teorico, cercavo un primo conforto scrivendo nuovo codice che, girando, in quasi tutti i casi me le confutava senza pietà. Ho preparato una versione ridotta del programma per i lettori di quest'articolo. Il software, selezionando una delle due forme dell'algoritmo di Collatz,

---

[1] Le sequenze entrano nel ciclo 4-2-1-4-2-1-… .

[2] Esilarante in alcuni punti.

[3] In [2] non è riportata la dimostrazione di questo teorema ma ne è fornita una traccia attraverso l'enunciato di lemmi.

[4] Sia n un intero positivo. Applicando l'algoritmo di Collatz al numero n, si definisce Glide di n il numero t d'iterazioni necessarie per trovare nella sequenza (al posto t) il primo intero più piccolo di n e si scrive: $Glide(n)=t$. Altri chiamano la stessa cosa con "stopping time" (tempo di fermata) e scrivono $\sigma(n)=t$.

determina il numero d'iterazioni necessarie alla convergenza a 1 di ogni intero positivo fino a 50.000.000, visualizza le sequenze, ne trova il massimo e può cercare tutti i numeri di un dato intervallo che convergono a 1 in un numero prefissato di passi. Chi vuole potrà farmene richiesta via e-mail scrivendo nel campo "*Oggetto*" semplicemente "*Syr*", entro un anno dalla pubblicazione di quest'articolo.

Struttura dell'articolo - I paragrafi dall'1 al 4 hanno un tono discorsivo, i seguenti, fino al paragrafo 11, contengono alcuni risultati[5] dei quali quelli che, a mio avviso, potrebbero avere maggior rilievo sono: i teoremi 6.4 e 6.6 (uguaglianze notevoli), il teorema 8.2 (dei massimi di K_t e K^*_t) e il teorema 11.6 (intersezione degli insiemi K). Nel §7 troverete degli esempi sulla costruzione di alcuni insiemi K. In una prima lettura di questo lavoro ci si potrà limitare ai risultati nei quali l'algoritmo è usato nella prima forma per poi passare, se si vuole, a quelli dell'altra forma *mutatis mutandis*. Nell'appendice, infine, troverete la codifica di base dell'algoritmo in alcuni dei diversi linguaggi di programmazione che ho provato alla ricerca della possibilità di usare interi positivi molto grandi[6].

Gli insiemi K - Quando ero indotto ad indagare in una direzione, prendevo nota. Così, ipotesi dopo ipotesi, moltissime delle quali infruttuose, alcune osservazioni (v. inizio §6) mi spinsero a costruire gli insiemi caratteristici K_t e K^*_t (o semplicemente K), a scomporli, a determinarne il massimo e l'intersezione e a formulare una congettura equivalente a quella di Collatz. Gli insiemi K sono costituiti da interi positivi raggruppati secondo il numero di iterazioni che li portano a 1 con l'algoritmo di Collatz e forse partizionano N_o (congettura, v. §10).

Alcuni esempi - Nella *Tabella 1* sono elencate le iterazioni necessarie per la convergenza a 1 dei primi 20 interi positivi e il massimo delle sequenze generate quando l'algoritmo è usato nella prima forma.

[5] Nel settembre del 2006 quasi tutti i risultati di questo articolo, e altri che non ho incluso, erano già definiti, mentre lo studio dell'intersezione degli insiemi K (§10) risale al mese di marzo 2010 e quello sul massimo dei derivati dispari B (§9) al luglio 2010. Dal 2007 fino al 2010 ho dedicato pochissimo tempo a questo problema.

[6] Il Free Pascal e Lazarus consentono di usare gli *Int64* e i *QWord* (interi con segno e interi senza segno a 64 bit), il GNU Pascal ha i *LongCard* e i *LongestCard* (interi senza segno a 64 bit) e il Delphi6 gli *Int64*.

N	Iteraz.	Max	N	Iteraz.	Max
1	0	1	**11**	14	52
2	1	2	**12**	9	16
3	7	16	**13**	9	40
4	2	4	**14**	17	52
5	5	16	**15**	17	160
6	8	16	**16**	4	16
7	16	52	**17**	12	52
8	3	8	**18**	20	52
9	19	52	**19**	20	88
10	6	16	**20**	7	20

Tabella 1 – Iterazioni per arrivare a uno e massimi delle sequenze generate dai primi 20 interi positivi con l'algoritmo di Collatz nella prima forma.

§ 2. - ORIGINE DEL PROBLEMA

L'origine del problema non è certa ma forse la si deve attribuire allo studente Lothar Collatz che lo propose negli anni trenta[7] del secolo scorso mentre si interessava di grafi e funzioni in teoria dei numeri. In seguito, negli anni 50 dello stesso secolo, H. Hasse, collega di Collatz, parlò del *3n+1* all'università di Syracuse[8] e così il problema fu chiamato problema di "Syracuse" ([1], [6], [9]). Il problema è conosciuto anche come congettura di Collatz, oppure: problema di Ulam, problema di Kakutani, algoritmo di Hasse, congettura di Twaites, dal nome dei matematici che riproponevano la questione contribuendo alla sua diffusione orale. Con un sistema di calcolo distribuito oggi si cerca un controesempio, in altre parole, si tenta di individuare almeno un intero positivo che generi una sequenza che non passi per uno. La congettura è stata verificata al computer per tutti gli interi $n \leq 19 \times 2^{58} \approx 5.48 \times 10^{18}$ (Oliveira e Silva 2008), ma il controesempio non è stato trovato. Sicuramente questo limite oggi sarà stato superato. Sul sito di Jeff Lagarias ([5], [6]) si legge di un'efficace e divertente voce che circolava negli anni 50 del secolo scorso negli ambienti matematici delle università degli Stati Uniti: *si diceva che il problema facesse parte di una cospirazione tendente a rallentare la ricerca matematica negli USA*[9]. Tra gli studiosi è diffusa

[7] Alcuni riportano l'anno 1937, ad es. [3].

[8] Città dello Stato di New York, Stati Uniti.

[9] Il problema attrae molto alcuni matematici tanto che in Germania alla Katholische Universität Eichstätt si è tenuta, il 5 e 6 agosto del 1999, la prima conferenza internazionale sul problema di Collatz ([7]) e se ne è parlato anche all'Istituto Elie Cartan di Nancy (Francia) nel periodo 18-22 settembre del 2006. (Non ho trovato notizie di altre conferenze sulla congettura di Collatz.)

l'opinione che la congettura potrebbe essere indimostrabile[10]. Il famoso Paul Erdös osservò che *la matematica non è pronta per risolvere questo tipo di problemi* e offrì $500 per la dimostrazione. Anche altri offrirono denaro: H. S. M. Coxeter, $50 nel 1970, B. Thwaites, £1000 nel 1996 ([3],[5]). I matematici che lavorano sul problema ritengono che sia d'eccezionale difficoltà.

§ 3. - L'ALGORITMO DI COLLATZ

Prima forma - Si parta da un intero positivo *n* e si applichino i seguenti passi

1) se *n* è pari lo si divida per 2;
2) se *n* è dispari si calcoli $3n+1$;
3) con il numero ottenuto si riparta da 1);

ossia, con $n \in N_0$ e $i \in N_0$, l'algoritmo è l'iterazione della funzione

$$T_i(n) = \begin{cases} \dfrac{T_{i-1}(n)}{2} & se\ T_{i-1}(n)\ è\ pari \\ 3 \cdot T_{i-1}(n)+1 & se\ T_{i-1}(n)\ è\ dispari \end{cases} \quad . \qquad 3.1)$$

con $T_0(n)=n$, *se* $i=0$.

Seconda forma - Si parta da un intero positivo *n* e si applichino i seguenti passi

1*) se *n* è pari lo si divida per 2;
2*) se *n* è dispari si calcoli $(3n+1)/2$;
3*) con il numero ottenuto si riparta da 1*);

ossia, con $n \in N_0$ e $i \in N_0$, l'algoritmo è l'iterazione della funzione

$$T_i^*(n) = \begin{cases} \dfrac{T_i^*(n)}{2} & se\ T_i^*(n)\ è\ pari \\ \dfrac{3 \cdot T_i^*(n)+1}{2} & se\ T_i^*(n)\ è\ dispari \end{cases} \quad . \qquad 3.2)$$

con $T^*_0(n)=n$, *se* $i=0$.

---

[10] Nel 1931 Kurt Gödel ha dimostrato che l'aritmetica e tutte le teorie matematiche che la includono non sono complete, in altre parole: qualunque sia il gruppo di assiomi che si accetta, una Teoria coerente che includa l'aritmetica ha necessariamente almeno una proposizione che non può essere dimostrata o confutata a partire da quegli assiomi (Primo teorema d'incompletezza di Gödel).

§ 4. - TRAIETTORIE

Nell'applicazione dell'algoritmo, partendo dall'intero n positivo, si genera una successione di interi che viene chiamata **sequenza, traiettoria, orbita** o **volo** di n ed è denotata con $T(n)$ (o $T^*(n)$, *con la seconda forma dell'algoritmo*). Talvolta n è detto anche "*seme*" della traiettoria $T(n)$. Il termine generico della traiettoria generata da n è denotato con $T_i(n)$, con n fisso e con l'indice variabile i che indica l'*i-esima* iterazione, ossia la posizione del termine nella sequenza dopo n. Se l'indice i vale zero, allora $T_0(n)=n$ si trova al posto zero nella sequenza. In mancanza di una dimostrazione della congettura si ipotizza che possano esistere tre tipi di traiettorie: quelle che contengono il numero 1 (convergenti), quelle che hanno infinito come massimo (divergenti), quelle che cadono in un ciclo diverso dal ciclo banale 4,2,1 (cicliche). L'esistenza di traiettorie divergenti o cicliche[11] non è stata ancora provata[12]. I termini del ciclo *4,2,1,4,2,1,…*, dopo il primo 1 che si incontra, non si scrivono. Ad esempio, la traiettoria generata dal numero 21 con l'algoritmo nella prima forma è $T(21)=\{21,64,32,16,8,4,2,1\}$. Le traiettorie sono chiamate anche "*Hailstone sequences*" perché i numeri si comportano come i chicchi di grandine durante la caduta verso terra ([3]). Se la traiettoria $T(n)$ (o $T^*(n)$) generata da n converge, diremo semplicemente che *n converge*. Nel seguito denoteremo con *TST*[13] l'insieme dei tempi di volo degli interi positivi convergenti, cioè l'insieme delle iterazioni necessarie alla convergenza degli interi positivi n. Con la notazione $V[n]=t$ indicheremo che n converge a 1 in t iterazioni, ovvero, con linguaggio suggestivo, che la durata del volo di n prima di fermarsi a terra è t. Per esempio $V[3]=7$[14] significherà che il volo di 3, misurato in termini d'iterazioni, è 7. Nel seguito, la locuzione "*t-convergente*" sarà equivalente a "*convergente in t iterazioni*" e la notazione abbreviata k_t indicherà che il numero k è *t-convergente*. Quest'ultima notazione mi è stata davvero utile nelle dimostrazioni. Osservando le traiettorie e i loro grafici si nota che numeri diversi generano sequenze che da un certo punto in poi hanno gli stessi termini. Ad esempio, i numeri 142 e 143 generano la stessa sequenza dalla nona iterazione in poi con l'algoritmo nella prima forma, dalla sesta in poi con l'algoritmo nella seconda forma. Questa proprietà è chiamata *coalescenza*.

