Calcolo delle Radici

Veriano Veracini
Veriano.Veracini@inwind.it

Premessa

Lo scopo di queste pagine è quello di descrivere alcuni metodi pratici per il calcolo delle radici, compresi alcuni metodi insoliti. Particolare attenzione è posta a quei metodi che richiedono soltanto l'utilizzo delle quattro operazioni (somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione). Per i più curiosi, nell'appendice in fondo a queste pagine, ho riportato alcune notizie e curiosità di varia natura.

Definizioni, storia e proprietà

Definizioni

Si dice radice **n**-esima di un numero "**a**" il numero "**b**" che elevato ad "**n**" riproduce il numero "**a**". Il numero "**n**" si chiama indice della radice; il numero "**a**" si chiama radicando della radice ed il numero "**b**" si chiama soluzione della radice **n**-esima del numero "**a**".
Ovviamente deve sempre risultare "**n**" $\neq$ 0.

L'espressione $\sqrt[n]{a} = b$ è equivalente all'espressione $a = b^n$ ed è equivalente all'espressione $a^{\frac{1}{n}} = b$.
Si dice radice quadrata se "**n**" è uguale a 2 e si scriverà $\sqrt{a}$ (per convenzione il 2 si omette e non si scriverà $\sqrt[2]{a}$), si dice radice cubica se "**n**" è uguale a 3 e si scriverà $\sqrt[3]{a}$, si dice radice quarta se "**n**" è uguale a 4 e si scriverà $\sqrt[4]{a}$, ecc.

Un pizzico di storia

Le radici quadrate (radici aventi indice uguale a due) erano note, ai matematici greci, sino dall'antichità e venivano calcolate attraverso il metodo geometrico.
Il matematico Francois Viète propose alcuni metodi di calcolo per l'estrazione delle radici dal grado secondo sino al grado sesto.
Il calcolo delle radici di ogni indice si semplificò moltissimo grazie allo studio dei logaritmi e alla loro introduzione da parte dei matematici Henry Briggs, Joost Burgi, Leonard Euler, Edmund Gunter, John Napier, ed altri.
Grazie soprattutto al lavoro di Abraham de Moivre fu introdotto il metodo di calcolo per l'estrazione delle radici dei numeri complessi noto come "Formula di Moivre".

Proprietà delle radici

Le radici hanno 4 proprietà fondamentali, vediamole in dettaglio.

1) Il prodotto di più radicali, aventi lo stesso indice, è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi.

Esempio

Moltiplicando il radicale $\sqrt[m]{a}$ per il radicale $\sqrt[m]{b}$ otteniamo $\sqrt[m]{ab}$. Interessante è anche la sua applicazione inversa con il preciso scopo di portare un fattore del radicando fuori dalla radice stessa.

2) Il quoziente di due radicali, aventi lo stesso indice, è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi.

Esempio

Dividendo il radicale $\sqrt[n]{a}$ per il radicale $\sqrt[n]{b}$ abbiamo $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ che è equivalente a $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Anche in questo caso può essere utile la sua applicazione inversa.

3) L'elevazione a potenza di un radicale è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il radicando elevato alla potenza.

Esempio
L'espressione $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ è equivalente all'espressione $\sqrt[n]{a^m}$. Anche in questo caso può essere utile la sua applicazione inversa.

4) La radice di un radicale è un radicale che ha per indice il prodotto degli indici e per radicando il medesimo radicando.

Esempio
L'espressione $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ è equivalente all'espressione $\sqrt[n\cdot m]{a}$.

Utilizzo pratico delle 4 proprietà elencate
Premetto che moltiplicando o dividendo l'indice della radice e l'esponente del radicando per uno stesso numero, il radicale non si altera. Cioè $\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[p]{\sqrt[m]{a^n}})^p = \sqrt[m\cdot p]{a^{n\cdot p}}$.
Vediamo ora come utilizzare queste 4 proprietà per comparare due radicali che possiedono indici diversi.
I radicali $\sqrt[m]{a^n}$ e $\sqrt[p]{b^q}$ così come sono scritti non sono facilmente comparabili, ma se entrambi vengono espressi con il medesimo indice la sua comparazione sarà più semplice. Per potere effettuare tale calcolo dobbiamo procedere nel modo seguente.
Calcoliamo il minimo comune multiplo (m.c.m.) degli indici dei radicali, poi dividiamo tale m.c.m. per ogni singolo indice e moltiplichiamo il risultato ottenuto per l'esponente del radicando, attribuendo come indice delle radici il m.c.m. calcolato.
Per rimanere al nostro esempio avremo che il m.c.m. sarà "**m**"moltiplicato "**p**" ("**mp**"), poi (per il primo radicale) lo dovremo dividere per "**m**" ottenendo "**p**" che lo moltiplicheremo per "**n**".
Per cui avremo che $\sqrt[m]{a^n}$ é equivalente a $\sqrt[m\cdot p]{a^{n\cdot p}}$.
Per il secondo radicale ci dobbiamo comportare nel medesimo modo di prima e cioè divideremo il m.c.m. ("**mp**") per "**p**" e poi lo moltiplicheremo per "**q**".
Per cui avremo che $\sqrt[p]{b^q}$ è equivalente a $\sqrt[p\cdot m]{b^{q\cdot m}}$.
Ora è molto più semplice confrontare il radicale $\sqrt[m\cdot p]{a^{n\cdot p}}$ con il radicale $\sqrt[m\cdot p]{b^{q\cdot m}}$.
Se $a^{n\cdot p} > b^{q\cdot m}$ allora $\sqrt[m]{a^n} > \sqrt[p]{b^q}$.

Esempio
Sarà maggiore la $\sqrt{2}$ o la $\sqrt[3]{3}$?
Si può rispondere facilmente a questa domanda facendo queste semplici trasformazioni.

$$\sqrt{2} = (\sqrt[3]{\sqrt{2}})^3 = \sqrt[6]{2^3}$$

$$\sqrt[3]{3} = (\sqrt{\sqrt[3]{3}})^2 = \sqrt[6]{3^2}$$

Abbiamo trasformato due radicali con indici diversi (che sono incomparabili) in due radicali equivalenti con il medesimo indice (che sono facilmente comparabili).
Visto che 3^2 ($3^2 = 9$) è maggiore di 2^3 ($2^3 = 8$) allora abbiamo che $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$

Esempio
Vediamo un esempio di moltiplicazione di due radicali con indice diverso.
$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[m \cdot n]{a^n} \cdot \sqrt[m \cdot n]{b^m} = \sqrt[m \cdot n]{a^n \cdot b^m}$
Nell'ipotesi che sia $b = a$ abbiamo $\sqrt[m \cdot n]{a^n \cdot a^m} = \sqrt[m \cdot n]{a^{(n+m)}}$

Radice n-esima di un numero complesso (Formula di Moivrè)
Grazie a questa formula è possibile calcolare le radici **n**-esime di un numero espresso in forma complessa. Sempre grazie a questa formula possiamo stabilire che ogni numero, diverso da zero, ammette sempre "n" e solo "n" radici n-esime distinte nel campo dei numeri complessi.

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + j\mathrm{sen}\,\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}[\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}) + j\mathrm{sen}(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})]$$
In questa formula φ (anomalia) è espressa in radianti.

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + j\mathrm{sen}\,\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}[\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{360k}{n}) + j\mathrm{sen}(\frac{\varphi}{n} + \frac{360k}{n})]$$
In questa formula φ (anomalia) è espressa in gradi sessagesimali.

Nelle formule il numero "k" può assumere tutti i valori interi possibili. Si può dimostrare che la radice può avere soltanto "n" valori diversi in corrispondenza dei seguenti valori di "k".
"k" = 0, 1, 2, 3, …, (n - 1)
Com'è possibile vedere, queste formule permettono di calcolare gli "n" valori complessi della radice n-esima di un numero complesso espresso in forma di coordinate polari dove ρ è il suo modulo e φ è la sua anomalia. Se il radicando è espresso in forma di coordinate cartesiane, dove x è l'ascissa e y è l'ordinata, bisogna prima effettuare la conversione tra coordinate cartesiane e coordinate polari.
Indipendentemente dal valore del radicando e dal valore dell'indice della radice, si può dimostrare che, al massimo due di queste "n" soluzioni possono essere numeri reali, al massimo due di queste "n" soluzioni possono essere numeri immaginari, tutte le altre soluzioni devono essere soluzioni complesse.

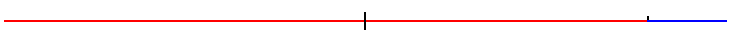
Metodi non analizzati
In queste pagine non analizzerò la possibilità di effettuare il calcolo delle radici, attraverso il "Regolo Calcolatore", le "Tavole Aritmetico-logaritmiche" e i tasti della calcolatrice $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[n]{\ }$ e Y^X che lo effettuano in modo automatico.

Metodi di calcolo per le sole radici quadrate
Questo capitolo è dedicato ai metodi utilizzabili per il calcolo delle sole radici quadrate dei numeri reali non negativi.

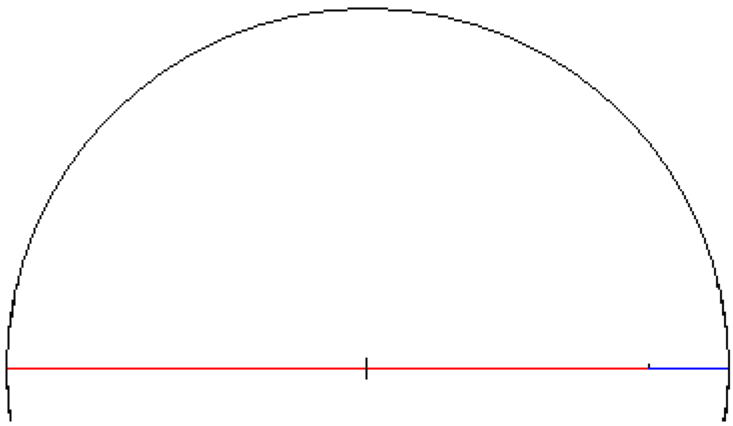
Metodo geometrico
Questo metodo di calcolo delle radici quadrate è antichissimo, sicuramente il più antico di tutti i metodi. Piuttosto che descrivere il metodo, anche se è molto semplice, preferisco commentare ogni singolo passaggio della sua costruzione.
Ammettiamo di dover calcolare la radice quadrata del numero 8. Si traccia una retta di lunghezza proporzionale al numero 8 (retta di colore rosso).

Ad una delle due estremità si prolunga la retta precedente di una quantità proporzionale al numero 1 (retta di colore blu).

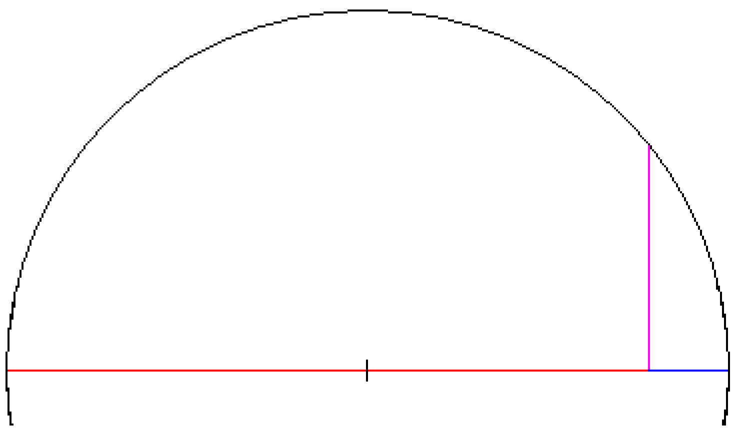
Per cui ora abbiamo una retta complessiva proporzionale al numero 9 (retta di colore rosso-blu). Ora dobbiamo trovare il centro di questa nuova retta.



Tracciamo ora una circonferenza con centro nel punto appena trovato e raggio uguale alla distanza che esiste dal centro ad uno dei due estremi.



Ora tracciamo una retta perpendicolare alla retta esistente nel punto dove le retta di colore rosso e quella di colore blu si incontrano, sino ad incontrare la circonferenza appena tracciata. Questo nuovo segmento, di colore rosa, è proporzionale alla radice quadrata del segmento di colore rosso.



Dobbiamo dire anche un'altra cosa interessante e cioè che se si unisce il punto dove la retta di colore rosa incontra la circonferenza con il punto dove la retta blu incontra la circonferenza, si ottiene un segmento che è proporzionale alla radice quadrata del diametro della circonferenza (retta di colore rosso-blu). Le dimostrazioni le potrete provare in appendice.

Metodo manuale

Esiste un metodo abbastanza semplice, anche se necessita di un certo tempo, per calcolare la radice quadrata, approssimata per difetto all'unità, di un numero attraverso delle semplici operazioni. Piuttosto che descrivere il metodo (che non è molto semplice da descrivere), preferisco fare un esempio pratico commentando ogni singolo passaggio.