---

[11] Con ciclo diverso dal ciclo 4,2,1.

[12] L'esistenza di una traiettoria divergente o ciclica proverebbe che non tutti gli interi positivi passano per 1 e la congettura di Collatz risulterebbe falsa.

[13] Da *total stopping time*, ossia "*tempo totale di fermata*" che è il numero di iterazioni necessarie per avere 1 a partire da n ed è denotato anche con $\sigma_\infty(n)$.

[14] $V[3]=7$ equivale a $\sigma_\infty(3)=7$.

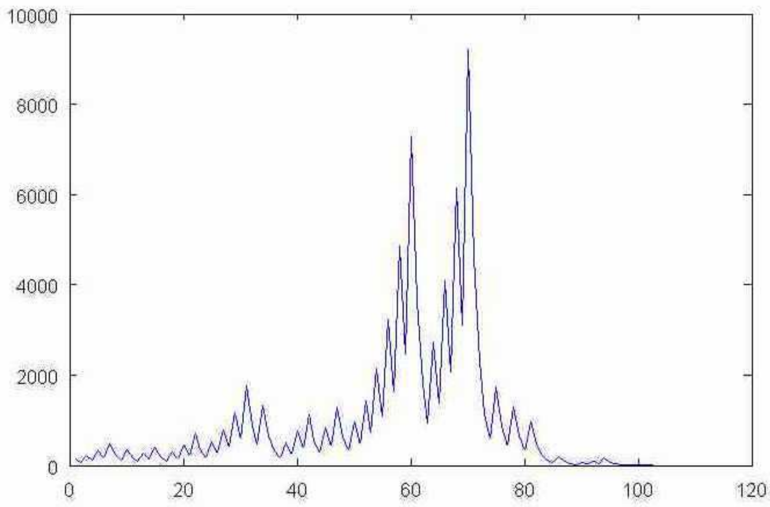

Figura 1 – Grafico della traiettoria del numero 142 (Algoritmo di Collatz nella prima forma).

Il grafico della traiettoria generata dal numero 142, applicando l'algoritmo di Collatz nella prima forma, è riportato nella *Figura 1*. L'ascissa indica il numero delle iterazioni e l'ordinata indica il valore ottenuto all'i-esima iterazione (o passo). La sequenza arriva a 1 in 103 iterazioni e il suo massimo è 9232.

Terminiamo questo paragrafo con due proprietà evidenti nelle due forme dell'algoritmo di Collatz.

PROPRIETÀ 4.1 - *Se n converge allora ogni termine della sua traiettoria converge.*

Ad esempio, tutti i numeri di *T(3)={3-10-5-16-8-4-2-1}* sono convergenti.

Se la congettura dovesse risultare falsa sarebbe vera anche la seguente proprietà.

PROPRIETÀ 4.2 - *Se n non converge allora ogni termine della sua traiettoria non converge.*

§5. – COSTRUZIONE DEGLI INSIEMI *K*

Costruiremo, adesso, gli insiemi K legati alla congettura di Collatz e ne evidenzieremo le prime semplici proprietà. Poniamo nello stesso insieme K_t la totalità degli interi positivi *t-convergenti* con l'algoritmo di Collatz nella prima forma:

$$\boldsymbol{K_t = \{n \in N_o : n \text{ è } t\text{-convergente} \wedge t \in N\}} \text{ .} \qquad 5.1)$$

Ad esempio, applicando l'algoritmo nella prima forma:

$K_0 = \{1\}$, *perché 1 converge a 1 in zero iterazioni*;
$K_1 = \{2\}$, *perché 2 converge a 1 in un'iterazione*;
$K_2 = \{4\}$, *perché 4 converge a 1 in due iterazioni*;
… … …
$K_7 = \{3, 20, 21, 128\}$, *perché 3, 20, 21 e 128 convergono a 1 in sette iterazioni*;
ecc., ecc.

Se l'algoritmo di Collatz è usato nella seconda forma, nella 5.1) aggiungeremo alla lettera K il simbolo asterisco *, ossia:

$$\boldsymbol{K^*_t = \{n \in N_o : n \text{ è } t\text{-convergente} \wedge t \in N\}} \text{ .} \qquad 5.2)$$

Cominciamo con l'affermare, con la proposizione che segue, che gli insiemi K_t e K^*_t contengono almeno il numero 2^t.

PROPOSIZIONE 5.1 (fondamentale)
$\forall t \in N$, K_t *e* K^*_t *sono non vuoti.*

DIMOSTRAZIONE
Banalmente: qualunque sia $t \in N$ è $V[2^t]=t$[15], poiché applicando l'algoritmo di Collatz (nella prima o nella seconda forma) si divide 2^t per due, t volte. Quindi in K_t (K^*_t) vi è almeno 2^t. ■

Nel successivo paragrafo 6 vedremo che gli insiemi K, per $t>4$, non contengono solo il numero 2^t.

OSSERVAZIONI - Ad ogni $t \in N$ si può associare K_t per il tramite di 2^t e ad ogni K_t, il quale contiene almeno 2^t, si può associare $t \in N$, pertanto la

[15] $V[2^t]=t$ indica che 2^t converge a 1 in t iterazioni. In particolare $V[2^0]=0$, cioè: 1 converge a 1 in 0 iterazioni.

collezione di insiemi $\{K_t\}_{t\in N}$ è numerabile e $TST=N$. Ovviamente anche la famiglia $\{K^*_t\}_{t\in N}$ è numerabile.

Possiamo allora enunciare i seguenti corollari con l'algoritmo di Collatz nelle due forme.

COROLLARIO 5.2 - *Esiste sempre un tempo di volo.*

COROLLARIO 5.3 - *Ognuna delle famiglie* $\{K_t\}_{t\in N}$ *e* $\{K^*_t\}_{t\in N}$ *è numerabile.*

E' semplice mostrare che gli insiemi K_t (K^*_t) sono a due a due disgiunti.

PROPOSIZIONE 5.4 (Delle classi[16] di N_o, algoritmo nella prima forma e nella seconda forma)
Se t_1 e t_2 , con $t_1\neq t_2$, sono nell'insieme TST, allora
i) $K_{t1} \cap K_{t2}=\emptyset$
i*) $K^*_{t1} \cap K^*_{t2}=\emptyset$.

DIMOSTRAZIONE
i) **- Algoritmo nella prima forma -** Per la proposizione 5.1, K_{t1} e K_{t2} sono non vuoti. Supponiamo per assurdo che $K_{t1} \cap K_{t2}\neq\emptyset$, con $t_1\neq t_2$.
Sia $k\in K_{t1} \cap K_{t2}$. Da $V[k]=t_1$[17] e da $V[k]=t_2$ segue $t_1=t_2$ poiché gli elementi dell'intersezione devono convergere a 1 con lo stesso numero di iterazioni, contro l'ipotesi che $t_1\neq t_2$. Dunque $K_{t1} \cap K_{t2}=\emptyset$. ◙

i*) **- Algoritmo nella seconda forma** – La dimostrazione è analoga alla precedente: basta aggiungere l'asterisco * agli insiemi K_t. ■

OSSERVAZIONI - Un numero $k\in K_t$ (tale che $V[k]=t$) si trova solo in K_t. Ovviamente anche le potenze $2^t, \forall t\in TST$, si trovano in un unico K_t. Lo stesso avviene per $k\in K^*_t$.

QUESTIONI - E' naturale porre le seguenti domande. *E' possibile determinare il massimo di ogni* K_t *e di ogni* K^*_t*?* Le famiglie $\{K_t\}_{t\in N}$ *e* $\{K^*_t\}_{t\in N}$ *partizionano* N_o *?* Risponderò alla prima nel §8. Nel §10 ritroverete nei dettagli la seconda.

---

[16] Non di equivalenza.
[17] $V[k]=t_1$ equivale a $\sigma_\infty(k)= t_1$.

§6. - SCOMPOSIZIONE DEGLI INSIEMI *K*

Gli insiemi K_t (K^*_t) possono essere costruiti mediante ricerca bruta al computer *oppure attraverso gli elementi dell'insieme precedente* K_{t-1} (K^*_{t-1}). Ottenni la *Tabella 2* (alla fine di questo paragrafo) con l'aiuto del mio software. Cercai gli interi di un determinato intervallo di interi positivi convergenti a 1 nello stesso numero t di iterazioni. Esaminando la *Tabella 2* pensai alla possibilità di costruire ogni K_{t+1} a partire da K_t con carta e penna, giacché ogni K_t contiene anche i doppi dei numeri dell'insieme precedente.
Quando costruii la *Tabella 3* (alla fine di questo paragrafo) pensai che si potesse fare la stessa cosa quando l'algoritmo è usato nella seconda forma. Dopo alcuni tentativi, supposi che K_{t+1} fosse "*sempre*" formato da due insiemi di numeri[18]:

1) *dai doppi dei numeri di* K_t*;*
2) *dagli interi* n *che sono soluzioni dispari in* N_o *dell'equazione* $3n+1=k$, *con* $k\in K_t$ *pari e* $k\neq 4$[19]*, se si applica la prima forma dell'algoritmo;*

e che K^*_{t+1} fosse "*sempre*" formato da due insiemi di numeri:

1*) *dai doppi dei numeri di* K^*_t*;*
2*) *dagli interi* n *che sono soluzioni dispari in* N_o *dell'equazione* $(3n+1)/2=k^*$, *con* $k^*\in K^*_t$ *e* $k^*\neq 2$[20] *se si applica la seconda forma dell'algoritmo.*

Detto P l'insieme dei pari, indicai con $2K_t$ l'insieme ottenuto raddoppiando tutti i numeri di K_t , ossia quelli in ***1)***, e li chiamai "***insieme dei derivati pari del primo tipo*** " o "***insieme dei derivati pari di*** K_t " o **"*insieme dei doppi del primo tipo*"**:

$$\forall t\in N,\ 2K_t = \{\ n\in P:\ n=2k,\ k\in K_t\} \qquad \text{(derivato pari del primo tipo)} \qquad 6.1)$$

Similmente, indicai con $2K^*_t$ quelli in ***1*)*** e li chiamai "***insieme dei derivati pari del secondo tipo*** " o "***insieme dei derivati pari di*** K^*_t " o "***insieme dei doppi del secondo tipo***":

$$\forall t\in N,\ 2K^*_t = \{\ n\in P:\ n=2k^*,\ k^*\in K^*_t\} \qquad \text{(derivato pari del secondo tipo)} \qquad 6.2)$$

---

18 Consiglio di vedere subito nel §7 gli esempi sulla costruzione degli insiemi K_7, K_8 e K_9 .
19 Per $k=4$ si avrebbe $n=1$ che non appartiene a B_3 perché vuoto. Si osservi che $K_0=K^*_0=\{1\}$.
20 Per $k=2$ si avrebbe $n=1$ che non appartiene a B^*_2 perché vuoto. Si osservi che $K_0=K^*_0=\{1\}$.

OSSERVAZIONE 1 - Se $t=0$ si ha $K_0=K^*_0=\{1\}$ e, quindi, $2K_0=2K^*_0=\{2\}= =K_1= K^*_1$.

Denotai poi con B_{t+1} i numeri in ***2)***: " ***insieme dei derivati dispari di*** $\boldsymbol{K_t}$ " e con B^*_{t+1} i numeri in $\boldsymbol{2^*)}$: " ***insieme dei derivati dispari di*** $\boldsymbol{K^*_t}$ ".

Detto D l'insieme degli interi positivi dispari, l'insieme dei derivati dispari del primo tipo è

$$\forall t\in N,\ B_{t+1} = \{n\in D:\ 3n+1=k,\ k\in K_t \wedge k \text{ pari} \wedge k\neq 4\ ^{21}\} \qquad 6.3)$$

(derivato dispari del primo tipo)

mentre l'insieme dei derivati dispari del secondo tipo è

$$\forall t\in N,\ B^*_{t+1} = \{n\in D:\ \frac{3n+1}{2}=k^*,\ k^*\in K^*_t \wedge k^*\neq 2^{22}\} \qquad 6.4)$$

(derivato dispari del secondo tipo)

Talvolta, per brevità, chiamerò *l'insieme dei derivati dispari del primo o del secondo tipo* e *l'insieme dei derivati pari del primo o del secondo tipo* rispettivamente "***derivato dispari***" e "***derivato pari***" o "***insieme dei doppi***" se apparirà chiaro dal contesto a quale tipo farò riferimento, oppure semplicemente insiemi ***B***.

TEOREMA 6.1 (Teorema dell'inclusione dei doppi)
Il derivato pari di K_t (K^*_t) *è contenuto in* K_{t+1} (K^*_{t+1}), *cioè*

$$\forall t\in N,\ 2K_t \subseteq K_{t+1} \qquad (\forall t\in N,\ 2K^*_t \subseteq K^*_{t+1}) \qquad 6.5)$$

DIMOSTRAZIONE
Per il corollario 5.2 esiste sempre un tempo di volo. Fissato $t\in N$, consideriamo K_t. Banalmente: $\forall k_t\in K_t$, la traiettoria $T(k_t)=\{k_t,\ldots,4,2,1\}$ è contenuta nella traiettoria $T(2k_t)=\{2k_t,k_t,\ldots,4,2,1\}$. Ciò significa che $2k_t$ è *(t+1)-convergente*, quindi $2k_t$ è contenuto in K_{t+1}[23]. Se K_{t+1} è privo di numeri dispari vale il solo segno di uguaglianza. Per provarlo, supponiamo per assurdo che in K_{t+1} esista un numero pari b_{t+1} che non è doppio di alcun numero di K_t. Siccome b_{t+1} è pari e *(t+1)-convergente*, la traiettoria $T(b_{t+1})=\{b_{t+1},$

---

[21] V. nota 19.
[22] V. nota 20.
[23] Per definizione, K_{t+1} rappresenta la totalità degli interi positivi *(t+1)-convergenti*.

$b_{t+1}/2,\ldots,4,2,1\}$ contiene la traiettoria $T(b_{t+1}/2)=\{b_{t+1}/2,\ldots,4,2,1\}$ che pure converge, sicchè $b_{t+1}/2$ è in K_t e questo significa che $b_{t+1}\in K_{t+1}$ è doppio di $b_{t+1}/2\in K_t$, contro l'ipotesi fatta. Ne segue che K_{t+1} (se privo di numeri dispari) contiene solo i doppi dei numeri di K_t . Dunque, vale la 6.5) per l'arbitrarietà di t. Nel caso di K^*_t si procede allo stesso modo, *mutatis mutandis*. ■

Il teorema 6.1 fornisce un semplice modo per individuare alcuni dei numeri degli insiemi K_{t+1} e K^*_{t+1}.

Individuiamo adesso i numeri di B_{t+1} .

TEOREMA 6.2 (Teorema dei derivati dispari del primo tipo)
Sia $k_t\in N_o$ pari e t-convergente con l'algoritmo di Collatz nella prima forma. Se $\exists\, b \neq 1$ soddisfacente all'equazione

$$3\,b+1= k_t \qquad 6.6)$$

allora il numero dispari

$$b=\frac{k_t-1}{3} \qquad 6.7)$$

appartiene a B_{t+1} .

DIMOSTRAZIONE
Soddisfino b e k_t alle ipotesi. Poiché b è dispari, il suo successore è k_t, perché a b si applica la seconda legge della 3.1), quindi la traiettoria

$$T(b)=T\left(\frac{k_t-1}{3}\right)=\left\{\frac{k_t-1}{3},k_t,\ldots,4,2,1\right\}$$

contiene la traiettoria

$T(k_t)=\{ k_t,\ldots,4,2,1\}$,

dunque b converge in $t+1$ iterazioni, cioè $b\in B_{t+1}$[24], c. v. d. ■

[24] Per definizione, B_{t+1} contiene tutti degli interi positivi dispari *(t+1)-convergenti* ottenuti dai pari di K_t.

OSSERVAZIONE 2 - I numeri dispari b del teorema 6.2 potrebbero non esistere anche per valori molto grandi di t, cioè l'insieme B_{t+1} potrebbe essere vuoto. Ad esempio K_7 ha il derivato dei dispari B_8 vuoto.

OSSERVAZIONE 3 - Un derivato dispari B_t o è vuoto o e formato da numeri dispari diversi da *1* [25].

OSSERVAZIONE 4 - I numeri di un insieme B possono essere riguardati in un duplice modo. Se b è visto come un numero dell'insieme B_{t+1} diremo che b proviene[26] da un pari $k \in K_t$. Se b è visto come numero della traiettoria $T(b)$ diremo che b genera il pari $k \in K_t$. Tuttavia questa distinzione qui non è determinante.

TEOREMA 6.3 (Teorema dell'inclusione stretta dei derivati dispari)
Il derivato dispari di K_t (K^*_t) *è contenuto strettamente in* K_{t+1} (K^*_{t+1})*, cioè:*

$$\forall t \in N,\ B_{t+1} \subset K_{t+1} \qquad (\forall t \in N,\ B^*_{t+1} \subset K^*_{t+1}) \qquad 6.8)$$

DIMOSTRAZIONE
Per la proposizione 5.1, ogni K_{t+1} (K^*_{t+1}) è non vuoto perché contiene sempre almeno il pari 2^{t+1}, quindi B_{t+1} (B^*_{t+1}), che è composto da soli dispari diversi da 1, anche se fosse vuoto[27], non potrebbe coincidere con K_{t+1} (K^*_{t+1}). ■

TEOREMA 6.4 (Teorema dell'unione dei derivati pari e dispari, algoritmo nella prima forma)
Se l'algoritmo di Collatz è usato nella prima forma, l'insieme K_{t+1} *è l'unione dell'insieme dei doppi e del derivato dei dispari dell'insieme* K_t *, ossia:*

$$\forall t \in N,\ K_{t+1} = 2K_t \cup B_{t+1} \qquad \text{(I uguaglianza notevole)} \qquad 6.9)$$

DIMOSTRAZIONE
Consideriamo K_t[28], con $t \in N$. Occorre dimostrare che

---

[25] Per k pari e $k \neq 4$ l'equazione 6.7 non ammette la soluzione $n=1$.
[26] V. la 6.3).
[27] V. osservazione 3 di questo paragrafo.
[28] Per definizione, K_t rappresenta la totalità degli interi *t-convergenti*.

1) non esistono altri pari *(t+1)-convergenti* oltre quelli di $2K_t$;

2) i numeri dispari *(t+1)-convergenti* sono solo quelli di B_{t+1}.

1) Indichiamo con A_{t+1} la totalità degli interi positivi pari convergenti in $t+1$ iterazioni che sappiamo essere non vuoto (ogni A_i contiene almeno 2^i). Ovviamente risulta subito:

$\forall t \in N,\ 2K_t \subseteq A_{t+1}$.