Esempio
Ammettiamo di voler calcolare la radice quadrata del numero 200.000.000. Si deve scomporre il numero da calcolare in gruppi di due cifre a partire da destra. Per cui il numero 200.000.000 si trasforma in:

2	00	00	00	00

Visto che abbiamo ottenuto 5 gruppi di cifre, il valore della radice quadrata approssimato all'unità sarà composto da 5 cifre, e cioè:

$$\sqrt{200.000.000} = x\,x\,x\,x\,x$$

Mentalmente si calcola la radice quadrata, per difetto a meno dell'unità, del gruppo di cifre che sono più a sinistra (è da tener presente che questo gruppo di cifre può essere composto anche da una sola cifra, come è nel nostro esempio). Visto che abbiamo:

$1^2 = 1 < 2$ $\qquad$ $2^2 = 4 > 2$

Per cui, la radice quadrata, per difetto a meno dell'unità, del gruppo di cifre più a sinistra (2) è 1. Questo numero è anche la prima cifra della radice che stiamo cercando, cioè:

$$\sqrt{200.000.000} = 1\,x\,x\,x\,x$$

Calcolare il quadrato di questo valore (1) e sottrarlo al gruppo di cifre più a sinistra. Allineiamo, al risultato ottenuto, il gruppo di due cifre immediatamente più a destra.

2	00	00	00	00	1
$1^2 = 1$					
1	00				

Si stacca l'ultima cifra più a destra del nostro numero.

2	00	00	00	00	1
$1^2 = 1$					
1	00				
10	0				

Si raddoppia la prima approssimazione della radice appena trovata

2	00	00	00	00	1
					1 x 2 =
$1^2 = 1$					2
1	00				
10	0				

e si verifica quante volte è contenuta nel secondo gruppo di cifre (10).

2	00	00	00	00	1

$1^2 = 1$		1 x 2 = 2
1	00	
10	0	10 : 2 = 5

Ora effettuiamo la verifica per capire se questa seconda cifra (5) è corretta oppure se è troppo grande. Questa cifra (5) si scrive a destra del doppio della radice (2) e si moltiplica questo nuovo numero (25) per il quoziente stesso (5). Cioè:

2	00	00	00	00	1
$1^2 = 1$					1 x 2 = 2
1	00				
10	0				10 : 2 = 5
					25 * 5 = 125 >
					100

Siccome questo nuovo numero (125) è maggiore di 100, il numero 5 non può essere la seconda cifra cercata. Per cui si rifà il calcolo riducendo di una unità la cifra del quoziente fino a trovare un numero che, come prodotto, dia un valore inferiore o uguale a quello cercato (100). Cioè:

2	00	00	00	00	1
$1^2 = 1$					1 x 2 = 2
1	00				
10	0				10 : 2 = 5
					25 * 5 = 125 >
					100
					24 * 4 = 96 < 100

Essendo 96 inferiore a 100 abbiamo appena ottenuto la seconda cifra della radice quadrata.

$$\sqrt{200.000.000} = 14\,x\,x\,x$$

Si esegue la sottrazione tra 100 e 96.

2	00	00	00	00	14
$1^2 = 1$					1 x 2 = 2
1	00				
10	0				10 : 2 = 5
					25 * 5 = 125 >
	100				100
	96				24 * 4 = 96 < 100
	4				

Ora si allinea al nuovo numero ottenuto (4) le altre due cifre immediatamente a destra (00) e si stacca l'ultima cifra.

2	00	00	00	00	14
					1 x 2 =
$1^2 = 1$					2
1	00				
10	0				10: 2 =

					5
					25 * 5 = 125 >
	100				100
	96				24 * 4 = 96 < 100
	4	00			
	40	0			

Si raddoppia la radice appena trovata (14 x 2 = 28) e si verifica quante volte è contenuta nel terzo gruppo di cifre (40) poi si procede come prima.

2	00	00	00	00	14
$1^2 = 1$					1 x 2 = 2
1	00				
10	0				10 : 2 = 5
					25 * 5 = 125 >
	100				100
	96				24 * 4 = 96 < 100
	4	00			14 x 2 = 28
	40	0			40 : 28 = 1
					281 x 1 = 281 <
					400

Siccome 281 è minore di 400, allora 1 è terza cifra della radice quadrata cercata.

$$\sqrt{200.000.000} = 141xx$$

Si sottrae da 400 il numero 281 e si abbassano le prossime cifre (00) staccando l'ultima cifra come abbiamo fatto precedentemente.

2	00	00	00	00	141
$1^2 = 1$					1 x 2 = 2
1	00				
10	0				10 : 2 = 5
					25 * 5 = 125 >
	100				100
	96				24 * 4 = 96 < 100
	4	00			14 x 2 = 28
	40	0			40 : 28 = 1
		400			
					281 x 1 = 281 <
		281			400
		119	00		
		1190	0		

Proseguendo come prima si ottiene:

2	00	00	00	00	14142
$1^2 = 1$					1 x 2 = 2
1	00				

10	0				10 : 2 = 5
					25 * 5 = 125 >
	100				100
	96				24 * 4 = 96 < 100
	4	00			14 x 2 = 28
	40	0			40 : 28 = 1
		400			
					281 x 1 = 281 <
		281			400
		119	00		141 x 2 = 282
		1190	0		1190 : 282 = 4
			11900		
			11296		2824 x 4 = 11296 < 11900
			604	00	1414 x 2 = 2828
			6040	0	6040 : 2828 = 2
				60400	
				56564	28282 x 2 = 56564 < 60400
				3836	

Per cui $\sqrt{200.000.000} = 14.142$ a meno di una unità.

Da questo calcolo possiamo dedurre anche che 14.142 x 14.142 + 3.836 = 200.000.000
Ovviamente risulta anche che:
1 x 1 + 1 = 2
14 x 14 + 4 = 200
141 x 141 + 119 = 20.000
1414 x 1414 + 604 = 2.000.000

Voglio far notare una particolare proprietà dell'estrazione della radice quadrata. *I vari resti parziali non possono essere maggiori del doppio della radice corrispondente.* Lascio al lettore la facile dimostrazione di questa proprietà.

Con una "certa" attenzione possiamo proseguire nel nostro calcolo per ottenere, se necessario, anche alcune cifre decimali. Da questo calcolo, comunque, possiamo anche dedurre il valore della radice quadrata del numero 2, cioè

$$\sqrt{2} = 1,4142$$

Esempio
Ammettiamo di voler calcolare la radice quadrata del numero 8.754.300.512. Procedendo come abbiamo appena visto, il calcolo da effettuare sarà:

87	54	30	05	12	93564
					9 x 2 =
$9^2 = 81$					18
6	54				
65	4				65 : 18 = 3
	654				
					183 * 3 = 549 <
	549				654
	105	30			93 x 2 = 186

1053	0			1053 : 186 = 5
	10530			
	9325			1865 x 5 = 9325 < 10530
	1205	05		935 x 2 = 1870
	12050	5		12050 : 1870 = 6
		120505		
		112236		18706 x 6 = 112236 < 120505
		8269	12	9356 x 2 = 18712
		82691	2	82691 : 18712 = 4
			826912	
			748496	187124 x 4 = 748496 < 826912
			78416	

Per cui $\sqrt{8754300512}$ = 93564 a meno di una unità.

Metodo con uso di frazioni continue illimitate periodiche

Tralasciando la teoria che, almeno in parte, potrete trovare in appendice, vediamo come sia possibile trasformare un numero irrazionale quadratico in una frazione continua illimitata periodica. Per essere il più chiari possibile faccio immediatamente due esempi pratici.

Esempio

Proviamo a calcolare la frazione continua del numero irrazionale quadratico $\sqrt{2}$.

Sappiamo che 1 < $\sqrt{2}$ < 2, per cui possiamo scrivere $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x}$ con x maggiore di 1.

Calcoliamo il valore della x.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x} \qquad \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{x} \qquad x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \qquad x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1$$

Per cui x è un valore compreso tra 2 e 3, per cui possiamo scrivere $x = 2 + \frac{1}{y}$ con y maggiore di 1.

Calcoliamo il valore della y.

$$x = 2 + \frac{1}{y} \qquad \sqrt{2}+1 = 2 + \frac{1}{y} \qquad \sqrt{2}-1 = \frac{1}{y} \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \qquad y = \sqrt{2}+1$$

Cioè x è uguale a y.

Riassumendo abbiamo che $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x}$. Siccome $x = 2 + \frac{1}{y}$ sostituendo otteniamo $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y}}$ ma siccome y è uguale a x, possiamo continuare a sostituire. Per cui otteniamo

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y}}}$$ proseguendo nella sostituzione $$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$ oppure $[1, \bar{2}]$.

<u>Esempio</u>

Calcoliamo la frazione continua illimitata periodica del numero irrazionale $\sqrt{3}$.

Sappiamo che 1 < $\sqrt{3}$ < 2, per cui possiamo scrivere $\sqrt{3}=1+\frac{1}{x}$ con x maggiore di 1.

Calcoliamo il valore della x.

$$\sqrt{3}-1=\frac{1}{x} \qquad x=\frac{1}{\sqrt{3}-1} \qquad x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Dunque x è un valore compreso tra 1 e 2, per cui possiamo scrivere $x=1+\frac{1}{y}$ con y maggiore di 1.

Calcoliamo il valore della y.

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2}=1+\frac{1}{y} \qquad \frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{1}{y} \qquad y=\frac{2}{\sqrt{3}-1} \qquad y=\sqrt{3}+1$$

Dunque y è un valore compreso tra 2 e 3, per cui possiamo scrivere $y=2+\frac{1}{z}$ con z maggiore di 1.

Calcoliamo il valore della z.

$$\sqrt{3}+1=2+\frac{1}{z} \qquad \sqrt{3}-1=\frac{1}{z} \qquad z=\frac{1}{\sqrt{3}-1} \qquad z=\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Possiamo vedere che x è uguale z per cui possiamo scrivere:

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\dots}}}}$$ o anche $[1,\overline{1,2}]$.

Con questo metodo possiamo calcolare tutti i numeri irrazionali quadratici. Diamo ora alcuni risultati.

$\sqrt{2}=[1,\overline{2}]$ $\qquad$ $\sqrt{3}=[1,\overline{1,2}]$

$\sqrt{5}=[2,\overline{4}]$ $\qquad$ $\sqrt{6}=[2,\overline{2,4}]$

$\sqrt{7}=[2,\overline{1,1,1,4}]$ $\qquad$ $\sqrt{8}=[2,\overline{1,4}]$

$\sqrt{10}=[3,\overline{6}]$ $\qquad$ $\sqrt{11}=[3,\overline{3,6}]$

$\sqrt{12}=[3,\overline{2,6}]$ $\qquad$ $\sqrt{13}=[3,\overline{1,1,1,1,6}]$

$\sqrt{14}=[3,\overline{1,2,1,6}]$ $\qquad$ $\sqrt{15}=[3,\overline{1,6}]$

Dopo aver calcolato la frazione continua illimitata periodica, del numero irrazionale quadratico, non ci rimane che trasformare detta frazione nella corrispondente frazione ordinaria. Questo passaggio si chiama "Calcolo delle Ridotte".

Calcolo delle Ridotte

Si definisce ridotta di ordine n (ridotta n-esima) di una frazione continua la frazione continua limitata che si ottiene fermandosi all' n-esimo termine. Questa si indica con R_n.

<u>Esempio</u>

$$\sqrt{3} = [1,\overline{1,2}] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}}}$$

$$R_1 = 1$$

$$R_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$R_3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = \frac{5}{3} = 1,\overline{6}$$

$$R_4 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{7}{4} = 1,75$$

$$R_5 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{19}{11} = 1,\overline{72}$$

$$R_6 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}}} = \frac{26}{15} = 1,7\overline{3}$$

$$R_7 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}} = \frac{71}{41} = 1,\overline{73170}$$

Ecc.

Più si aggiungono termini più il valore delle varie ridotte si avvicinano al valore della radice quadrata rappresentata dalla frazione continua illimitata periodica. In appendice è spiegato un altro metodo, più veloce e più semplice, per ottenerne i valori.

Se si assume, come valore approssimato di una frazione continua, una sua ridotta si commette un errore. L'errore che si commette, cioè la differenza (in valore assoluto) tra la ridotta e il valore della frazione continua, è sempre minore del reciproco del quadrato del denominatore considerato. Chiariamo bene questo punto.

Esempio
Il valore della $\sqrt{3}$ è 1,7320508…
Vediamo i valori delle varie ridotte con i loro massimi errori.

$$R_1 = 1 \pm 1$$

$$R_2 = 2 \pm 1$$

$$R_3 = \frac{5}{3} = 1,\overline{6} \pm \frac{1}{3^2}$$

$$R_4 = \frac{7}{4} = 1,75 \pm \frac{1}{4^2}$$

$$R_5 = \frac{19}{11} = 1,\overline{72} \pm \frac{1}{11^2}$$

$$R_6 = \frac{26}{15} = 1,7\overline{3} \pm \frac{1}{15^2}$$

$$R_7 = \frac{71}{41} = 1,\overline{73170} \pm \frac{1}{41^2}$$

Ecc.

Conclusioni
Esistono altri metodi per poter calcolare la radice quadrata di un numero e, a mio parere, il più significativo è un antico metodo indiano denominato metodo Bakhshali.
Nel capitolo dedicato ai "Metodi di calcolo generali" verranno spiegati altri metodi interessanti per poter effettuare il calcolo delle radici quadrate.

Metodo di calcolo per le sole radici cubiche

Questo capitolo è dedicato ad un metodo utilizzabile per il calcolo delle sole radici cubiche, dei numeri reali.

Metodo manuale
Questo metodo, come il suo equivalente descritto per il calcolo delle radici quadrate, è abbastanza semplice ma necessita di un certo tempo per la sua esecuzione. Anche in questo caso il risultato si otterrà attraverso delle semplici operazioni e sarà approssimato per difetto all'unità. Piuttosto che descrivere il metodo (che non è molto semplice da descrivere ed è anche leggermente diverso dal precedente), preferisco fare un esempio pratico e commentare ogni singolo passaggio.