Mostriamo che

$$\forall t \in N,\ 2K_t = A_{t+1}. \qquad 6.10)$$

Se per il fissato $t \in N$ esistesse un pari $a_{t+1} \in A_{t+1}$ che non è doppio di nessun intero positivo di K_t, si avrebbe un assurdo perché la traiettoria

$$T(a_{t+1}) = \left\{ a_{t+1}, \frac{a_{t+1}}{2}, \ldots, 4, 2, 1 \right\}$$

conterrebbe la traiettoria

$$T\left(\frac{a_{t+1}}{2}\right) = \left\{ \frac{a_{t+1}}{2}, \ldots, 4, 2, 1 \right\}$$

il cui seme $a_{t+1}/2$ è *t-convergente*. In altre parole esisterebbe $a_{t+1}/2$ in K_t il cui doppio a_{t+1} è in A_{t+1}, contro l'ipotesi che a_{t+1} non è doppio di elementi di K_t. Quindi l'inclusione stretta non può valere e per l'arbitrarietà di t la 6.10) è vera. ●

2) Con lo stesso fissato $t \in N$, indichiamo con β_{t+1} la totalità degli interi positivi dispari *(t+1)-convergenti*. Ovviamente si ha subito:

$B_{t+1} \subseteq \beta_{t+1}$[29].

[29] La differenza tra gli insiemi B_{t+1} e β_{t+1} è che il primo, se non è vuoto, contiene solo i numeri dispari *(t+1)-convergenti* che provengono dai pari di K_t, il secondo, se non è vuoto, contiene tutti i numeri dispari *(t+1)-convergenti*.

Mostriamo che

$$\forall t \in N,\ B_{t+1} = \beta_{t+1}\,. \qquad 6.11)$$

Se per il t fissato $\beta_{t+1}=\varnothing$, allora anche $B_{t+1}=\varnothing$ e quindi

$$K_{t+1} = 2K_t\,.$$

Sia, per lo stesso t, $\beta_{t+1}\neq\varnothing$. Se esistesse un dispari $b_{t+1}\in\beta_{t+1}$ che non proviene[30] da alcun pari di K_t, cioè tale che $b_{t+1}\notin B_{t+1}$, allora seguirebbe un assurdo perché la traiettoria

$$T(b_{t+1})=\{\, b_{t+1},3b_{t+1}+1,\ldots,4,2,1\}$$

conterrebbe la traiettoria

$$T(3b_{t+1}+1)=\{3b_{t+1}+1,\ldots,4,2,1\}$$

il cui seme $3b_{t+1}+1$ è *t-convergente*, cioè $3b_{t+1}+1\in K_t$. Quindi b_{t+1} genererebbe $3b_{t+1}+1$ che è *t-convergente*, contro l'ipotesi. Per questo motivo l'inclusione stretta non può valere e per l'arbitrarietà di t la 6.11) è vera. ●

Da **1)** e **2)** segue la prima uguaglianza notevole 6.9), q. e. d. ■

Con i teoremi sopra esposti si individuano tutti i numeri che convergono in $t+1$ iterazioni a partire da quelli che convergono in t iterazioni quando l'algoritmo è nella prima forma.

OSSERVAZIONE 5 - Per la 6.10), la 6.9) diventa

$$\forall t \in N,\ K_{t+1} = A_{t+1} \cup B_{t+1} \qquad (\text{ I uguaglianza notevole }) \qquad 6.12)$$

Per un dato t se il derivato B_{t+1} di K_t è vuoto, si ha

$$K_{t+1} = A_{t+1} \qquad 6.13)$$

Ad esempio, siccome K_5 ha il derivato dispari vuoto, $K_6=A_6=\{10,64\}$.

[30] V. osservazione 4 di questo paragrafo.

Individuiamo adesso i numeri di B^*_{t+1}.

TEOREMA 6.5 (Teorema dei derivati dispari del secondo tipo)
Sia $h^*_t \in N_o$ t-convergente, $h^*_t \neq 2$, con l'algoritmo di Collatz nella seconda forma. Se $\exists\ b^* \neq 1$ soddisfacente all'equazione

$$\frac{3b^* + 1}{2} = h_t^* \qquad 6.14)$$

allora il numero dispari

$$b^* = \frac{2h_t^* - 1}{3} \qquad 6.15)$$

appartiene a B^*_{t+1} .

DIMOSTRAZIONE
Siano b^* e h^*_t soddisfacenti alle ipotesi. Poiché b^* è dispari, si ottiene h^*_t applicando a b^* la seconda legge della 3.2). Quindi la traiettoria

$$T(b^*) = T\left(\frac{2h_t^* - 1}{3}\right) = \left\{\frac{2h_t^* - 1}{3}, h_t^*, \ldots, 4, 2, 1\right\}$$

contiene la traiettoria $T(h^*)$, sicché $b^* \in B^*_{t+1}$. Come volevasi dimostrare. ∎

OSSERVAZIONE 6 - Il numero h^*_t del teorema 6.5 può essere pari o dispari e il derivato B^*_{t+1} potrebbe essere vuoto (*forse anche per valori di t molto grandi*). Ad esempio K^*_2 ha il derivato dei dispari B_3 vuoto.

OSSERVAZIONE 7 - I numeri di un insieme B^* possono essere riguardati in un duplice modo. Se b^* è visto come un numero dell'insieme B^*_{t+1} diremo che b^* proviene[31] da un pari $k^* \in K^*_t$. Se b^* è visto come numero della traiettoria $T(b^*)$ diremo che b^* genera il pari $k^* \in K^*_t$. Tuttavia questa distinzione qui non è determinante.

[31] V. la 6.4)

OSSERVAZIONE 8 - Un derivato dispari B^*_t o è vuoto o e formato da numeri dispari diversi da 1[32].

OSSERVAZIONE 9 - Analogamente alla 6.10) si ha:

$$2K^*_t=A^*_{t+1},\ \forall t\in N \qquad 6.16)$$

dove A^*_{t+1} è l'insieme di tutti gli interi positivi pari *(t+1)-convergenti* e che sono i doppi dei numeri di K^*_t. La 6.16) si dimostra come si è fatto nella prima parte della dimostrazione del teorema 6.4 aggiungendo l'asterisco * agli insiemi $2K_t$ e A_t, e ricorre nella prima parte del teorema 6.6.

OSSERVAZIONE 10 - Un derivato pari è formato solo da numeri pari.

OSSERVAZIONE 11 - Per $t>4$, $A_t\neq A^*_t$[33].

TEOREMA 6.6 (Teorema dell'unione dei derivati pari e dispari, algoritmo nella seconda forma)
Se l'algoritmo di Collatz è usato nella seconda forma, l'insieme K^*_t è l'unione dei doppi e dei derivati dispari dell'insieme K^*_t, ossia:

$$\forall t\in N,\ K^*_{t+1}=2K^*_t\cup B^*_{t+1} \qquad \text{(II uguaglianza notevole)} \qquad 6.17)$$

DIMOSTRAZIONE
Si procede come nella dimostrazione del teorema 6.4 aggiungendo però l'asterisco * a tutti gli insiemi: K_t, B_{t+1}, ecc. , e considerando, nella seconda parte, $(3b^*_{t+1}+1)/2$ come successore di $b^*_{t+1}\in\beta^*_{t+1}$. ■

OSSERVAZIONE 12 - Per la 6.16), la 6.17) può essere scritta

$$\forall t\in N,\ K^*_{t+1}=A^*_{t+1}\cup B^*_{t+1} \qquad \text{(II uguaglianza notevole)} \qquad 6.18)$$

e se per un certo t il derivato B^*_{t+1} di K^*_t è vuoto, allora

$$K^*_{t+1}=A^*_{t+1}\ . \qquad 6.19)$$

Ad esempio, siccome K^*_2 ha il derivato dei dispari B^*_3 vuoto, $K^*_3=A^*_3=\{8\}$.

---

[32] Per $h\neq 2$ l'equazione 6.15 non ammette la soluzione $n=1$.
[33] V. teorema 11.5 nel §11.

t	$\mathbf{K_t}$
t=0	$K_0=\{1\}$
t=1	$K_1=\{2\}$
t=2	$K_2=\{4\}$
t=3	$K_3=\{8\}$
t=4	$K_4=\{16\}$
t=5	$K_5=\{\underline{5}\text{-}32\}$
t=6	$K_6=\{10\text{-}64\}$
t=7	$K_7=\{\underline{3}\text{-}20\text{-}\underline{21}\text{-}128\}$
t=8	$K_8=\{6\text{-}40\text{-}42\text{-}256\}$
t=9	$K_9=\{12\text{-}\underline{13}\text{-}80\text{-}84\text{-}\underline{85}\text{-}512\}$
t=10	$K_{10}=\{24\text{-}26\text{-}160\text{-}168\text{-}170\text{-}1024\}$
t=11	$K_{11}=\{48\text{-}52\text{-}\underline{53}\text{-}320\text{-}336\text{-}340\text{-}\underline{341}\text{-}2048\}$
t=12	$K_{12}=\{\underline{17}\text{-}96\text{-}104\text{-}106\text{-}\underline{113}\text{-}640\text{-}672\text{-}680\text{-}682\text{-}4096\}$
t=13	$K_{13}=\{34\text{-}\underline{35}\text{-}192\text{-}208\text{-}212\text{-}\underline{213}\text{-}226\text{-}\underline{227}\text{-}1280\text{-}1344\text{-}1360\text{-}1364\text{-}\underline{1365}\text{-}8192\}$
t=14	$K_{14}=\{\underline{11}\text{-}68\text{-}\underline{69}\text{-}70\text{-}\underline{75}\text{-}384\text{-}416\text{-}424\text{-}426\text{-}452\text{-}\underline{453}\text{-}454\text{-}2560\text{-}2688\text{-}2720\text{-}2728\text{-}2730\text{-}16384\}$
t=15	$K_{15}=\{22\text{-}\underline{23}\text{-}136\text{-}138\text{-}140\text{-}\underline{141}\text{-}150\text{-}\underline{151}\text{-}768\text{-}832\text{-}848\text{-}852\text{-}\underline{853}\text{-}904\text{-}906\text{-}908\text{-}\underline{909}\text{-}5120\text{-}5376\text{-}5440\text{-}5456\text{-}5460\text{-}\underline{5461}\text{-}32768\}$
t=16	$K_{16}=\{\underline{7}\text{-}44\text{-}\underline{45}\text{-}46\text{-}272\text{-}276\text{-}\underline{277}\text{-}280\text{-}282\text{-}300\text{-}\underline{301}\text{-}302\text{-}1536\text{-}1664\text{-}1696\text{-}1704\text{-}1706\text{-}1808\text{-}1812\text{-}\underline{1813}\text{-}1816\text{-}1818\text{-}10240\text{-}10752\text{-}10880\text{-}10912\text{-}10920\text{-}10922\text{-}65536\}$

Tabella 2 – Tabulazione dei primi sedici insiemi K_t (algoritmo nella prima forma). I numeri sottolineati sono i derivati dispari dell'insieme precedente.

QUESTIONE - Quale insieme rappresenta l'intersezione $K_t \cap K^*_t,\ \forall t\in N$? Risponderò a questa domanda nel §11.

t	$\mathbf{K^*_t}$
t=0	K^*_0={1}
t=1	K^*_1={2}
t=2	K^*_2={4}
t=3	K^*_3={8}
t=4	K^*_4={5-16}
t=5	K^*_5={3*-10-32}
t=6	K^*_6={6-20-21*-64}
t=7	K^*_7={12-13*-40-42-128}
t=8	K^*_8={24-26-80-84-85*-256}
t=9	K^*_9={17*-48-52-53*-160-168-170-512}
t=10	K^*_{10}={11*-34-35*-96-104-106-113*-320-336-340-341*-1024}
t=11	K^*_{11}={7*-22-23*-68-69*-70-75*-192-208-212-213*-226-227*-640-672-680-682-2048}
t=12	K^*_{12}={14-15*-44-45*-46-136-138-140-141*-150-151*-384-416-424-426-452-453*-454-1280-1344-1360-1364-1365*-4096}
t=13	K^*_{13}={9*-28-29*-30-88-90-92-93*-272-276-277*-280-282-300-301*-302-768-832-848-852-853*-904-906-908-909*-2560-2688-2720-2728-2730-8192}
t=14	K^*_{14}={18-19*-56-58-60-61*-176-180-181*-184-186-201*-544-552-554-560-564-565*-600-602-604-605*-1536-1664-1696-1704-1706-1808-1812-1813*-1816-1818-5120-5376-5440-5456-5460-5461*-16384}
t=15	K^*_{15}={36-37*-38-112-116-117*-120-122-352-360-362-368-369*-372-373*-401*-402-403*-1088-1104-1108-1109*-1120-1128-1130-1137*-1200-1204-1205*-1208-1210-3072-3328-3392-3408-3412-3413*-3616-3624-3626-3632-3636-3637*-10240-10752-10880-10912-10920-10922-32768}
t=16	K^*_{16}={25*-72-74-76-77*-81*-224-232-234-240-241*-244-245*-267*-704-720-724-725*-736-738-739*-744-746-753*-802-803*-804-805-806-2176-2208-2216-2218-2240-2256-2260-2261*-2274-2275*-2400-2408-2410-2416-2417*-2420-2421*-6144-6656-6784-6816-6824-6826-7232-7248-7252-7253*-7264-7272-7274-7281*-20480-21504-21760-21824-21840-21844-21845*-65536}

Tabella 3 - Tabulazione dei primi sedici insiemi K^*_t *(algoritmo nella seconda forma). I numeri con l'asterisco sono i derivati dispari dell'insieme precedente.*

Capovolgendo la *Tabella 3* si ottiene il grafo di Collatz (*Figura 2*) che bisogna immaginare esteso verso l'alto. Si osservi che in orizzontale vi sono gli interi che convergono nello stesso numero di passi.

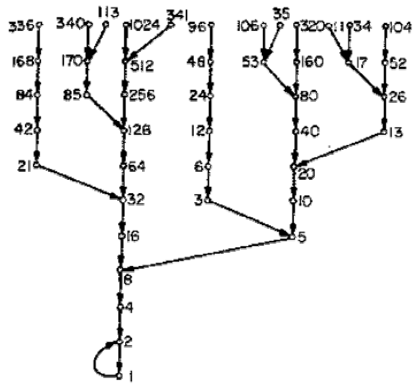

Figura 2 - Grafo di Collatz (algoritmo nella seconda forma)

§7. - ESEMPI

Costruiamo alcuni insiemi K con l'algoritmo di Collatz nella prima e nella seconda forma.

Prima forma
Se l'algoritmo è applicato nella prima forma, per determinare tutti i numeri n che convergono in $t+1$ passi a partire dai numeri k di K_t non basterà raddoppiare ogni k di K_t ma bisognerà verificare anche, quando k è pari, che $k-1$ sia divisibile per tre, perché deve essere $3n+1=k$, con $k\neq 4$ (teorema 6.2)).

K_0
Risulta $K_0=\{1\}$ in quanto occorrono zero passi per portare 1 ad 1.

K_1 , K_2 , K_3 e K_4
In K_1 ci sono i doppi degli elementi di K_0 e non esiste $n\neq 1$ soddisfacente in N l'equazione $3n+1=k$, con $k\in K_0$ e k pari, poiché K_0 contiene solo 1, perciò $A_1=\{2\}$ e $B_1=\emptyset$. Dunque: $K_1 = A_1 \cup B_1 = \{2\}$. In K_2 c'è solo 4 perché l'equazione $3n+1=2$ non ha soluzioni in N: $B_2=\emptyset$ e $K_2= A_2\cup\emptyset =\{4\}$. Siccome $B_3=\emptyset$ e $B_4=\emptyset$, allora $K_3= A_3\cup\emptyset =\{8\}$ e $K_4=A_4 \cup \emptyset =\{16\}$.

K_5
L'equazione $3n+1=16$ ha la soluzione intera positiva 5, pertanto $A_5=\{32\}$, $B_5=\{5\}$ e $K_5= A_5 \cup B_5 = \{5,32\}$.

K_6
L'insieme K_6 contiene solo 10 e 64 che sono i doppi degli elementi di K_5. Infatti le equazioni $3n+1=5$ e $3n+1=32$ non hanno soluzioni in N quindi $B_6=\varnothing$ e $K_6=A_6 \cup \varnothing = \{10,64\}$.

K_7
K_7 ha come elementi pari 20 e 128, perché doppi di quelli di K_6 e le soluzioni in N delle equazioni $3n+1=10$, $3n+1=64$ che sono 3 e 21. Quindi: $A_7=\{20,128\}$, $B_7=\{3,21\}$ e $K_7= A_7 \cup B_7= \{3,20,21,128\}$.

K_8
Usiamo il precedente insieme $K_7= \{3,20,21,128\}$. Nessuna delle seguenti equazioni
$3n+1=20$
$3n+1=128$
ha soluzioni in N, sicchè $B_8=\varnothing$.Quindi $K_8=2K_7 \cup \varnothing = \{6,40,42,256\}$.

K_9
Usiamo il precedente insieme $K_8=\{6,40,42,256\}$. Si ha $2K_8=\{12,80,84,512\}$. Risolviamo in N le seguenti equazioni:
1) $3n+1=6$
2) $3n+1=40$
3) $3n+1=42$
4) $3n+1=256$.

La prima e la terza equazione non hanno soluzioni in N. La seconda e la quarta equazione hanno come soluzioni rispettivamente 13 e 85 perciò $B_9=\{13,85\}$. Dunque $K_9=2K_8 \cup B_9=\{12,80,84,512\} \cup \{13,85\}=\{12,13,80,84,85,512\}$.

Seconda forma
Se l'algoritmo è applicato nella seconda forma, per determinare tutti i numeri n che convergono in $t+1$ passi a partire dai numeri h^* di K^*_t non basterà raddoppiare ogni h^* di K^*_t ma bisognerà verificare anche che $2h^*-1$ sia divisibile per tre, perché deve essere $3n+1=2h^*$, con $h^*\neq 2$ (teorema 6.5)).

K^*_0
Si ha $K^*_0=\{1\}$ perché occorrono zero passi per portare 1 ad 1.

K^*_1, K^*_2, K^*_3
In K^*_1 ci sono i doppi degli elementi di K^*_0 e gli interi positivi n che soddisfano l'equazione $(3n+1)/2=1$. La soluzione $n=1/3$ non è accettabile perciò $A^*_1=\{2\}$ e $B^*_1=\varnothing$. Dunque $K^*_1=A^*_1\cup\varnothing=\{2\}$. In K^*_2 c'è solo 4 perché l'equazione $(3n+1)/2=2$ non ha soluzione diversa da 1 in N: $K^*_2=A^*_2\cup\varnothing=\{4\}$. Siccome anche l'equazione $(3n+1)/2=4$ non ha soluzione in N, $K^*_3= A^*_3\cup\varnothing=\{8\}$.

K^*_4
Il doppio dell'unico elemento dell'insieme K^*_3 porta ad $A^*_4=\{16\}$. Risolvendo l'equazione $(3n+1)/2=8$ otteniamo $n=5$, dunque $B^*_4=\{5\}$ e $K^*_4= A^*_4\cup B^*_4=\{5,16\}$.

K^*_5
I doppi degli interi di K^*_4 sono 10 e 32 quindi $A^*_5=\{10,32\}$. Delle due equazioni $(3n+1)/2=5$ e $(3n+1)/2=16$ solo la prima ammette in N la soluzione $n=3$ quindi $B^*_5=\{3\}$ e $K^*_5= A^*_5\cup B^*_5=\{3,10,32\}$.

K^*_6
I doppi degli interi di K^*_5 sono 6, 20 e 64, quindi $A^*_6=\{6,20,64\}$. Delle tre equazioni $(3n+1)/2=3$, $(3n+1)/2=10$ e $(3n+1)/2=32$ solo la terza ha la soluzione accettabile $n=21$, dunque $B^*_6=\{21\}$ e $K^*_6= A^*_6\cup B^*_6=\{6,20,21,64\}$.

§8. – I MASSIMI DI K_t E K^*_t.

Alla fine del §5 ponevo la questione della ricerca del massimo di ogni insieme K. Esaminando le tabelle 2 e 3 del §6 avevo ipotizzato che il numero 2^t fosse il massimo di ogni K_t e K^*_t. Ciò è confermato dal teorema 8.2. Ho preferito inserire qui, nel lemma 8.1, alcune ovvie conclusioni.