Esempio

Ammettiamo di voler calcolare la radice cubica del numero 200.000.000. Si deve scomporre il numero da calcolare in gruppi di tre cifre a partire da destra. Per cui il numero 200.000.000 si trasforma in:

200 000 000

Visto che abbiamo ottenuto 3 gruppi di cifre, il valore della radice cubica approssimato all'unità sarà composto da 3 cifre, e cioè:

$$\sqrt[3]{200.000.000} = x\,x\,x$$

Mentalmente si calcola la radice cubica, per difetto a meno di una unità, del gruppo di cifre che sono più a sinistra (è da tener presente che questo gruppo di cifre può essere composto anche da una sola cifra).

Nel nostro esempio avremo:

$1^3 = 1 < 200$	$2^3 = 8 < 200$	$3^3 = 27 < 200$
$4^3 = 64 < 200$	$5^3 = 125 < 200$	$6^3 = 216 > 200$

Per cui la radice cubica, per difetto a meno di una unità, del gruppo di cifre più a sinistra (200) è 5. Questo numero è anche la prima cifra della radice che stiamo cercando, cioè:

$$\sqrt[3]{200.000.000} = 5\,x\,x$$

Poi si deve calcolare il cubo di tale numero e si sottrae al gruppo di cifre più a sinistra.

200	000	000	5
$5^3 = 125$			
75			

Allineeremo al risultato ottenuto la prima cifra (cioè quella più a sinistra), del gruppo di tre cifre immediatamente più a destra.

200	000	000	5
$5^3 = 125$			
75	0		

Si triplica il quadrato della prima approssimazione della radice appena trovata

200	000	000	5
$5^3 = 125$			5^2 x 3 = 75
75	0		

e si verifica quante volte è contenuto nel secondo gruppo di cifre (750).

200	000	000	5
$5^3 = 125$			5^2 x 3 = 75
75	0		750 : 75 = 10

Nel nostro esempio questo rapporto da, come valore, 10. Ovviamente nessuna cifra può essere maggiore di 9, per cui la verifica la faremo a partire da questa cifra (cioè dal numero 9).
La verifica va fatta calcolando il cubo del numero composto dalla cifra della radice cubica trovata (5) e dal numero della divisione (questo numero sarebbe 10 ma, come spiegato, non può essere superiore a 9). Cioè dovremo calcolare il cubo di 59.

200	000	000	5
$5^3 = 125$			$5^2 \times 3 = 75$
75	0		$750 : 75 = 10$
			$59^3 = 205.379 > 200.000$

Siccome questo nuovo numero (205.379) è maggiore di 200.000, il numero 9 non può essere la seconda cifra cercata. Per cui si rieffettua il calcolo riducendo di una unità la cifra del quoziente fino a trovare un numero che, come risultato, da un valore inferiore o uguale a quello cercato (200.000). Cioè:

200	000	000	5
$5^3 = 125$			$5^2 \times 3 = 75$
75	0		$750 : 75 = 10$
			$59^3 = 205.379 > 200.000$
			$58^3 = 195.112 < 200.000$

Essendo 195.112 < 200.000 abbiamo appena ottenuto la seconda cifra della radice cubica.

$$\sqrt[3]{200.000.000} = 58\,x$$

Si esegue la sottrazione tra 200.000 e 195.112

200	000	000	58
$5^3 = 125$			$5^2 \times 3 = 75$
75	0		$750 : 75 = 10$
	200.000		$59^3 = 205.379 > 200.000$
	195.112		$58^3 = 195.112 < 200.000$
	4.888		

Come abbiamo fatto precedentemente allineeremo al risultato ottenuto la prima cifra (cioè quella più a sinistra), del gruppo di tre cifre immediatamente più a destra.

200	000	000	58
$5^3 = 125$			$5^2 \times 3 = 75$
75	0		$750 : 75 = 10$
	200.000		$59^3 = 205.379 > 200.000$
	195.112		$58^3 = 195.112 < 200.000$
	4.888	0	

Si triplica il quadrato della prima approssimazione della radice appena trovata

200	000	000	58
$5^3 = 125$			$5^2 \times 3 = 75$
75	0		$750 : 75 = 10$

200.000		$59^3 = 205.379 > 200.000$
195.112		$58^3 = 195.112 < 200.000$
4.888	0	$58^2 \times 3 = 10.092$

e si verifica quante volte è contenuta nel secondo gruppo di cifre (48880).

200	000	000	58
$5^3 = 125$			$5^2 \times 3 = 75$
75	0		750 : 75 = 10
	200.000		$59^3 = 205.379 > 200.000$
	195.112		$58^3 = 195.112 < 200.000$
	4.888	0	$58^2 \times 3 = 10.092$
			48.880 : 10.092 =
			4

La verifica va fatta calcolando il cubo del numero composto dalle cifre della radice cubica trovate (58) e del numero della divisione (4). Cioè dovremo calcolare il cubo di 584.

200	000	000	58
$5^3 = 125$			$5^2 \times 3 = 75$
75	0		750 : 75 = 10
	200.000		$59^3 = 205.379 > 200.000$
	195.112		$58^3 = 195.112 < 200.000$
	4.888	0	$58^2 \times 3 = 10.092$
			48.880 : 10.092 =
			4
			$584^3 = 199.176.704 < 200.000.000$

Siccome questo nuovo numero (199.176.704) è inferiore a 200.000.000, il numero 4 è la nostra cifra cercata.

200	000	000	584
$5^3 = 125$			$5^2 \times 3 = 75$
75	0		750 : 75 = 10
	200000		$59^3 = 205.379 > 200.000$
	195112		$58^3 = 195.112 < 200.000$
	4888	0	$58^2 \times 3 = 10.092$
			48.880 : 10.092 =
			4
		200.000.000	
		199.176.704	$584^3 = 199.176.704 < 200.000.000$
		823.296	

Per cui $\sqrt[3]{200000000} = 584$ a meno di una unità.

Ovviamente risulta che:

$5^3 + 75 = 200$

$58^3 + 4.888 = 200.000$

$584^3 + 823.296 = 200.000.000$

Con una "certa" attenzione possiamo proseguire nel nostro calcolo per ottenere anche alcune cifre decimali. Da questo calcolo, comunque, possiamo anche dedurre il valore della radice cubica del numero 200, cioè

$$\sqrt[3]{200} = 5,84$$

Esempio
Ammettiamo di voler calcolare la radice cubica del numero 54.300.512.

54	300	512	378
$3^3 = 27$			3^2 x 3 = 27
27	3		
	273		273 : 27 = 10
			utilizzo il n° 9
			$39^3 = 59.319 > 54.300$
	54.300		$38^3 = 54.872 > 54.300$
	50.653		$37^3 = 50.653 < 54.300$
	3.647	5	37^2 x 3 = 4.107
		36.475	36.475 : 4.107 = 8
		54.300.512	
			378^3 = 54.010.152 <
		54.010.152	54.300.512
		290.360	

Per cui $\sqrt[3]{54300512}$ = 378 a meno di una unità.

Conclusioni
Bisogna precisare che esiste anche un metodo grafico per poter effettuare tale calcolo e ne troverete un piccolo accenno in appendice. Nel capitolo successivo, dedicato ai "Metodi di calcolo generali", ci sono spiegati altri metodi interessanti per poter effettuare il calcolo delle radici cubiche.

Metodi di calcolo generali

Questo capitolo è dedicato ad illustrare alcuni metodi per calcolare la radice n-esima di un numero. Questi metodi sono metodi generali e sono applicabili a qualunque indice. Parallelamente a quanto illustrato nei capitoli "Metodi di calcolo per le sole radici quadrate" e "Metodi di calcolo per le sole radici cubiche", esistono dei metodi per calcolare le radici di grado superiore alla cubica sino alla sesta, ma sono dei metodi piuttosto complessi e non utilizzati visto l'esistenza di metodi nettamente più semplici e veloci che qui andremo ad illustrare.

Metodo che deriva dalla stessa definizione
E' possibile calcolare le radici quadrate, cubiche, ecc. utilizzando la stessa definizione di radice. Vediamo come questo sia possibile con due semplici esempi.

Esempio
Ammettiamo di voler calcolare la $\sqrt{23}$. Questo valore è compreso tra 4 e 5, perché:

$4^2 = 16 < 23$
$5^2 = 25 > 23$

Ora calcoliamo la prima cifra decimale.
$4{,}1^2 = 16{,}81 < 23$
…………………
$4{,}6^2 = 21{,}16 < 23$
$4{,}7^2 = 22{,}09 < 23$
$4{,}8^2 = 23{,}04 > 23$
Ora sappiamo che la $\sqrt{23}$ è un numero compreso tra 4,7 e 4,8.

Ora calcoliamo la seconda cifra decimale.
$4{,}71^2 = 22{,}1841 < 23$
……………………..
$4{,}78^2 = 22{,}8484 < 23$
$4{,}79^2 = 22{,}9441 < 23$
$4{,}80^2 = 23{,}0400 > 23$
Ora sappiamo che la $\sqrt{23}$ è un numero compreso tra 4,79 e 4,80.

Ora calcoliamo la terza cifra decimale.
$4{,}791^2 = 22{,}953681 < 23$
…………………………
$4{,}794^2 = 22{,}982436 < 23$
$4{,}795^2 = 22{,}992025 < 23$
$4{,}796^2 = 23{,}001616 > 23$
Ora sappiamo che la $\sqrt{23}$ è un numero compreso tra 4,795 e 4,796.
Proseguendo in questo modo possiamo calcolare la radice quadrata con i decimali desiderati.

Esempio
Ammettiamo di voler calcolare la $\sqrt[3]{23}$. Questo valore è compreso tra 2 e 3, perché:
$2^3 = 8 < 23$
$3^3 = 27 > 23$

Ora calcoliamo la prima cifra decimale.
$2{,}1^3 = 9{,}261 < 23$
………………….
$2{,}7^3 = 19{,}683 < 23$
$2{,}8^3 = 21{,}952 < 23$
$2{,}9^3 = 24{,}389 > 23$
Ora sappiamo che la $\sqrt[3]{23}$ è un numero compreso tra 2,8 e 2,9.

Ora calcoliamo la seconda cifra decimale.
$2{,}81^3 = 22{,}188041 < 23$
$2{,}82^3 = 22{,}425768 < 23$
$2{,}83^3 = 22{,}665187 < 23$
$2{,}84^3 = 22{,}906304 < 23$
$2{,}85^3 = 23{,}149125 > 23$
Ora sappiamo che la $\sqrt[3]{23}$ è un numero compreso tra 2,84 e 2,85.

Ora calcoliamo la terza cifra decimale.

$2{,}841^3 = 22{,}930509 < 23$
$2{,}842^3 = 22{,}954732 < 23$
$2{,}843^3 = 22{,}978971 < 23$
$2{,}844^3 = 23{,}003228 > 23$

Ora sappiamo che la $\sqrt[3]{23}$ è un numero compreso tra 2,843 e 2,844.

Possiamo proseguire in questo modo per calcolare la radice cubica con i decimali desiderati. Come è possibile intuire questo metodo è piuttosto "lento" visto che richiede molti calcoli ripetitivi. Fortunatamente esistono metodi nettamente più veloci che andremo ad illustrare.

Metodo logaritmico

Questo è un metodo molto importante, visto la sua universalità, flessibilità e precisione. Il solo difetto è che, per poter essere utilizzato, necessita di conoscere i valori dei logaritmi dei numeri.

La formula da utilizzare è:

$\log \sqrt[n]{a} = \dfrac{\log a}{n}$ da cui si deduce che $\sqrt[n]{a} = \operatorname{Antilog} \dfrac{\log a}{n}$.

Questa identità è indipendente dalla base del logaritmo utilizzato (tale base deve essere, però, maggiore di 0 e diversa da 1).

Esempio

Ammettiamo di voler calcolare la radice quadrata del numero 2013, cioè $\sqrt{2013}$.

$\text{Log}_{10}\, 2013 = 3{,}3038438$ $\qquad \dfrac{3{,}3038438}{2} = 1{,}6519219$

$\text{Antilog}_{10}\, 1{,}6519219 = 44{,}866469$ $\qquad$ per cui $\sqrt{2013} = 44{,}866469$

In questo esempio abbiamo utilizzato i logaritmi in base 10, ma possiamo utilizzare anche i logaritmi in base "e" o in ogni altra base positiva diversa da 1. Ora vedrete il medesimo esempio utilizzando i logaritmi naturali che hanno come base il numero 2,718281828….

Esempio

Ammettiamo di voler calcolare la radice quadrata del numero 2013, cioè $\sqrt{2013}$.

$\text{Ln}\, 2013 = 7{,}6073814$ $\qquad \dfrac{7{,}6073814}{2} = 3{,}8036907$

$\text{AntiLn}\, 3{,}8036907 = 44{,}866469$ $\qquad$ per cui $\sqrt{2013} = 44{,}866469$

Esempio

Ammettiamo di voler calcolare la radice ottava del numero 997190, cioè la $\sqrt[8]{997190}$

$\text{Log}_{10}\, 997190 = 5{,}9987779$ $\qquad \dfrac{5{,}9987779}{8} = 0{,}7498472$

$\text{Antilog}_{10}\, 0{,}7498472 = 5{,}6214356$ $\qquad$ per cui $\sqrt[8]{997190} = 5{,}6214356$

Metodo delle tangenti o iterazione di Newton

Tralasciando la teoria che, almeno in parte, potrete trovare in appendice vediamo come sia possibile utilizzare questo metodo per effettuare il calcolo delle radici. Questo metodo può essere utilizzato sempre e comunque, ma da il meglio di se quando il valore iniziale è abbastanza vicino al valore della radice n-esima, altrimenti possono essere necessarie molte iterazioni per raggiungere un valore accettabile. In genere, questo metodo, si utilizza per affinare un valore trovato utilizzando altri metodi (per esempio il "Metodo che deriva dalla stessa definizione" o il "Metodo dell'aumento finito").