LEMMA 8.1
i) *Se* $k_t\in K_t$ *allora* $2k_t\in A_{t+1}$, $\forall t\in N$.
ii) *Se* $a_t\in A_t$ *allora* $2a_t\in A_{t+1}$, $\forall t\in N_o$.
i*) *Se* $k^*_t\in K^*_t$ *allora* $2k^*_t\in A^*_{t+1}$, $\forall t\in N$.
ii*) *Se* $a^*_t \in A^*_t$ *allora* $2a^*_t\in A^*_{t+1}$, $\forall t\in N_o$.

DIMOSTRAZIONE
Ricordiamo che valgono la 6.10) e la 6.16) .

i) Sia k_t *t-convergente*, con $t\in N$. La traiettoria

$T(k_t)$

è contenuta nella traiettoria

$T(2k_t) = \{2k_t, k_t, ..., 4, 2, 1\}$

perciò $2k_t$ è un pari che converge in $t+1$ iterazioni, ovvero $2k_t \in A_{t+1}$, c. v. d. ◙

ii) Sia $a_t \in A_t$ e $t \in N_0$. Poichè $A_t \subseteq K_t$, è pure $a_t \in K_t$. Applicando la *i)*, segue che $2a_t \in A_{t+1}$, $\forall t \in N_0$, c. v. d. ◙

La ***i***)* e la ***ii***)* si dimostrano rispettivamente come la ***i)*** e la ***ii)***, basta asteriscare gli insiemi K_t e A_t. ■

TEOREMA 8.2 (Teorema dei massimi di K_t e K^*_t)

i) $\forall t \in N_o$, $max(K_t) = 2^t$.

i*) $\forall t \in N_o$, $max(K^*_t) = 2^t$.

DIMOSTRAZIONE

i) Algoritmo di Collatz nella prima forma

Procederemo per induzione usando la prima uguaglianza notevole 6.12).

Se $t=1$ allora $max(K_1)=2^1=2$.

Sia $t>1$

e

$$max(K_t)=2^t \; . \qquad 8.1)$$

Dimostreremo che è anche $max(K_{t+1})=2^{t+1}$. Per farlo, occorrerà provare che

1) $max(A_{t+1})=2^{t+1}$ (prima parte);

e

2) ogni numero di B_{t+1} è minore di 2^{t+1} (seconda parte).

Prima parte
1) Mostriamo che $max(A_{t+1})=2^{t+1}$ e cioè che ogni numero di A_{t+1} è minore di 2^{t+1} e che 2^{t+1} è in A_{t+1}.

Sia $k_t \in K_t$. Allora, per l'ipotesi 8.1)

$$\forall k_t \in K_t\,,\quad k_t \le 2^t\,. \qquad 8.2)$$

Per la *i)* del Lemma 8.1)

$$2k_t \in A_{t+1}\,. \qquad 8.3)$$

Da 8.2) segue che

$$\forall k_t \in K_t\,,\ 2k_t \le 2^{t+1}\,. \qquad 8.4)$$

Siccome per la 8.1) è anche

$$2^t \in K_t$$

per la prima uguaglianza notevole 6.12),

$$2^t \in A_t$$

da cui, per la *ii)* del Lemma 8.1), si ha

$$2^{t+1} \in A_{t+1}. \qquad 8.5)$$

Da 8.3), 8.4) e 8.5) segue che $max(A_{t+1})=2^{t+1}$, cioè la **1)**, c. v. d. ●

Seconda parte
2) Se $B_{t+1}=\varnothing$, dalla 6.12) segue che $K_{t+1}=A_{t+1}$ e da $max(A_{t+1})=2^{t+1}$ (prima parte) segue che $max(K_{t+1})=2^{t+1}$. Sia $B_{t+1}\neq\varnothing$. Mostriamo che ogni elemento di B_{t+1} è minore di 2^{t+1}. I numeri b_{t+1} di B_{t+1} sono i dispari del tipo 6.7):

$$b_{t+1} = \frac{k_t - 1}{3}\,,\quad con\ k_t \in K_t\ e\ k_t\ \ pari \qquad 8.6)$$

ma avendosi da

$k_t - 1 < k_t$

che

$$\frac{k_t - 1}{3} < k_t \qquad 8.7)$$

si ha, da 8.6), 8.7) e 8.1), che

$$b_{t+1} < k_t \leq 2^t \qquad 8.8)$$

e quindi

$\forall b_{t+1} \in B_{t+1},\ b_{t+1} < 2^{t+1}$.

Dunque anche tutti i numeri b_{t+1} di B_{t+1} sono minori di 2^{t+1} e la **2)** è dimostrata. ●

Dalla prima e dalla seconda parte segue che tutti i numeri di K_{t+1} sono minori o uguali di 2^{t+1} e questo dimostra la ***i)*** . ◙

i^*) *Algoritmo di Collatz nella seconda forma*

Procederemo per induzione usando la seconda uguaglianza notevole 6.18).

Se $t=1$ allora $max(K^*_1)=2^1 =2$.

Sia $t>1$

e

$$max(K^*_t)=2^t\ . \qquad 8.9)$$

Dimostreremo che è anche $max(K^*_{t+1})=2^{t+1}$. Per farlo occorrerà provare che

1*) $max(A^*_{t+1})=2^{t+1}$ (prima parte*);

e

2*) ogni numero di B^*_{t+1} è minore di 2^{t+1} (seconda parte*).

Prima parte*
1*) La dimostrazione è analoga a quella della parte prima della ***i)*** con l'algoritmo nella prima forma, basta aggiungere l'asterisco * agli insiemi A_t e K_t. Dunque 2^{t+1} è il massimo di A^*_{t+1} e la **1*)** è dimostrata. ●

Seconda parte*
2*) Se $B^*_{t+1}=\varnothing$, da 6.18) segue che $K^*_{t+1}=A^*_{t+1}$ e da $max(A^*_{t+1})=2^{t+1}$ (prima parte*) segue che $max(K^*_{t+1})=2^{t+1}$. Sia $B^*_{t+1}\neq\varnothing$. Proviamo che tutti i numeri b^* di B^*_{t+1} sono minori di 2^{t+1}. I numeri b^*_{t+1} sono i dispari del tipo 6.15):

$$b^*_{t+1} = \frac{2k^*_t - 1}{3}\text{, } con\ k^*_t \in K^*_t \qquad 8.10)$$

ma da

$2k^*_t - 1 < 2k^*_t$

segue che

$$\frac{2k^*_t - 1}{3} < 2k^*_t\ . \qquad 8.11)$$

Per l'ipotesi 8.9)

$\forall k^*_t \in K^*_t\ ,\ k^*_t \leq 2^t$

da cui segue che

$$\forall k^*_t \in K^*_t\ ,\ 2k^*_t \leq 2^{t+1}\ . \qquad 8.12)$$

Infine, per le 8.10), 8.11) e 8.12) possiamo scrivere

$b^*_{t+1} < 2k^*_t \leq 2^{t+1}$.

Dunque tutti i numeri b^*_{t+1} di B^*_{t+1} sono minori di 2^{t+1} e la **2*)** è dimostrata. ●

Da **1*)** e da **2*)** segue che tutti i numeri di K^*_{t+1} sono minori o uguali di 2^{t+1} e così anche la ***i*)*** è dimostrata. ■

Dal teorema 8.2 seguono subito i seguenti corollari.

COROLLARIO 8.3

i) $\forall t \in N,\ max(2K_t)=2^{t+1}$

i*) $\forall t \in N,\ max(2K^*_t)=2^{t+1}$.

COROLLARIO 8.4

i) $\forall t \in N_o,\ max(A_t)=2^t$

i*) $\forall t \in N_o,\ max(A^*_t)=2^t$.

OSSERVAZIONE - Il teorema 8.2 fornisce indicazioni sul tipo di numeri contenuti negli insiemi *K*: o c'è solo 2^t o ci sono i numeri minori o uguali di 2^t e questo significa che ogni *K* è un insieme finito.

Possiamo enunciare il corollario che segue.

COROLLARIO 8.5 - $\forall t \in N$, *K_t e K^*_t sono finiti.*

Ogni insieme *K* è formato dagli insiemi numerici *A* e *B*. Se un insieme *B* è non vuoto, allora è dotato di massimo, essendo limitato superiormente dal massimo dell'insieme *K* che lo contiene[34]. Vale perciò anche il seguente corollario.

COROLLARIO 8.6

i) Se $B_t \neq \emptyset$ allora $\exists\, max(B_t)$ con $max(B_t)<2^t$.

i*) Se $B^*_t \neq \emptyset$ allora $\exists\, max(B^*_t)$ con $max(B^*_t)<2^t$.

QUESTIONI - E' possibile calcolare o almeno stimare la numerosità di K_t (K^*_t), per un dato *t* ? Si può fare altrettanto per i sottoinsiemi *A* e *B* ?

---

[34] V. teorema 6.3.

§9. - SUI MASSIMI DEGLI INSIEMI *B*

Diamo una maggiorazione stretta dei massimi degli insiemi B.

PROPOSIZIONE 9.1

i) *Se* $B_{t+1} \neq \varnothing$ *allora*

$$\exists k_t \in K_t,\ k_t\ pari:\ max(B_{t+1}) < \frac{k_t - 1}{2}; \qquad 9.1)$$

i*) *Se* $B^*_{t+1} \neq \varnothing$ *allora*

$$\exists k^*_t \in K^*_t:\ max(B^*_{t+1}) < \frac{2k^*_t - 1}{2}. \qquad 9.2)$$

DIMOSTRAZIONE

i) Se $B_{t+1} \neq \varnothing$, allora in corrispondenza di ogni dispari $b_{t+1} \in B_{t+1}$ esisterà un numero pari $k_t \in K_t$ tale che[35]

$$b_{t+1} = \frac{k_t - 1}{3}$$

ma

$$\frac{k_t - 1}{3} < \frac{k_t - 1}{2}$$

quindi

$$b_{t+1} < \frac{k_t - 1}{2}\ .$$

Allora, in particolare, anche per il massimo di B_{t+1} vale la precedente diseguaglianza, cioè la 9.1), c. v. d. ◙

---

[35] V. la 6.3).

i*) Se $B^*_{t+1} \neq \varnothing$, allora in corrispondenza di ogni dispari $b^*_{t+1} \in B^*_{t+1}$ esisterà un numero $k^*_t \in K^*_t$ tale che[36]

$$b^*_{t+1} = \frac{2k^*_t - 1}{3}$$

ma

$$\frac{2k^*_t - 1}{3} < \frac{2k^*_t - 1}{2}$$

quindi

$$b^*_{t+1} < \frac{2k^*_t - 1}{2}$$

Allora, in particolare, anche per il massimo di B^*_{t+1} vale la precedente diseguaglianza, cioè la 9.2), c. v. d. ■

Dalla proposizione 9.1 discende la seguente proposizione 9.2 che dà una maggiorazione un po' più larga dei massimi degli insiemi B.

PROPOSIZIONE 9.2

i) *Se* $B_{t+1} \neq \varnothing$ *allora* $max(B_{t+1}) < 2^t$; 9.3)

i*) *Se* $B^*_{t+1} \neq \varnothing$ *allora* $max(B^*_{t+1}) < 2^t$. 9.4)

DIMOSTRAZIONE

i) Se $B_{t+1} \neq \varnothing$ allora vale la diseguaglianza 9.1) ed anche

$$\frac{k_t - 1}{2} < k_t$$

ma, per il teorema 8.2, il massimo di K_t è 2^t, ossia

$$\forall k_t \in K_t,\ k_t \leq 2^t$$

[36] V. la 6.4).

quindi

$max(B_{t+1}) < 2^t$, c. v. d. ◙

i*) Se $B^*_{t+1} \neq \varnothing$ allora vale la diseguaglianza 9.2) ed anche

$$\frac{2k^*_t - 1}{2} < k^*_t$$

ma, per il teorema 8.2, il massimo di K^*_t è 2^t, ossia

$$\forall k^*_t \in K^*_t,\ k^*_t \leq 2^t$$

quindi

$max(B^*_{t+1}) < 2^t$, c. v. d. ■

OSSERVAZIONI 1 - Si può far discendere la proposizione 9.1) dalla proposizione 9.2).

E' possibile in alcuni casi determinare il massimo degli insiemi B. Vediamo come. I numeri di B_{t+1} e di B^*_{t+1} provengono dalle soluzioni, se esistono, delle equazioni

$$b_{t+1} = \frac{k_t - 1}{3} \quad con \ \ k_t \in K_t \ ,k_t \ \ pari,\ k_t \neq 4 \qquad 9.5)$$

$$b^*_{t+1} = \frac{2k^*_t - 1}{3} \quad con \ \ k^*_t \in K^*_t \ ,k^*_t \neq 2 \qquad 9.6)$$

per i teoremi, rispettivamente, 6.2 e 6.5.

Il più grande numero intero dispari che si può ottenere dalla 9.5), se sostituiamo a k_t il massimo 2^t di K_t , è

$$\frac{2^t - 1}{3}$$

se 2^t-1 è divisibile per tre.

Allo stesso modo, il più grande numero intero dispari che si può ottenere dalla 9.6), se sostituiamo a k^*_t il massimo 2^t di K^*_t , è

$$\frac{2^{t+1}-1}{3}$$

se 2^{t+1}-1 è divisibile per tre.

Possiamo, quindi, enunciare il seguente teorema.

TEOREMA 9.3 (Teorema dei massimi di B_t e B^*_t)

i) *Se* 2^t-$1 \equiv 0 \bmod 3$, *con* $t \in N_0$ *e* $t \neq 2$, *allora* $max(B_{t+1}) = \dfrac{2^t-1}{3}$

i*) *Se* 2^{t+1}-$1 \equiv 0 \bmod 3$, *con* $t \in N_0$ *e* $t \neq 1$, *allora* $max(B^*_{t+1}) = \dfrac{2^{t+1}-1}{3}$.

E' possibile dare un'altra dimostrazione del teorema 9.3.

SECONDA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 9.3
i) Per ipotesi il numero 2^t è *t-convergente* e l'equazione $3b+1=2^t$ è soddisfatta da

$$b = \frac{2^t-1}{3}$$

che è diverso da 1, perché $t \neq 2$, quindi, per il teorema 6.2

$b \in B_{t+1}$.

Supponiamo adesso, per assurdo, che

$$\exists \beta \in B_{t+1} : b < \beta$$

cioè, tenendo conto della forma di b e di β

$$\frac{2^t-1}{3}<\frac{k_t-1}{3} \quad con \quad k_t \in K_t \ e \ k_t \ pari \quad .$$

Dalla precedente disuguaglianza segue che

$2^t<k_t$

fatto assurdo perché il massimo di K_t è 2^t, allora deve risultare:

$\forall \beta \in B_{t+1}, \beta \leq b$, cioè la tesi. ◙

i*) Per ipotesi il numero 2^t è *t-convergente* e l'equazione $3b^*+1=2^{t+1}$ è soddisfatta da

$$b^*=\frac{2 \cdot 2^t-1}{3}$$

che è diverso da 1, perché $t\neq 1$, quindi per il teorema 6.5

$b^* \in B^*_{t+1}$.

Supponiamo adesso, per assurdo, che

$\exists \beta^* \in B^*_{t+1} : b^* < \beta^*$

cioè, tenendo conto della forma di b^* e di β^*

$$\frac{2 \cdot 2^t-1}{3}<\frac{2k^*_t-1}{3} \quad con \quad k^*_t \in K^*_t \quad .$$

Dalla precedente disuguaglianza segue che

$2^t<k^*_t$

fatto assurdo perché il massimo di K^*_t è 2^t, allora deve risultare:

$\forall \beta^* \in B^*_{t+1}, \beta^* \leq b$, cioè la tesi. ■

OSSERVAZIONI 2 – Nel caso $t=0$ il predecessore b di 2^t non è un dispari, nel caso $t=2$ è $b=1$ che non appartiene a nessun derivato dispari. Per $t=1$ e $t=3$ il numero 2^t-1 non è divisibile per tre.

§10. – CONGETTURA DEL PARTIZIONAMENTO DI N_o

Abbiamo visto, con la proposizione fondamentale 5.1, che gli insiemi K_t e K^*_t sono non vuoti:

a) $\forall t \in N, K_t \neq \varnothing$ **a*)** $\forall t \in N, K^*_t \neq \varnothing$ 10.1)

Abbiamo dimostrato, proposizione 5.4, che gli insiemi K_t e K^*_t sono a due a due disgiunti:

b) $\forall t_1 \neq t_2, K_{t_1} \cap K_{t_2} = \varnothing$ **b*)** $\forall t_1 \neq t_2, K^*_{t_1} \cap K^*_{t_2} = \varnothing$ 10.2)

Se fossero vere anche le uguaglianze di ricoprimento di N_o:

c) $\bigcup_{t=0}^{+\infty} K_t = N_0,\ t \in N$ **c*)** $\bigcup_{t=0}^{+\infty} K^*_t = N_0,\ t \in N$ 10.3)

potremmo affermare che ognuna delle famiglie $\{K_t\}_{t\in N}$ e $\{K^*_t\}_{t\in N}$ è una partizione[37] di N_o. Dunque, se fossero vere **c)** e **c*)** di 10.3) sarebbe provata la congettura di Collatz e cioè che ogni intero positivo è in solo K o, in altri termini, che *ogni intero positivo converge*.

§11. – SULL'INTERSEZIONE DI K_t e K^*_t

In questo paragrafo dimostreremo che l'intersezione degli insiemi K_t e K^*_t è $\{2^t\}$.

---

[37] La relazione R="gli interi positivi x e y sono equivalenti se sono entrambi *t-convergenti*" non è riflessiva perché non si sa se ogni intero positivo converge (è ciò che bisogna dimostrare).

LEMMA 11.1

L'intersezione dei derivati dispari del primo tipo t-convergenti e dei derivati pari del secondo tipo t-convergenti è vuota, ossia:

$$\forall t \in N_o,\ B_t \cap A^*_t = \varnothing \qquad 11.1)$$

DIMOSTRAZIONE

Ovvia, perché un derivato dispari o è vuoto o è formato da numeri dispari diversi da *1* e un derivato pari contiene solo numeri pari[38]. ■

LEMMA 11.2

L'intersezione dei derivati dispari del secondo tipo t-convergenti e dei derivati pari del primo tipo t-convergenti è vuota, ossia:

$$\forall t \in N_o,\ B^*_t \cap A_t = \varnothing \qquad 11.2)$$

DIMOSTRAZIONE

Ovvia, siccome un derivato dispari o è vuoto o è formato da numeri dispari diversi da *1* e un derivato pari contiene solo numeri pari[39]. ■

LEMMA 11.3

L'intersezione dei derivati dispari del primo tipo t-convergenti e del secondo tipo t-convergenti è vuota, ossia:

$$\forall t \in N_o,\ B_t \cap B^*_t = \varnothing \qquad 11.3)$$

DIMOSTRAZIONE

Banalmente, se t è uguale a 1, 2, 3, gli insiemi B_t e B^*_t sono entrambi vuoti. Supponiamo per assurdo che per un fissato $t > 3$ risulti

$$B_t \cap B^*_t \neq \varnothing .$$

Allora esisterà almeno un

$$n_t{}^{40} \in B_t \cap B^*_t .$$

---

[38] V. osservazioni 3 e 10 del §6 .

[39] V. osservazioni 8 e 10 del §6 .

[40] La notazione n_t indica che il numero n è *t-convergente*.

Da

$n_t \in B_t = \{n_t \in D\text{: } 3n_t+1=k_{t-1}, k_{t-1} \in K_{t-1} \wedge k_{t-1} \text{ pari}\}$[41]

segue che n_t è un intero dispari della forma 6.7), ossia

$$n_t = \frac{k_{t-1} - 1}{3}, \quad con \quad k_{t-1} \in K_{t-1} \ e \ k_{t-1} \ pari$$

e da

$n_t \in B^*_t = \{n_t \in D\text{: } \frac{3n_t + 1}{2} = k^*_{t-1}, k^*_{t-1} \in K^*_{t-1}\}$[42]

segue che n_t è un intero dispari della forma 6.15), ossia

$$n_t = \frac{2k^*_{t-1} - 1}{3}, \quad con \quad k^*_{t-1} \in K^*_{t-1},$$

perciò, eguagliando le due espressioni di n_t , dovrà essere anche

$$\frac{k_{t-1} - 1}{3} = \frac{2k^*_{t-1} - 1}{3}$$

e quindi anche

$$k_{t-1}=2k^*_{t-1} \qquad 11.4)$$

con $k_{t-1} \in K_{t-1}$ e $k^*_{t-1} \in K^*_{t-1}$.