E' possibile dimostrare che reiterando questo calcolo ci si avvicina, sempre di più, al valore della radice cercata. Bisogna subito dire che questo metodo iterativo permette il calcolo in modo diretto sia delle radici n-esime, sia dei loro reciproci. Ovviamente illustrerò entrambe le possibilità.

Formula da utilizzare per il calcolo delle radici n-esime.
Diamo immediatamente la formula da utilizzare.

$$x_1 = \frac{(n-1)x_0^{\ n} + a}{nx_0^{\ n-1}}$$

Dove con:
x_0 = valore approssimato di partenza della nostra funzione.
x_1 = valore approssimato, un poco migliore rispetto a x_0, della nostra funzione.
n = indice della radice.
a = radicando della radice.

Facciamo immediatamente due esempi in modo da chiarire immediatamente come si deve procedere per utilizzare questo metodo in questa variante.

Esempio
Ammettiamo di voler calcolare la $\sqrt{23}$. Sappiamo che questo valore è compreso tra 4 e 5. Per cui utilizziamo, come valore iniziale, il valore di 4.

Per n = 2 questa è la formula da utilizzare $\quad x_1 = \frac{x_0^{\ 2} + a}{2x_0} = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{a}{x_0})$.

$x_1 = \frac{1}{2}(4 + \frac{23}{4})$ = 4,875.

$x_2 = \frac{1}{2}(4{,}875 + \frac{23}{4{,}875})$ = 4,7964744.

$x_3 = \frac{1}{2}(4{,}7964744 + \frac{23}{4{,}7964744})$ = 4,7958316.

$x_4 = \frac{1}{2}(4{,}7958316 + \frac{23}{4{,}7958316})$ = 4,7958315.

Ora sappiamo che la $\sqrt{23}$ è 4,7958315, visto che i valori di x_3 e x_4 praticamente coincidono. Come è possibile vedere con quattro iterazioni siamo arrivati ad avere il valore corretto sino al 6° decimale.

Esempio
Ammettiamo di voler calcolare la $\sqrt[5]{54321}$. Questo valore è sicuramente compreso tra 5 e 10, visto che 5^5 = 3125 e 10^5 = 100000 per cui ipotizziamo che il valore sia 7.

Per n = 5 questa è la formula da utilizzare $\quad x_1 = \frac{4x_0^{\ 5} + a}{5x_0^{\ 4}} = \frac{1}{5}(4x_0 + \frac{a}{x_0^{\ 4}})$.

$x_1 = \frac{4 \cdot 7^5 + 54321}{5 \cdot 7^4}$ = 10,124865

Per il prossimo calcolo utilizzerò il valore di 10 e non 10,124865 visto che sappiamo già che il valore della radice cercata è sicuramente inferiore a 10.

$x_2 = \frac{4 \cdot 10^5 + 54321}{5 \cdot 10^4}$ = 9,08642

$$x_3 = \frac{4 \cdot 9{,}08642^5 + 54321}{5 \cdot 9{,}08642^4} = 8{,}8628$$

$$x_4 = \frac{4 \cdot 8{,}8628^5 + 54321}{5 \cdot 8{,}8628^4} = 8{,}851056$$

$$x_5 = \frac{4 \cdot 8{,}851056^5 + 54321}{5 \cdot 8{,}851056^4} = 8{,}8510247$$

Ora sappiamo che $\sqrt[5]{54321}$ deve essere un numero un poco più piccolo di 8,8510247.

Come abbiamo potuto ben vedere, nei due esempi precedenti, è sempre conveniente, per risparmiare iterazioni, partire dal valore approssimato maggiore e non da quello minore. Se non abbiamo altre possibilità è possibile utilizzare, come valore approssimato iniziale (x_0), il valore del radicando (a). Ovviamente le iterazioni per arrivare ad un ottimo valore cresceranno di conseguenza anche, e soprattutto, al crescere del relativo indice.

Formula da utilizzare per il calcolo del reciproco delle radici n-esime.
Nell'ipotesi di dover calcolare il reciproco della radice n-esima di un numero possiamo effettuare tale calcolo, in modo diretto, con questa variante. In realtà questa variante non ha questo scopo, ma ha uno scopo ben diverso. Sembra incredibile ma, a volte è conveniente, per calcolare la radice n-esima di un numero, calcolare prima il reciproco della medesima radice n-esima e poi, con un altro calcolo, ottenere il valore della radice n-esima cercata. Diamo immediatamente la formula da utilizzare.

$$x_1 = \frac{x_0((n+1) - a x_0^{\,n})}{n}$$

Dove con:
x_0 = valore approssimato di partenza della nostra funzione.
x_1 = valore approssimato, un poco migliore rispetto a x_0, della nostra funzione.
n = indice della radice.
a = radicando della radice.

Visto che con questa variante si calcola il reciproco della radice n-esima, per calcolare il valore della radice n-esima, è sufficiente effettuare il reciproco di questo valore. Nell'ipotesi che l'indice della radice sia 2, si può effettuare anche un calcolo diverso e cioè moltiplicare il valore calcolato per il radicando.
Abbiamo visto che, per risparmiare iterazioni nel calcolo della radice n-ennesima, conviene partire dal valore approssimato maggiore. In questa variante, visto che calcoliamo l'inverso delle radici, conviene effettuare l'inverso e cioè conviene partire dal valore approssimato minore. Bisogna immediatamente dire che, ovviamente, non si può utilizzare il valore 0 (zero) come valore iniziale.

Esempio
Ammettiamo di voler calcolare la $\sqrt{23}$. Allora prima calcoliamo $\frac{1}{\sqrt{23}}$ e poi calcoliamo la $\sqrt{23}$ effettuando $23 \cdot \frac{1}{\sqrt{23}}$. Sappiamo che la $\sqrt{23}$ è compresa tra 4 e 5, per cui il valore di $\frac{1}{\sqrt{23}}$ è compreso tra 0,2 ($0{,}2 = \frac{1}{5}$)e 0,25 ($0{,}25 = \frac{1}{4}$). Per cui, come valore iniziale, dovremmo utilizzare il valore di 0,2, ma partirò da 0,25 cosi dimostreremo che non è conveniente partire dal valore maggiore.

Per $n = 2$ questa è la formula da utilizzare $x_1 = \dfrac{x_0(3 - ax_0{}^2)}{2}$.

$x_1 = \dfrac{0{,}25 \cdot (3 - 23 \cdot 0{,}25^2)}{2}$ = 0,1953125

Per il prossimo calcolo utilizzerò il valore di 0,2 e non 0,1953125 visto che sappiamo già che il valore del reciproco della radice cercata è sicuramente superiore a 0,2.

$x_2 = \dfrac{0{,}2 \cdot (3 - 23 \cdot 0{,}2^2)}{2}$ = 0,208

$x_3 = \dfrac{0{,}208 \cdot (3 - 23 \cdot 0{,}208^2)}{2}$ = 0,2085125

$x_4 = \dfrac{0{,}2085125 \cdot (3 - 23 \cdot 0{,}2085125^2)}{2}$ = 0,2085144

$x_5 = \dfrac{0{,}2085144 \cdot (3 - 23 \cdot 0{,}2085144^2)}{2}$ = 0,2085144

Ora sappiamo che il valore di $\dfrac{1}{\sqrt{23}}$ è 0,2085144, visto che i valori di x_4 e x_5 coincidono. Come è possibile vedere con cinque iterazioni siamo arrivati ad avere il valore "corretto".

Ora possiamo calcolare la $\sqrt{23}$ effettuando $23 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{23}}$. Per cui abbiamo $23 \cdot 0{,}2085144 = 4{,}7958312$.

Possiamo ricavare il medesimo risultato anche con la $\dfrac{1}{0{,}2085144} = 4{,}7958318$.

Esempio

Ammettiamo di voler calcolare $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1000}}$. Visto che la $\sqrt[5]{1000}$ è compresa tra 3 $(3^5 = 243)$ e 4 $(4^5 = 1024)$ allora $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1000}}$ è compreso tra $0{,}\bar{3}$ $(0{,}\bar{3} = \dfrac{1}{3})$ e 0,25 $(0{,}25 = \dfrac{1}{4})$.

Per $n = 5$ questa è la formula da utilizzare $x_1 = \dfrac{x_0(6 - ax_0{}^5)}{5}$.

$x_1 = \dfrac{0{,}25 \cdot (6 - 1000 \cdot 0{,}25^5)}{5}$ = 0,251172

$x_2 = \dfrac{0{,}251172 \cdot (6 - 1000 \cdot 0{,}251172^5)}{5}$ = 0,2511886

$x_3 = \dfrac{0{,}2511886 \cdot (6 - 1000 \cdot 0{,}2511886^5)}{5}$ = 0,2511886

Per cui la $\sqrt[5]{1000}$ è uguale a $\dfrac{1}{0{,}2511886}$ = 3,9810724.

Metodo dell'aumento finito: teorema di Taylor

Questo metodo è importante per l'estrema semplicità nell'effettuazione dei relativi calcoli. Vale sempre l'uguaglianza approssimata $\sqrt[n]{1+\varepsilon} \approx 1 + \dfrac{\varepsilon}{n}$ e vale sempre la relazione $1 + \dfrac{\varepsilon}{n} > \sqrt[n]{1+\varepsilon}$.

Ci sono anche altre due relazione da sottolineare.

A) Più $|\varepsilon|$ (il valore assoluto di ε) è piccolo (rispetto ad 1) più il valore di $1+\frac{\varepsilon}{n}$ si avvicina dal valore di $\sqrt[n]{1+\varepsilon}$.

B) Più il valore di "n" è grande più $1+\frac{\varepsilon}{n}$ si avvicina al valore $\sqrt[n]{1+\varepsilon}$ (questa affermazione sarà precisata in appendice).

Visto che il risultato di questo metodo è, per definizione, approssimato, in genere, si utilizza il risultato di questo metodo come valore iniziale al "Metodo delle tangenti" visto precedentemente. Vediamo ora come poter utilizzare questa uguaglianza approssimata per poter calcolare la radice di un numero.

Esempio

Ammettiamo di voler calcolare la $\sqrt{53}$. Per poter avere un risultato il più attendibile possibile bisogna sapere il valore, approssimato all'unità, della radice quadrata. E' facile calcolare che la $\sqrt{53}$ è un numero compreso tra 7 e 8.

$$\sqrt{53} = \sqrt{49+4} = 7\times\sqrt{1+\frac{4}{49}} \approx 7\times(1+\frac{4}{2\times 49}) = 7{,}2857143.$$

$$\sqrt{53} = \sqrt{64-11} = 8\times\sqrt{1-\frac{11}{64}} \approx 8\times(1-\frac{11}{2\times 64}) = 7{,}3125.$$

Abbiamo appena detto che questi due valori sono, nonostante tutto, entrambi maggiori del valore della $\sqrt{53}$, per cui il valore che più si avvicina al vero valore è, ovviamente, il più piccolo, tanto che il valore corretto è 7,2801099…

Esempio

Ammettiamo di voler calcolare la $\sqrt{2013}$. E' facile verificare che questo valore è compreso tra 44 e 45 visto che $44^2 = 1936$ e che $45^2 = 2025$.

$$\sqrt{2013} = \sqrt{1936+77} = 44\times\sqrt{1+\frac{77}{1936}} \approx 44\times(1+\frac{77}{2\times 1936}) = 44{,}875$$

$$\sqrt{2013} = \sqrt{2025-12} = 45\times\sqrt{1-\frac{12}{2025}} \approx 45\times(1-\frac{12}{2\times 2025}) = 44{,}866667$$

Tra questi due risultati, il valore che più si avvicina al valore della $\sqrt{2013}$ è, ovviamente, il più piccolo, tanto che il valore corretto è 44,866469.

Ovviamente non è necessario fare entrambi i calcoli per sapere quale delle due opzioni darà il risultato più piccolo, per cui più vicino al risultato cercato. Per saperlo basta confrontare i numeri che rappresentano ε. Come abbiamo detto, più $|\varepsilon|$ è piccolo più il risultato sarà vicino al risultato corretto.

Esempio

Ammettiamo di voler calcolare la $\sqrt[3]{65432}$. E' facile verificare che questo valore è compreso tra 40 e 41 visto che $40^3 = 64000$ e che $41^3 = 68921$.

$$\sqrt[3]{65432} = \sqrt[3]{64000+1432} = 40\times\sqrt[3]{1+\frac{1432}{64000}} \text{ con } |\varepsilon| \text{ che vale } \frac{1432}{64000} = 0{,}022375$$

$\sqrt[3]{65432} = \sqrt[3]{68921-3489} = 41\times\sqrt[3]{1-\frac{3489}{68921}}$ con $|\varepsilon|$ che vale $\frac{3489}{68921}\approx 0{,}050623...$

Visto che $\frac{1432}{64000}<\frac{3489}{68921}$ allora sarà la prima espressione ad avvicinarsi maggiormente alla $\sqrt[3]{65432}$.