L'eguaglianza 11.4) è manifestamente assurda perché k_{t-1} è *(t-1)-convergente* e $2k^*_{t-1}$ è *t-convergente* per la *i*)* del lemma 8.1. Dunque non ha senso supporre non vuota l'intersezione $B_t \cap B^*_t$ e per l'arbitrarietà di $t>3$ la 11.3) è dimostrata. ■

41 V. la 6.3) del §6.
42 V. la 6.4) del §6.

LEMMA 11.4
L'intersezione di K_t e K^*_t è uguale all'intersezione dei derivati pari di K_{t-1} e dei derivati pari di K^*_{t-1}, ossia:

$$\forall t \in N_o,\ K_t \cap K^*_t = A_t \cap A^*_t \qquad 11.5)$$

DIMOSTRAZIONE
Per la dimostrazione ci avvarremo delle uguaglianze notevoli 6.12) e 6.18). Fissato $t \in N_o$ si ha:

$$K_t \cap K^*_t = (A_t \cup B_t) \cap (A^*_t \cup B^*_t)=$$

$$=((A_t \cup B_t) \cap A^*_t) \cup ((A_t \cup B_t) \cap B^*_t)=$$

$$=(A_t \cap A^*_t) \cup (B_t \cap A^*_t) \cup (A_t \cap B^*_t) \cup (B_t \cap B^*_t) \qquad 11.6)$$

La tesi segue applicando alla seconda, terza e quarta intersezione della 11.6), rispettivamente, i lemmi 11.1), 11.2) e 11.3) e per l'arbitrarietà di *t*. ■

LEMMA 11.5
L'intersezione dei derivati pari del primo tipo t-convergenti e del secondo tipo t-convergenti è $\{2^t\}$, ossia:

$$\forall t \in N_o,\ A_t \cap A^*_t=\{2^t\} \qquad 11.7)$$

DIMOSTRAZIONE
Per la dimostrazione faremo uso delle uguaglianze 6.10) e 6.16). Banalmente, se t è uguale a 1, 2, 3, la 11.7) è vera. Per un fissato $t > 3$ si può scrivere:

$$A_t \cap A^*_t = 2K_{t-1} \cap 2K^*_{t-1} = 2(K_{t-1} \cap K^*_{t-1}) \qquad 11.8)$$

Applicando il lemma 11.4 all'intersezione nell'ultima parentesi della 11.8), otteniamo

$$2(K_{t-1} \cap K^*_{t-1}) = 2(A_{t-1} \cap A^*_{t-1})=$$

$$= 2(2K_{t-2} \cap 2K^*_{t-2})=2^2(K_{t-2} \cap K^*_{t-2}) \qquad 11.9)$$

Applicando il lemma 11.4 all'intersezione nell'ultima parentesi della 11.9) e iterando, otteniamo

$$2^2(K_{t-2} \cap K^*_{t-2}) = 2^2(A_{t-2} \cap A^*_{t-2}) = \ldots = 2^{t-1}(K_1 \cap K^*_1) \qquad 11.10)$$

Infine, applicando il lemma 11.4 all'intersezione nell'ultima parentesi della 11.10), si ha

$$2^{t-1}(K_1 \cap K^*_1) = 2^{t-1}(A_1 \cap A^*_1) = 2^{t-1}(2K_0 \cap 2K^*_0) = 2^t(K_0 \cap K^*_0) =$$

$$= 2^t(A_0 \cap A^*_0) = 2^t(\{1\} \cap \{1\}) = \{2^t\}.$$

Per l'arbitrarietà di $t > 3$ la 11.7) è dimostrata. ■

TEOREMA 11.6
L'intersezione tra K_t e K^*_t è uguale a $\{2^t\}$, ossia

$$\forall t \in N_o,\ K_t \cap K^*_t = \{2^t\}\ . \qquad 11.11)$$

DIMOSTRAZIONE
Applicando all'intersezione $K_t \cap K^*_t$ il lemma 11.4, si ha la 11.5). Applicando il lemma 11.5 all'intersezione $A_t \cap A^*_t$ della 11.5), si ottiene la 11.11), c. v. d. ■

§ 12. - CONCLUSIONI

Abbiamo visto che ciascuna delle famiglie $\{K_t\}_{t \in N}$ e $\{K^*_t\}_{t \in N}$, legate alla congettura di Collatz nelle due forme, è formata dagli insiemi numerici finiti K di interi positivi, a due a due disgiunti. Ogni insieme K, a sua volta, è formato dagli insiemi numerici di interi positivi A e B, $\forall t \in N_o$, ed ha per massimo il numero 2^t. Il lettore avrà notato, in particolare, che gli insiemi A_o e A^*_o non sono doppi di alcun insieme K, allora, ponendo $A_o = K_o$ e $A^*_o = K^*_o$[43], possiamo considerare gli insiemi A_t e A^*_t, $\forall t \in N$, come costituiti dagli interi positivi della forma $a \cdot 2^t$, con $a \in N_o$ e $t \in N$. In questo modo il teorema 8.2 e il corollario 8.4 del §11 saranno validi $\forall t \in N$. Continueranno a valere, $\forall t \in N$, le

[43] V. note 19 e 20.

6.9), 6.10), 6.12), 6.16), 6.17) e 6.18), perché non generano A_o e A^*_o. Bisognerà prestare attenzione alle due uguaglianze notevoli 6.12) e 6.18) se scritte nella seguente forma:

$\forall t \in N, K_t = A_t \cup B_t$ (I uguaglianza notevole)

$\forall t \in N, K^*_t = A^*_t \cup B^*_t$ (II uguaglianza notevole)

dato che gli insiemi A_t e A^*_t non possono essere considerati come doppi, rispettivamente, di K_{t-1} e di K^*_{t-1} se $t=0$. In questo caso gli insiemi A vanno interpretati come sopra detto. Infine, anche tutti i lemmi da 11.1 a 11.5 e il teorema 11.6, con la nuova definizione degli insiemi A, possono rienunciarsi $\forall t \in N$, evitando, se si vuole, le locuzioni "*derivati pari*" o "*insieme dei doppi*" a favore dei semplici nomi A_t e A^*_t .

APPENDICE

ALCUNE CODIFICHE DELL'ALGORITMO DI COLLATZ (prima forma)

QBASIC

```
'PROGRAMMA 3n+1
DO
INPUT "Immetti un intero positivo N >>>_ ", n
DO WHILE n > 1
        IF n MOD 2 = 0 THEN
                n = n / 2
              ELSE
                n = 3 * n + 1
              END IF
        PRINT n; " ";
LOOP
PRINT
INPUT "ANCORA (S/N) >>>_ ", RISPOSTA$
RISPOSTA$ = UCASE$(RISPOSTA$)
LOOP UNTIL RISPOSTA$ = "N"
```

Free Basic

```
'PROGRAMMA 3n+1
DIM n as LongInt
```

```
'LongInt: -9 223 372 036 854 775 808 to 9 223 372 036 854 775
'ULongInt:0 to 18 446 744 073 709 551 615
'UInteger:0 to 4 294 967 295
DIM RISPOSTA as STRING
DO UNTIL (RISPOSTA = "N")
INPUT "Immetti un intero positivo N >>>_ ", n
  WHILE n > 1
   IF n MOD 2 = 0 THEN
           n = n / 2
          ELSE
       n = 3 * n + 1
     END IF
   PRINT n; " ";
  WEND
INPUT "ANCORA (S/N) >>>_ ", RISPOSTA
RISPOSTA = UCASE$(RISPOSTA)
LOOP
```

Nota
Non usate gli interi del tipo ULongInt con il FreeBASIC v.0.20.0b-win32.

Pascal (Free Pascal)

```
Program Syracuse;
Var n:Integer;
risposta:Char;
Begin
Repeat
  Write(Immetti un intero positivo N >>>_ ');
   Readln(n);
     While n > 1 Do
       Begin
         If n Mod 2 = 1 Then
                       n:= 3 * n + 1
                        Else
                       n:=n Div 2;
             Write(n,' ');
      End; { End While }
Writeln;
Write('ALTRA ELABORAZIONE ?  (S/N) >_ ');
Readln(risposta);
risposta:=UpCase(risposta);
Until risposta='N';
End.
```

FORTRAN95

```
program collatz
! scritto in F_world version 1.0  - (Imagine1) -
character(len=1) :: risposta
integer::N
  do
```

```
      print*," Immetti un intero positivo N  >>>>_  "
      read*,N

       do
          if (modulo(N,2)==0) then
                        N=N/2
                     else
                        N=3*N+1
                     end if
          print*,N

          if (N==1) then
                  exit
                  end if
       end do

        print*,"ANCORA ?  (S/N)  >_ "
        read*,risposta
        if ((risposta=="n") .or. (risposta=="N")) then
                                  exit
                                  end if
   end do
end program collatz
```

OCTAVE

```
function syrac=syr(n)
 syrac=[n];
 while (n>1)
     if (mod(n,2)==0)
          n=n/2;
     else
          n=3*n+1;
     endif
   syrac=[syrac,n];
 endwhile
endfunction
```

■

Riferimenti sitografici e bibliografici

[1] Base cinque - http://utenti.quipo.it/base5/numeri/collaz.htm
- http://utenti.quipo.it/base5/index.htm

[2] Rudi mathematici – N. 66 – Luglio 2004 – Anno Sesto - www.rudimathematici.com

[3] Collatz problem - http://mathworld.wolfram.com/CollatzProblem.html
- http://mathworld.wolfram.com/notebooks/IntegerSequences/CollatzProblem.nb

[4] Hailstone Number - http://mathworld.wolfram.com/HailstoneNumber.html

[5] Jeff C. Lagarias - http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/paper/html/node1.html

[6] Jeff C. Lagarias - http://oldweb.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/paper/html/paper.html
- http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/index.html

[7] Eric Roosendall - http://www.ericr.nl/

[8] Eric Mercier - http://membres.lycos.fr/ericmer/syracuse/syracuse.htm

[9] Silvana Leggerini, "L'enigmatico pari e dispari che da cinquant'anni non fa dormire i matematici", *Newton*, n. 7, 2004.