Facciamo la verifica all'ipotesi appena formulata.

$$\sqrt[3]{65432} = \sqrt[3]{64000+1432} = 40\times\sqrt[3]{1+\frac{1432}{64000}} \approx 40\times(1+\frac{1432}{3\times 64000}) = 40{,}298333$$

$$\sqrt[3]{65432} = \sqrt[3]{68921-3489} = 41\times\sqrt[3]{1-\frac{3489}{68921}} \approx 41\times(1-\frac{3489}{3\times 68921}) = 40{,}30815$$

L'ipotesi appena formulata è stata rispettata visto che il valore della $\sqrt[3]{65432}$ è 40,296121.

Esempio

Ammettiamo di voler calcolare la $\sqrt[5]{2000}$.

$1^5 = 1 < 2000$ $\quad 2^5 = 32 < 20003^5 = 243 < 2000$ $\quad 4^5 = 1024 < 2000$

$5^5 = 3125 > 2000$

Per cui la $\sqrt[5]{3000}$ è un numero compreso tra 4 e 5.

$\sqrt[5]{3000} = \sqrt[5]{1024+1976} = 4\times\sqrt[5]{1+\frac{1976}{1024}}$ con $|\varepsilon|$ che vale $\frac{1976}{1024}\approx 1{,}92968...$

$\sqrt[5]{3000} = \sqrt[5]{3125-125} = 5\times\sqrt[5]{1-\frac{125}{3125}}$ con $|\varepsilon|$ che vale $\frac{125}{3125}=0{,}04$

Visto che $\frac{125}{3125}<\frac{1976}{1024}$ allora sarà la seconda espressione ad avvicinarsi maggiormente alla $\sqrt[5]{3000}$.

Facciamo la verifica all'ipotesi appena formulata.

$$\sqrt[5]{3000} = \sqrt[5]{1024+1976} = 4\times\sqrt[5]{1+\frac{1976}{1024}} \approx 4\times(1+\frac{1976}{5\times 1024}) = 5{,}54375$$

$$\sqrt[5]{3000} = \sqrt[5]{3125-125} = 5\times\sqrt[5]{1-\frac{125}{3125}} \approx 5\times(1-\frac{125}{5\times 3125}) = 4{,}96$$

L'ipotesi appena formulata è stata rispettata visto che il valore della $\sqrt[5]{3000}$ è 4,9593442

Dobbiamo anche dire che è scorretto usare questo metodo meccanicamente perché si corre il rischio di complicare il calcolo ottenendo, per giunta, anche un pessimo risultato.

Esempio

$$\sqrt{0{,}49} = \sqrt{1-0{,}51} \approx 1-\frac{0{,}51}{2\cdot 1} = 0{,}745$$

Se invece di applicare automaticamente il metodo di Taylor, usiamo le proprietà delle radici otteniamo:

$\sqrt{0{,}49} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{100}} = \frac{7}{10} = 0{,}7$ e questo è il risultato corretto.

Radice n-esima di un numero complesso
Fino ad ora abbiamo visto alcuni metodi di calcolo per effettuare l'estrazione delle radici (quadrate, cubiche, ecc.) di un numero reale positivo. Ora vedremo un metodo per il calcolo delle "n" radici n-esime di un numero complesso. Bisogna subito precisare che i numeri complessi si possono rappresentare in due modi distinti, ma equivalenti.
A) In coordinate cartesiane
B) In coordinate polari
Per calcolare le "n" radici n-esime, di un numero complesso espresso in coordinate cartesiane, è necessario trasformare il numero in coordinate polari, poi effettuare il relativo calcolo per l'estrazione delle "n" radici n-esime e, se necessario, ritrasformare i valori delle soluzioni in coordinate cartesiane.
Vediamo ora come bisogna effettuare tali calcoli.
Numero espresso in coordinate cartesiane P = (x;y)
Numero espresso in coordinate polari P = $(\rho\,;\varphi)$

Formule per effettuare la trasformazione di un numero da coordinate cartesiane a coordinate polari.
Calcolo del modulo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

Calcolo dell'anomalia $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$

Consiglio di porre attenzione al calcolo dell'anomalia per essere certi che l'angolo che viene fuori dalla precedente formula ($\varphi = \arctan\frac{y}{x}$) sia l'angolo del punto P del numero espresso in coordinate cartesiane. Un metodo pratico consiste nel verificare il segno della parte reale del numero espresso in coordinate cartesiane e se è negativa bisogna sommare, all'angolo calcolato, il valore di un angolo piatto (180° o π).

Ottenuto il numero complesso, in coordinate polari, possiamo usare la Formula di Moivre.

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + j\mathrm{sen}\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}[\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}) + j\mathrm{sen}(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})]$$

Nella formula il numero "k" può assumere tutti i valori interi possibili. Si può dimostrare che la radice può avere soltanto "n" valori diversi in corrispondenza dei seguenti valori di "k".
"k" = 0, 1, 2, 3, …, (n - 1)

Formule per effettuare la trasformazione di un numero da coordinate polari a coordinate cartesiane.
Calcolo dell'ascissa x = $\rho\cos\varphi$
Calcolo dell'ordinata y = $\rho\,\mathrm{sen}\varphi$

Esempio
Ammettiamo di voler calcolare la $\sqrt{8 + j3}$, vediamo come si deve procedere.
Numero in coordinate cartesiane P = (8 + j3)

Calcolo del numero P in coordinate polari
Calcolo del modulo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{64 + 9} = \sqrt{73}$ = 8,544

Calcolo dell'anomalia $\varphi = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{3}{8} = \arctan 0{,}375$ = 0,3587707 radianti.
Anomalia espressa in gradi sessagesimali φ = 20,5560° = 20° 33' 22".

Numero P trasformato in coordinate polari P = (8,544; 0,3587707)
Cioè $\sqrt{8+j3}$ = $\sqrt{8{,}544(\cos 0{,}3587707 + j\mathrm{sen}\ 0{,}3587707)}$

Ora abbiamo tutti gli elementi per poter calcolare la radice quadrata.
Calcolo del modulo della radice quadrata.
$\rho = \sqrt{8{,}544} = 2{,}9230121$
Calcolo delle due anomalie.
$\varphi 1 = \dfrac{0{,}3587707}{2} = 0{,}1793854$ radianti per k = 0
$\varphi 2 = \dfrac{0{,}3587707}{2} + \dfrac{1\cdot(2\pi)}{2} = 3{,}3209781$ radianti per k = 1
Per cui le due radici quadrate, espresse in coordinate polari, sono:
Soluzione1 = (2,9230121; 0,1793854)
Soluzione2 = (2,9230121; 3,3209781)
Visto che:
$x = \rho \cos\varphi$
$y = \rho\ \mathrm{sen}\varphi$
Le due radici quadrate, espresse in coordinate cartesiane, sono:
Soluzione1 = $(\rho \cos\varphi 1 + \rho\ \mathrm{sen}\,\varphi 1)$ = (2,8761081 + j0,52156)
Soluzione2 = $(\rho \cos\varphi 2 + \rho\ \mathrm{sen}\,\varphi 2)$ = (-2,8761081 - j0,52156)
Come è possibile vedere (ed anche dimostrare) le due soluzioni sono sempre uguali ed opposte. Utilizzando i gradi sessagesimali al posto dei radianti si ottiene, ovviamente, il medesimo risultato finale. In questo caso, ovviamente, bisogna utilizzare la formula di Moivrè appropriata.

Esempio
Ammettiamo di voler calcolare la $\sqrt{-8-j3}$, vediamo come si deve procedere.
Numero in coordinate cartesiane P = (-8 - j3)

Calcolo del numero P in coordinate polari
Calcolo del modulo $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{8^2+3^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73} = 8{,}544$

Calcolo dell'anomalia $\varphi = \arctan\dfrac{y}{x} = \arctan\dfrac{-3}{-8} = \arctan 0{,}375 = 0{,}3587707$ radianti.
Anomalia espressa in gradi sessagesimali φ = 20,5560° = 20° 33' 22".

Il calcolo appena effettuato è, però, errato visto che il punto P dell'esempio è posizionato nel III° quadrante del piano cartesiano ed invece il calcolo lo porrebbe nel I° quadrante del piano cartesiano. Per rimediare a questo problema basta sommare, all'angolo calcolato, il valore di 180° (nel caso si utilizzino i gradi sessagesimali) o di π (nel caso si utilizzino i radianti).
Per cui φ = 0,3587707 + 3,1415926 = 3,5003633 radianti.
Per cui φ = 20° 33' 22" + 180° = 200° 33' 22" gradi sessagesimali

Numero P trasformato in coordinate polari P = (8,544; 3,5003633)
Cioè $\sqrt{-8-j3}$ = $\sqrt{8{,}544(\cos 3{,}5003633 + j\mathrm{sen}3{,}5003633)}$

Ora abbiamo tutti gli elementi per poter calcolare la radice quadrata.
Calcolo del modulo della radice quadrata.

$\rho = \sqrt{8{,}544} = 2{,}9230121$

Calcolo delle due anomalie.

$\varphi 1 = \dfrac{3{,}5003633}{2} = 1{,}7501817$ radianti per k = 0

$\varphi 2 = \dfrac{3{,}5003633}{2} + \dfrac{1 \cdot (2\pi)}{2} = 6{,}641956 = 0{,}3587707$ radianti per k = 1

Per cui le due radici quadrate, espresse in coordinate polari, sono:
Soluzione1 = (2,9230121; 1,7501817)
Soluzione2 = (2,9230121; 0,3587707)
Visto che:

$x = \rho \cos\varphi$

$y = \rho\ \mathrm{sen}\varphi$

Le due radici quadrate, espresse in coordinate cartesiane, sono:

Soluzione1 = $(\rho \cos\varphi 1 + \rho\ \mathrm{sen}\,\varphi 1)$ = (-0,52156 + j2,8761081)

Soluzione2 = $(\rho \cos\varphi 2 + \rho\ \mathrm{sen}\,\varphi 2)$ = (0,52156 – j2,8761081)

Vi voglio far notare la differenza, tra i due numeri iniziali e le due coppie di soluzioni di questo esempio e del precedente esempio.

Esempio

Ammettiamo di voler calcolare la $\sqrt[3]{8 - \mathrm{j}3}$, vediamo come si deve procedere.

Numero in coordinate cartesiane P = (8 - j3)

Calcolo del numero P in coordinate polari

Calcolo del modulo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73} = 8{,}544$

Calcolo dell'anomalia $\varphi = \arctan\dfrac{y}{x} = \arctan\dfrac{-3}{8} = \arctan(-0{,}375) = -0{,}3587707$ rad.

Possiamo ottenere l'anomalia positiva se, all'anomalia, viene sommato il valore di 2π.

Calcolo dell'anomalia positiva $\varphi = 2\pi - 0{,}3587707 = 6{,}2831853 - 0{,}3587707 = 5{,}9244146$ rad.

Anomalia espressa in gradi sessagesimali φ = -20,5560° = -20° 33' 22".

Possiamo ottenere l'anomalia positiva se, all'anomalia, viene sommato il valore di 360°.

Calcolo dell'anomalia positiva φ = 360° -20,5560° = 339,444° = 339° 26' 38".

Numero P trasformato in coordinate polari P = (8,544; 5,9244146)

Cioè $\sqrt[3]{8 - \mathrm{j}3} = \sqrt[3]{8{,}544(\cos 5{,}9244146 + \mathrm{j}\,\mathrm{sen}\, 5{,}9244146)}$

Ora abbiamo tutti gli elementi per poter calcolare la radice cubica.
Calcolo del modulo della radice cubica.

$\rho = \sqrt[3]{8{,}544} = 2{,}0443428$

Calcolo delle tre anomalie.

$\varphi 1 = \dfrac{5{,}9244146}{3} = 1{,}9748049$ radianti per k = 0

$\varphi 2 = \dfrac{5{,}9244146}{3} + \dfrac{1 \cdot (2\pi)}{3} = 4{,}0692$ radianti per k = 1

$\varphi 3 = \dfrac{5{,}9244146}{3} + \dfrac{2 \cdot (2\pi)}{3} = 6{,}1635951$ radianti per k = 2

Per cui le tre radici cubiche, espresse in coordinate polari, sono:

Soluzione1 = (2,0443428; 1,9748049)
Soluzione2 = (2,0443428; 4,0692)
Soluzione3 = (2,0443428; 6,1635951)
Visto che:
x = ρ $\cos\varphi$
y = ρ $\operatorname{sen}\varphi$
Le tre radici cubiche, espresse in coordinate cartesiane, sono:
Soluzione1 = ($\rho\cos\varphi 1 + \rho\operatorname{sen}\varphi 1$) = (-0,8036462 + j1,879758).
Soluzione2 = ($\rho\cos\varphi 2 + \rho\operatorname{sen}\varphi 2$) = (-1,2260951 - j1,635857).
Soluzione3 = ($\rho\cos\varphi 3 + \rho\operatorname{sen}\varphi 3$) = (2,0297413 – j0,243901).
Come è possibile vedere (ed anche dimostrare) la somma delle tre parti reali, e delle tre parti immaginarie, delle tre soluzioni sono sempre uguali a zero.
Utilizzando i gradi sessagesimali al posto dei radianti si ottiene, ovviamente, il medesimo risultato finale.
In questo caso bisogna utilizzare la appropriata formula di Moivrè.

Esempio
Ammettiamo di voler calcolare la $\sqrt[3]{j}$, vediamo come si deve procedere.
Numero in coordinate cartesiane P = (0 + j1)

Calcolo del numero P in coordinate polari
Calcolo del modulo $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{0^2+1^2} = \sqrt{1} = 1$

Calcolo dell'anomalia $\varphi = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{1}{0} = \frac{\pi}{2}$ radianti.
Anomalia espressa in gradi sessagesimali φ = 90°.

In questo esempio useremo i gradi sessagesimali invece dei radianti.

Numero P trasformato in coordinate polari P = (1; 90°)
Cioè $\sqrt[3]{j} = \sqrt[3]{1(\cos 90° + j\operatorname{sen} 90°)}$

Ora abbiamo tutti gli elementi per poter calcolare la radice cubica.
Calcolo del modulo della radice cubica.
$\rho = \sqrt[3]{1} = 1$
Calcolo delle tre anomalie.
$\varphi 1 = \frac{90°}{3} = 30°$ per k = 0
$\varphi 2 = \frac{90°}{3} + \frac{1\cdot 360°}{3} = 150°$ per k = 1
$\varphi 3 = \frac{90°}{3} + \frac{2\cdot 360°}{3} = 270°$ per k = 2
Per cui le tre radici cubiche, espresse in coordinate polari, sono:
Soluzione1 = (1; 30°)
Soluzione2 = (1; 150°)
Soluzione3 = (1; 270°)
Visto che:
x = ρ $\cos\varphi$
y = ρ $\operatorname{sen}\varphi$

Le tre radici cubiche, espresse in coordinate cartesiane, sono:

Soluzione1 = $(\rho \cos\varphi 1 + \rho \operatorname{sen}\varphi 1) = (\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2})$ = (0,866 + j0,5).

Soluzione2 = $(\rho \cos\varphi 2 + \rho \operatorname{sen}\varphi 2) = (-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2})$ = (-0,866 + j0,5).

Soluzione3 = $(\rho \cos\varphi 3 + \rho \operatorname{sen}\varphi 3)$ = (0 - j) = -j.

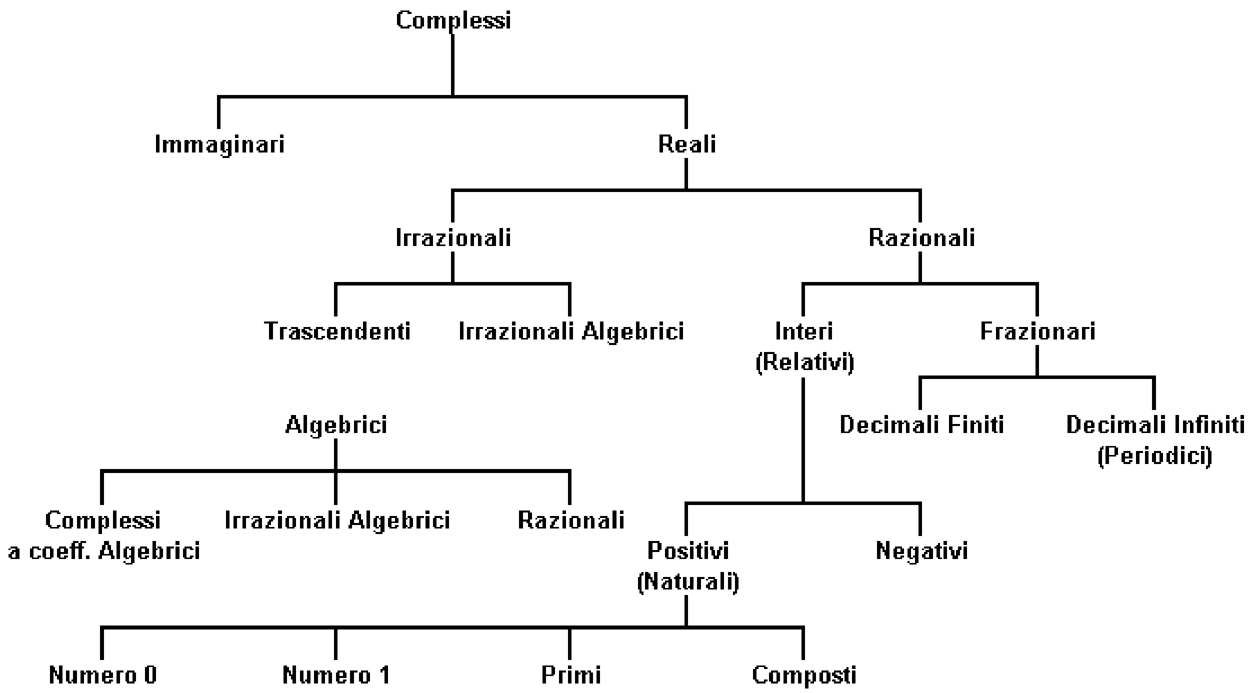
Come è possibile vedere (ed anche dimostrare) la somma delle tre parti reali, e delle tre parti immaginarie, delle tre soluzioni sono sempre uguali a zero.

Conclusioni

Abbiamo visto, in questo capitolo, diversi metodi per effettuare il calcolo della radice n-esima di un numero reale e un metodo per il calcolo delle "n" radici n-esime di un numero complesso.

Appendice

Classificazione dei numeri
I numeri si possono classificare come nello schema seguente.



Vediamo di spiegare questo articolato, e piuttosto complesso, schema.

Numero 0
Il numero 0 è un numero speciale che fa parte dei numeri naturali. Il numero 0 è l'elemento neutro della somma.

Numero 1
Il numero 1 è un altro numero speciale che fa parte dei numeri naturali. Il numero 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione.

Numeri Primi
I numeri primi sono i numeri naturali, maggiori di 1, che sono divisibili solo per se stessi e per 1.
Es. 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; ecc.
Tra i numeri primi esiste un solo numero pari che è il numero 2, tutti gli altri numeri primi sono numeri dispari.

Numeri Composti
I numeri composti sono i numeri naturali che non sono ne primi, ne 0 e nemmeno 1.
Es. $4 = 2^2$; $6 = 2x3$; $8 = 2^3$; $9 = 3^2$; $10 = 2x5$; $12 = 3x2^2$; $14 = 2x7$; $15 = 3x5$; ecc.
Tutti i numeri composti si possono ottenere moltiplicando, tra loro, i numeri primi. Ovviamente i numeri composti si possono anche scomporre in numeri primi (scomposizione in fattori). I numeri composti possono essere sia pari che dispari.

Numeri Interi Positivi (Naturali)
L'insieme dei numeri interi positivi (o numeri naturali) ha questo simbolo **N**.

Sono l'unione del numero 0, del numero 1, dei numeri primi e dei numeri composti.
Es. 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8, 9, 10, 11, ecc.
Questo insieme di numeri si può anche suddivide in "numeri pari" e in "numeri dispari".
I numeri pari sono i numeri naturali che divisi per 2 danno, come resto, 0. Es. 0; 2; 4; 6; 8; 10; ecc.
I numeri dispari sono i numeri naturali che divisi per 2 danno, come resto, 1. Es. 1; 3; 5; 7; 9; ecc.

Numeri Interi Negativi
I numeri interi negativi sono tutti i numeri interi positivi (numeri naturali), diversi da 0, preceduti dal segno meno. Per cui sono tutti numeri minori di 0.
Es. -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; ecc.

Numeri Interi (Relativi)
L'insieme dei numeri interi (o numeri relativi) ha questo simbolo **Z**.
Sono l'unione dei numeri interi positivi e dei numeri interi negativi.
Es. -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; ecc.

Numeri Decimali Finiti
I numeri decimali finiti sono i numeri che hanno una quantità finita di cifre decimali. Possono essere sia positivi che negativi.
Es. -2,3; 0,25; 2,2; ecc.

Numeri Decimali Infiniti (Periodici)
I numeri decimali infiniti (o numeri periodici) sono i numeri che hanno una quantità infinita di cifre decimali che si ripetono periodicamente. Possono essere sia positivi che negativi.
Es. $-0{,}8\overline{3}$ = -0,8333333….; $0{,}\overline{25}$ = 0,252525….; $0{,}\overline{3}$ = 0,333333….; $0{,}\overline{714285}$ = 0,714285714285…; ecc.

Numeri Frazionari
I numeri frazionari sono l'unione dei numeri decimali finiti e dei numeri decimali infiniti (o numeri periodici).
Es. -8,71; 0,32; $5{,}\overline{43}$ = 5,434343…; ecc.
PS. Non bisogna confondere i numeri frazionari con le frazioni. I numeri frazionari si suddividono come da schema, le frazioni si suddividono in "frazioni proprie" e "frazioni improprie"; le cui "frazioni improprie" hanno un sottoinsieme chiamato "frazioni apparenti".

Numeri Razionali
L'insieme dei numeri razionali ha questo simbolo **Q**.
I numeri razionali sono l'unione dei numeri interi (o numeri relativi) e dei numeri frazionari. Sono tutti della forma $\frac{a}{b}$ con a e b numeri interi (**Z**) e $b \neq$ da 0.
Es. -8,71; -4; 0; 3; 3,58; ecc.
PS. Tutti i numeri razionali sono anche numeri algebrici (vedi oltre).

Numeri Trascendenti
I numeri decimali infiniti non periodici, che non sono numeri algebrici (vedi oltre), si chiamano numeri trascendenti.
Es. $-sen37°$ = -0,601815….; $\log_{10}15$ = 1,1760913….; $e = 2{,}7182818...$; $\pi = 3{,}141592654....$; ecc.
PS. Bisogna fare subito una precisazione per evitare fraintendimenti. Le funzioni trigonometriche (seno, coseno, ecc.) di angoli multipli interi di 3° sessagesimali sono numeri algebrici (vedi oltre).

Numeri Irrazionali

L'insieme dei numeri irrazionali ha questo simbolo **J**.
I numeri irrazionali sono l'unione dei numeri trascendenti e dei numeri irrazionali algebrici (vedi oltre).
Non sono della forma $\frac{a}{b}$ con a e b numeri Interi (**Z**) e $b \neq$ da 0.
Es. $\sqrt[5]{23} = 1{,}872171...$; $\sqrt{5} = 2{,}23606797...$; $\pi = 3{,}141592654....$; ecc.

Numeri Reali
L'insieme dei numeri reali ha questo simbolo **R**.
I numeri reali sono l'unione dei numeri razionali e dei numeri irrazionali.

Numeri Immaginari
I numeri immaginari sono tutti i numeri reali, diversi da 0, moltiplicati per l'unità immaginaria j. Dove $j = \sqrt{-1}$.

Numeri Complessi
L'insieme dei numeri complessi ha questo simbolo **C**.
I numeri complessi sono una composizione tra i numeri reali e i numeri immaginari.
Es. $5 + j\sqrt{3}$; $-5\pi + j\sqrt{\log_{10} 2}$; $5 + j\pi^2$; ecc.

PS. Ovviamente se la parte reale è uguale a 0 abbiamo un numero immaginario, se invece è la parte immaginaria ad essere uguale a 0 abbiamo un numero reale.

Numeri Algebrici
I numeri algebrici sono tutti i numeri che sono soluzione di un'equazione algebrica a coefficienti razionali. Cioè sono soluzioni di un'equazione del tipo $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + z = 0$ dove i coefficienti $a, b, c, ..., z$ sono numeri razionali (**Q**).
Es. $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{5+\sqrt{8}}$; 5; -8; 0; $0,\overline{3}$; 0,25; $\sqrt{5} - j\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$; ecc.

PS. I numeri algebrici possono essere numeri razionali (5; -8; $0,\overline{3}$; ecc.), numeri irrazionali ($\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{5+\sqrt{8}}$; ecc.), e numeri complessi a coefficienti algebrici ($\sqrt{5} - j\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$; ecc.).

I numeri algebrici possiedono alcune particolarità interessanti.

A) Somme ($a+b$), sottrazioni ($a-b$), moltiplicazioni ($a \times b$) o divisioni ($\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$) di numeri algebrici danno sempre, come risultato, dei numeri algebrici.
B) Le soluzioni di un polinomio i cui coefficienti sono numeri algebrici, sono numeri algebrici.
C) Se a e b sono numeri algebrici con $a \neq$ da $\{0,1\}$, e con b numero irrazionale, allora il numero a^b è trascendente. Cioè $2^{\sqrt{2}}$ è un numero trascendente.

Da quello che abbiamo appena visto risulta la seguente successione di inclusioni fra gli insiemi numerici $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ ed inoltre risulta anche che $Q \cup J = R$.
Il simbolo $\subset$ significa "è contenuto in" oppure "è incluso in" o anche "è un sottoinsieme di".
Il simbolo $\cup$ significa "unione".

Teorema
Il numero $\sqrt{2}$ è irrazionale.

Dimostreremo questa affermazione per assurdo. Visto che un numero può essere solamente razionale o irrazionale (vedi schema), se riusciamo a dimostrare che non può essere un numero razionale deve essere obbligatoriamente un numero irrazionale.

Supponiamo che $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ dove m e n sono numeri interi positivi primi fra loro. In questa ipotesi possiamo scrivere che $2=\frac{m^2}{n^2}$. Da cui si ricava immediatamente che $2n^2=m^2$. Visto che $2n^2$ è pari anche m^2 deve essere un numero pari. Siccome un numero pari al quadrato da sempre un numero pari e un numero dispari al quadrato da sempre un numero dispari, possiamo dedurre che per poter essere m^2 un numero pari m deve essere un numero pari. Per cui possiamo scrivere $m=2k$ e effettuando le dovute sostituzioni otteniamo $2n^2=(2k)^2$. Semplificando abbiamo $n^2=2k^2$. Da qui si deduce che anche n deve essere un numero pari eseguendo il medesimo ragionamento che abbiamo fatto per m. Questo però contraddice l'affermazione di partenza che "m e n sono numeri interi positivi primi fra loro". Questa contraddizione esiste perché abbiamo ipotizzato che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale, per cui $\sqrt{2}$ deve essere un numero irrazionale.
C.V.D.

Teorema
Il numero $\sqrt{3}$ è irrazionale.
Dimostreremo questa affermazione per assurdo in modo analogo alla precedente dimostrazione.
Sappiamo che $\sqrt{3}$ è un numero > di 1. Supponiamo che $\sqrt{3}=1+\frac{m}{n}$ dove m e n sono numeri interi positivi primi fra loro. Procedendo in modo analogo alla precedente dimostrazione avremo che $3=1+\frac{2m}{n}+\frac{m^2}{n^2}$ e semplificando possiamo scrivere $2n^2=2mn+m^2$. Visto che $2n^2$ è un numero pari si deduce che, visto che anche $2mn$ è un numero pari, anche m^2 deve essere un numero pari e perciò anche m deve essere un numero pari.
Per cui possiamo scrivere $2n^2=2(2k)n+(2k)^2$ dove $m=2k$. Semplificando otteniamo $n^2=2kn+2k^2$. Da questa deduciamo che n^2 deve essere pari ed anche n deve essere pari contraddicendo la nostra affermazione iniziale "m e n sono numeri interi positivi primi fra loro". Questa contraddizione esiste perché abbiamo ipotizzato che $\sqrt{3}$ sia un numero razionale, per cui $\sqrt{3}$ deve essere un numero irrazionale.
C.V.D.

Teorema
La somma $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ è un numero irrazionale.
Premettiamo subito che, se un numero irrazionale viene elevato al quadrato il risultato può essere un numero razionale [esempio $(\sqrt{5})^2$] oppure un numero irrazionale [esempio $(\sqrt[3]{5})^2$]. Se invece viene elevato al quadrato un numero razionale, il risultato può essere solo un numero razionale.

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=x$

levando entrambi i termini al quadrato abbiamo

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=x^2$

Con dei semplici passaggi otteniamo:

$2+3+2\sqrt{6}=x^2$

Siccome $\sqrt{6}$ è un numero irrazionale (la semplice dimostrazione la lascio al lettore) anche $5+2\sqrt{6}$ è un numero irrazionale, da ciò si deduce che anche x^2 è un numero irrazionale e per la premessa deve essere irrazionale anche x.
C.V.D.

Teorema
Il numero $\sqrt[q]{2}$, con q numero intero, è irrazionale.

Dimostreremo questa affermazione per assurdo in modo analogo alle precedenti dimostrazioni.
Supponiamo che $\sqrt[q]{2}=\frac{m}{n}$ dove m e n sono numeri interi positivi primi fra loro. In questa ipotesi possiamo effettuare queste semplici trasformazioni.

$2=(\frac{m}{n})^q$ $\qquad$ $2=\frac{m^q}{n^q}$ $\qquad$ $2n^q=m^q$

Visto che $2n^q$ è pari deve risultare pari anche m^q e, di conseguenza, anche m deve essere pari. Per cui possiamo scrivere $m=2k$ e se effettuiamo le dovute sostituzioni otteniamo:

$2n^q=(2k)^q$ $\qquad$ $2n^q=2^q k^q$ $\qquad$ $n^q=2^{q-1}k^q$

Visto che $2^{q-1}k^q$ è pari deve risultare pari anche n^q e, di conseguenza, anche n deve essere pari, contraddicendo l'ipotesi iniziale "dove m e n sono numeri interi positivi primi fra loro". Questa contraddizione è eliminabile solo ipotizzando che sia $\sqrt[q]{2}$ un numero irrazionale con q numero intero.
C.V.D.

Semplificazione dei radicali doppi

In genere, nel caso si debba effettuare il calcolo di un radicale doppio ($\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ è la sua struttura, ipotizzando che "a" sia diverso da zero e "b" sia diverso da zero e da uno), bisogna effettuare prima il calcolo della $\sqrt{b}$, poi bisogna effettuare il calcolo $a\pm\sqrt{b}$ e poi calcolare la $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$. Come è facile intuire, per avere un buon risultato bisogna che la $\sqrt{b}$ sia calcolata con un numero adeguato di decimali.
Nell'ipotesi, effettivamente abbastanza remota, che il valore di a^2-b sia un quadrato, esiste un modo semplice per poter effettuare il calcolo di un radicale doppio. Questo metodo consiste nel trasformare il radicale doppio in una somma/sottrazione di due radicali.
Se a^2-b è uguale ad un quadrato allora ponendo $\sqrt{a^2-b}$ = n posso scrivere:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+n}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-n}{2}}$$

Dimostrazione
Nell'ipotesi che i due termini dell'uguaglianza precedente sia uguali, anche i loro quadrati saranno uguali. Utilizzeremo questa affermazione per dimostrare la precedente formula.

Se $\sqrt{a^2-b} = n$ $\qquad$ allora $\qquad$ $a^2-b = n^2$

$$(\sqrt{a\pm\sqrt{b}})^2 = a\pm\sqrt{b}$$

$$(\sqrt{\frac{a+n}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-n}{2}})^2 = (\frac{a+n}{2}) + (\frac{a-n}{2}) \pm 2\sqrt{\frac{a+n}{2}} \cdot \sqrt{\frac{a-n}{2}} = a \pm 2\sqrt{\frac{(a+n)\cdot(a-n)}{4}} = a \pm \sqrt{a^2 - n^2}$$

$$= a \pm \sqrt{a^2 - (a^2 - b)} = a \pm \sqrt{b}\,.$$

C.V.D.

Ovviamente l'uguaglianza $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+n}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-n}{2}}$ è sempre vera (l'abbiamo appena dimostrata), ma ha scopo effettuare questa trasformazione solo se "n" è un quadrato, altrimenti trasformiamo un radicale doppio in una somma/sottrazione di due radicali doppi.

Esempio

Ammettiamo di voler calcolare $\sqrt{7+\sqrt{13}}$. Premetto che il suo valore è 3,2566165.

$7^2 - 13 = 49 - 13 = 36$ che è il quadrato di 6.

$\sqrt{\frac{7+6}{2}} + \sqrt{\frac{7-6}{2}} = \sqrt{\frac{13}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$ = 2,5495098 + 0,7071068 = 3,2566166.

La differenza sull'ultimo decimale è dovuto all'approssimazione della mia calcolatrice.

Esempio

Ammettiamo di voler calcolare $\sqrt{7-\sqrt{13}}$. Premetto che il suo valore è 1,842403.

$7^2 - 13 = 49 - 13 = 36$ che è il quadrato di 6.

$\sqrt{\frac{7+6}{2}} - \sqrt{\frac{7-6}{2}} = \sqrt{\frac{13}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$ = 2,5495098 - 0,7071068 = 1,842403

Esempio

Ammettiamo di voler calcolare $\sqrt{11+\sqrt{40}}$. Premetto che il suo valore è 4,1622777.

$11^2 - 40 = 121 - 40 = 81$ che è il quadrato di 9.

$\sqrt{\frac{11+9}{2}} + \sqrt{\frac{11-9}{2}} = \sqrt{10} + \sqrt{1}$ = 3,1622777 + 1 = 4,1622777

Esempio

Ammettiamo di voler calcolare $\sqrt{11-\sqrt{40}}$. Premetto che il suo valore è 2,1622777.

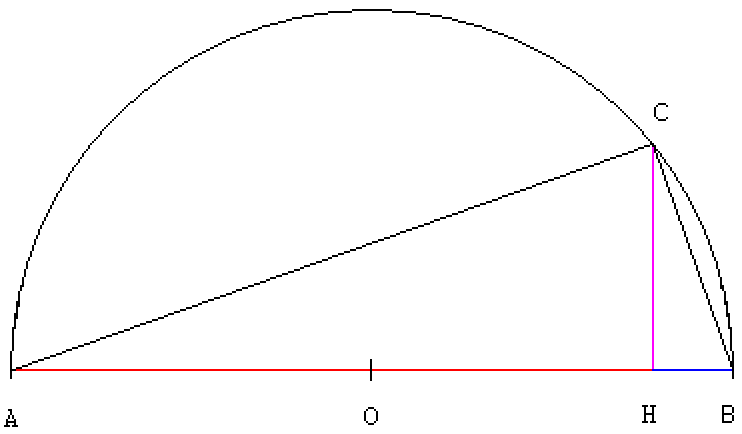
$11^2 - 40 = 121 - 40 = 81$ che è il quadrato di 9.

$\sqrt{\frac{11+9}{2}} - \sqrt{\frac{11-9}{2}} = \sqrt{10} - \sqrt{1}$ = 3,1622777 - 1 = 2,1622777.

Dimostrazione del metodo geometrico

Si può dimostrare la validità del metodo geometrico, per l'estrazione della radice quadrata, in due modi diversi: attraverso il metodo geometrico e attraverso le funzioni trigonometriche.

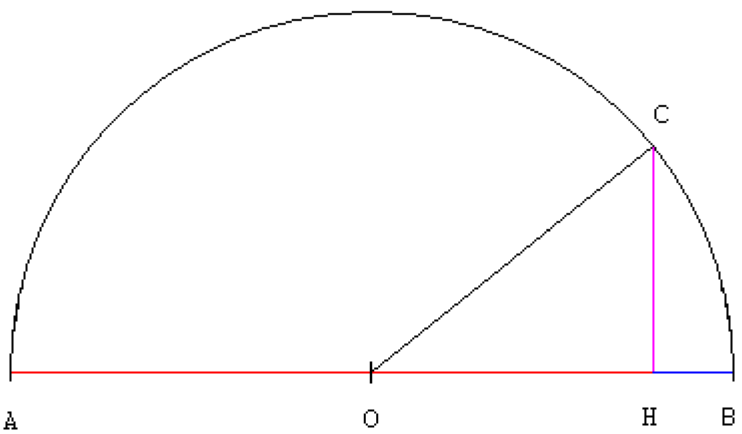
A) Dimostrazione attraverso il metodo geometrico
Calcoliamo la lunghezza del segmento CH



L'angolo ACB è un angolo retto visto che insiste sul diametro della circonferenza.
Per il 2° teorema di Euclide il segmento AH moltiplicato per il segmento HB è uguale al quadrato del segmento CH.
Siccome il segmento HB è uguale all'unità risulterà che il segmento AH è uguale al quadrato del segmento CH. Cioè il segmento CH è uguale alla radice quadrata del segmento AH.
C.V.D.

Calcoliamo la lunghezza del segmento CB
Per il Teorema di Pitagora abbiamo $CB^2 = CH^2 + HB^2$
Il quadrato del segmento CH, cioè CH^2 è uguale al segmento AH.
Il segmento HB è uguale a 1 per cui HB^2 è uguale a 1.
Da cui CB^2 è uguale a AH + 1 per cui CB è uguale alla radice quadrata del diametro AB.
C.V.D.

B) Dimostrazione attraverso le funzioni trigonometriche
Calcoliamo la lunghezza del segmento CH



Se l'angolo COH è α ed il segmento AO è uguale a 1 allora abbiamo che:
La retta rossa (segmento AH) è = $1+\cos\alpha$.

La retta blu (segmento HB) è = $1-\cos\alpha$.
La retta rosa (segmento CH) è = $\operatorname{sen}\alpha$.
Abbiamo ipotizzato che $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha})^2$
Da cui, con semplici passaggi, si ricava:
$(1+\cos\alpha)\times(1-\cos\alpha) = \operatorname{sen}^2\alpha$
Effettuando la moltiplicazione otteniamo:
$1-\cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha$ E questa è un'identità.
C.V.D.

Calcoliamo la lunghezza del segmento CB

Dobbiamo premettere che $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$

Il segmento CB è = $2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$.

Abbiamo ipotizzato che $\frac{2}{1-\cos\alpha} = (\frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\alpha})^2$

$2(1-\cos\alpha) = 4\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$ $1-\cos\alpha = 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$ $1-(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}) = 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$

$1-\cos^2\frac{\alpha}{2} = 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$ $1-\cos^2\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$

$1 = \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}$ E questa è un'identità.
C.V.D.

Altro metodo per calcolare la lunghezza del segmento CB
Abbiamo ipotizzato che:
$2 = CB^2 = CH^2 + HB^2$

$$\frac{2}{(1-\cos\alpha)}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}+\frac{(1-\cos\alpha)^2}{(1-\cos\alpha)^2}$$

$2(1-\cos\alpha)=\operatorname{sen}^2\alpha+1+\cos^2\alpha-2\cos\alpha$
$2-2\cos\alpha=2-2\cos\alpha$ E questa è un'identità.
C.V.D.

Metodo geometrico per il calcolo delle radici con indice superiore a 2
Una delle innovazioni matematiche più significative la dobbiamo a Cartesio ed a Fermat e mi riferisco allo studio e all'introduzione delle "coordinate cartesiane". Ma già nel IV secolo a.C. alcuni matematici avevano utilizzato un metodo analogo per definire delle curve piane.
Grazie a Ippocrate di Chio (nulla a che vedere con Ippocrate, il medico greco) e a Menecmo fu risolto il problema del calcolo della radice cubica di un numero attraverso un metodo grafico. Tralasciando di illustrare il ragionamento di come i due matematici greci siano arrivati alla soluzione di questo problema, vediamo come oggi si potrebbe ragionare per arrivare al medesimo risultato.
L'espressione $\sqrt[3]{a}=x$ è equivalente all'espressione $a=x^3$, da ciò possiamo ricavare che $\frac{a}{x}=x^2$.
Suddividendo questa funzione in due funzioni distinte abbiamo:

$$\begin{cases} y = \dfrac{a}{x} \\ y = x^2 \end{cases}$$

L'unico vincolo da rispettare, su queste due funzioni, è che devono essere, simultaneamente, verificate.

Per cui, ricapitolando, per poter effettuare il calcolo della $\sqrt[3]{a}$ basta riportare su un piano cartesiano le due precedenti funzioni, che sono un'iperbole e una parabola. Nel punto dove le due funzioni si intersecano abbiamo la soluzione cercata. Cioè nel punto di intersezione le due equazioni hanno il valore dell'ascissa (x) e dell'ordinata (y) che soddisfano, simultaneamente, le due precedenti funzioni. Il valore dell'ascissa (x) è la soluzione cercata.

Si narra che questa soluzione non sia piaciuta a Platone, perché utilizza delle curve che non sono costruibili con riga e compasso, ma sono costruibili per punti, e perciò in modo approssimato. Questo, però, non impedì ai matematici Apollonio, Archimede, Euclide, Menecmo ed altri, di studiare queste nuove curve scoprendone molte delle loro straordinarie proprietà. Il metodo accennato era sempre in uso ed ampliamente utilizzato anche da Cartesio e da Newton.

Con questo sistema, cioè con la separazione in due funzioni distinte della funzione di partenza, è possibile calcolare la radice con un qualsiasi indice intero di un qualunque numero.

Esempio

Ammettiamo di voler calcolare la $\sqrt[4]{a}$. In questo caso abbiamo che la $\sqrt[4]{a} = x$ e perciò abbiamo che $a = x^4$, dividendo questa funzione in due funzioni distinte possiamo avere diverse possibilità.

1) $\begin{cases} y = \dfrac{a}{x} \\ y = x^3 \end{cases}$

Oppure

2) $\begin{cases} y = \dfrac{a}{x^2} \\ y = x^2 \end{cases}$

Oppure

3) $\begin{cases} y = \dfrac{a}{x^3} \\ y = x \end{cases}$

Ecc.

Comunque, come spiegato precedentemente, l'ascissa (x) del punto dove le due funzioni si intersecano è la soluzione cercata.

Ovviamente con questo metodo, consistente nel suddividere la funzione in due funzioni distinte che devono essere simultaneamente rispettate, può essere utilizzato anche per effettuare il calcolo delle radici quadrate. Però in pratica non veniva utilizzato visto che esisteva un metodo nettamente più semplice, e mi riferisco al "Metodo geometrico" illustrato nel capitolo "Metodi di calcolo per le sole radici quadrate".

Frazioni continue

Si dice frazione continua limitata (illimitata) se i suoi termini hanno una fine (non hanno una fine).

Struttura di una frazione continua

Una frazione continua viene comunemente rappresentata così [A_1, A_2, A_3, A_4, ecc.]. Tutti i termini sono numeri naturali (**N**), solamente il termine A_1 può essere uguale a 0 e l'ultimo termine deve essere diverso da 1.

Tutti questi termini hanno questo significato $A_1+\cfrac{1}{A_2+\cfrac{1}{A_3+\cfrac{1}{A_4+\cfrac{1}{\dots}}}}$

Frazioni continue limitate
E' possibile dimostrare:
A) "Ogni frazione continua limitata rappresenta un numero razionale positivo."
Si può dimostrare anche:
B) "Ogni numero razionale positivo si può rappresentare con una frazione continua limitata."

Esempi

Il numero $\frac{46}{13}$ si può trasformare in: $3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}$ e si rappresenta con così [3,1,1,6].

Il numero $\frac{20}{41}$ si può trasformare in: $0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{20}}$ e si rappresenta così [0,2,20].

Il numero $\frac{2}{3}$ si può trasformare in $0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}$ e si rappresenta così [0,1,2].

Il numero $\frac{7}{10}$ si può trasformare in $0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}$ e si rappresenta così [0,1,2,3].

Vediamo ora come è possibile trasformare una frazione ordinaria in una frazione continua limitata.

Esempio

Ammettiamo di voler trasformare la frazione $\frac{67}{13}$.

$\frac{67}{13}=5+\frac{2}{13}$ per cui $\frac{67}{13}=5+\cfrac{1}{\frac{13}{2}}$ siccome $\frac{13}{2}=6+\frac{1}{2}$ ricavo che $\frac{67}{13}=5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2}}$ e si rappresenta con [5,6,2].

Esempio

Ammettiamo di voler trasformare la frazione $\frac{19}{65}$.

$$\frac{19}{65} = 0+\frac{19}{65} = 0+\frac{1}{\frac{65}{19}} = 0+\frac{1}{3+\frac{8}{19}} = 0+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{19}{8}}} = 0+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{3}{8}}} = 0+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{8}{3}}}} =$$

$$0+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{2}{3}}}} =$$

$$= 0+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{3}{2}}}}} = 0+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}$$ e si rappresenta con [0,3,2,2,1,2].

Frazioni continue illimitate
E' possibile dimostrare:
A) "Ogni frazione continua illimitata rappresenta un numero irrazionale positivo."
Si può dimostrare anche:
B) "Ogni numero irrazionale positivo si può rappresentare con una frazione continua illimitata."

Esempio
Il numero $\sqrt[3]{2}$ si trasforma in $\sqrt[3]{2} = 1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots}}}}}}$ e si rappresenta così [1,3,1,5,1,1,…].

Premetto subito che, per arrivare a questo risultato, ho "barato", nel senso che ho trasformato la $\sqrt[3]{2}$ in un numero decimale infinito (1,259921…) e poi ho costruito la frazione continua illimitata corrispondente. In generale non è possibile trasformare un numero irrazionale in una frazione continua illimitata senza conoscerne, precedentemente, il valore decimale infinito. Esiste una sola tipologia di numeri irrazionali che sono trasformabili, in una frazione continua illimitata, senza conoscerne preventivamente il relativo valore decimali infinito. Questa tipologia di numeri irrazionali sono i numeri irrazionali quadratici che si trasformano in una frazione continua illimitata periodica (vedi oltre).

Detto questo, però, niente vieta che esistano dei numeri irrazionali non quadratici che siano trasformabili in una frazione continua illimitata con aspetti di regolarità. Facciamo alcuni esempi.

Esempi
La frazione continua illimitata [2,1,2,1,1,2,1,1,1,2,1,1,1,1,2, ecc.] ha una certa regolarità, visto che il numero degli 1 tra i 2, cresce in modo regolare.

La frazione continua illimitata [1,2,1,3,1,5,1,7,1,11,1,13,1, ecc.] ha una certa regolarità, visto che i numeri tra gli 1 sono numeri primi consecutivi crescenti.

La frazione continua illimitata [1,2,1,3,1,4,1,5,1,6,1,7,1,8,1, ecc.] ha una certa regolarità, visto che i numeri tra gli 1 sono numeri crescenti a partire dal numero 2.

Tutte queste frazioni continue illimitate non periodiche, ma con aspetti di regolarità, rappresentano dei numeri irrazionali non quadratici (cioè numeri trascendenti o numeri irrazionali algebrici non quadratici) e ne possiamo "costruire" quanti ne vogliamo. Io conosco solo tre numeri irrazionali non quadratici che sono trasformabili in questo modo. Questo, però, non significa che non ne possano esistere altri.

$e = [2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,...]$ cioè da un certo punto in poi i numeri tra due 1 consecutivi formano una progressione aritmetica di ragione 2 (2 – 4 – 6 – 8 – 10 – …)

$\frac{e-1}{e+1} = [0,2,6,10,14,...]$ cioè, da un certo numero in poi, i numeri formano una progressione aritmetica di ragione 4 (2 – 6 – 10 – 14 – …).

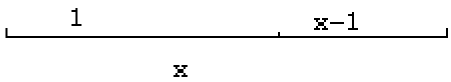
$\frac{e-e^{-1}}{e+e^{-1}} = [0,1,3,5,7,9,11,...]$ cioè, da un certo numero in poi, i numeri formano una progressione aritmetica di ragione 2 (1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – …).

Frazioni continue illimitate periodiche
Un caso particolare delle frazioni continue illimitate sono le frazioni continue illimitate periodiche.

Grazie al teorema di Lagrange è possibile dimostrare:
A) "Ogni frazione continua illimitata, che rappresenta un numero irrazionale quadratico, è periodica".
Si può dimostrare anche:
B) "Ogni numero irrazionale quadratico si può rappresentare con una frazione continua illimitata periodica."

Nel capitolo "Metodo con uso di frazioni continue illimitate periodiche" abbiamo visto come si possa trasformare un numero irrazionale quadratico della forma $\sqrt{a_1}$ (con a_1 numero intero positivo e non quadrato perfetto) in una frazione continua illimitata periodica. In modo analogo è possibile trasformare anche un numero irrazionale quadratico positivo della forma $\frac{a_0 \pm \sqrt{a_1}}{a_2}$ (con a_0, a_1 e a_2 numeri interi, con $a_2 \neq 0$ e con a_1 positivo e non quadrato perfetto) in una frazione continua illimitata periodica.

Un irrazionale algebrico particolare, il Numero Aureo
Prendiamo un segmento e dividiamolo in due parti disuguali. Se la lunghezza totale del segmento sta alla parte maggiore come la parte maggiore sta a quella minore allora il valore di questi rapporti si chiama Numero Aureo. Cioè:



Se $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$ allora il valore dell'espressione $\frac{x}{1}$ (e perciò anche $\frac{1}{x-1}$) si chiama Numero Aureo.

Calcolo di questo numero.

Dall'eguaglianza precedente ricaviamo $x(x-1)=1$ che è uguale a $x^2-x-1=0$. Risolvendo questa equazione di secondo grado otteniamo due soluzioni.

A) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,6180339887..

B) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ = -0,6180339887..

La soluzione positiva, cioè il valore $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ si chiama Numero Aureo e si identifica con ϕ.

Vediamo alcune proprietà del Numero Aureo ϕ.

Calcolo dell'inverso del Numero Aureo.

$$\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}6180339887..$$

Perciò possiamo scrivere che $\frac{1}{\phi}=\phi-1$.

Altre relazioni particolari sono:

$$\phi^2-\phi-1=0 \qquad \frac{1}{\phi^2}+\frac{1}{\phi}-1=0 \qquad \phi^n-\phi^{n-1}-\phi^{n-2}=0 \qquad \frac{1}{\phi^n}+\frac{1}{\phi^{n-1}}-\frac{1}{\phi^{n-2}}=0$$

Il Numero Aureo ha moltissime altre particolarità, tra cui la notevole relazione che lo lega alla successione di Fibonacci, ma questa non è la sede adatta per descriverle.

Ora vediamo due singolari sviluppi del Numero Aureo.

A) $$\phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}} = [\bar{1}]$$

Dimostrazione:

$\phi=1+x$ considerando $x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$. Occupandoci di x si può dedurre che $x=\frac{1}{1+x}$ allora $(1+x)x=1$ da cui ricavo $x+x^2=1$. Da qui è facile vedere che $x^2+x-1=0$. Da qui, ricavando la x (e tralasciando la soluzione negativa), otteniamo che $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Visto che $\phi=1+x$ sostituisco e ottengo $\phi=1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ da cui ricavo che $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

C.V.D.

B) $\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}}}}$

Dimostrazione:

Se $\beta = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}}}}$ allora $\beta^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}}}$ da cui si deduce che $\beta^2 = 1+\beta$. Questa espressione è uguale a $\beta^2-\beta-1=0$ e questa è l'equazione che identifica ϕ, per cui $\beta = \phi$.
C.V.D.

Trasformazione di una frazione continua illimitata periodica in un irrazionale quadratico
Piuttosto che descrivere il metodo (che non è molto semplice da descrivere), preferisco fare due esempi pratici e commentare i passaggi.

Esempio
Ora calcoliamo il numero irrazionale quadratico conoscendo la frazione illimitata periodica $[1,\overline{2}]$.

Se espandiamo la frazione otteniamo $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}$.

Se pongo $x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}$ allora posso dedurre che $x=\dfrac{1}{2+x}$. Tralasciando tutti i semplici passaggi otteniamo $x^2+2x-1=0$. Calcoliamo il solo valore positivo di x che vale $x=-1+\sqrt{2}$. Da cui si ricava che $[1,\overline{2}] = 1+(-1+\sqrt{2})$ che è uguale a $\sqrt{2}$.

Esempio
Vogliamo calcolare il numero irrazionale quadratico corrispondente a $[1,\overline{1,2}]$.

Se espandiamo la frazione otteniamo $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+...}}}}$

Se pongo $x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+...}}}}$ allora posso dedurre che $x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+x}}$. Tralasciando tutti i semplici passaggi otteniamo $x^2+2x-2=0$. Calcoliamo il solo valore positivo di x che vale $x=-1+\sqrt{3}$. Da cui si ricava che $[1,\overline{1,2}] = 1+(-1+\sqrt{3})$ che è uguale a $\sqrt{3}$.

Ridotta di una frazione continua
Abbiamo visto, nel paragrafo "Metodo con uso di frazioni continue illimitate periodiche", come si calcolano le ridotte di una frazione continua (limitata o illimitata). Ora vi mostrerò un sistema molto più semplice e rapido per calcolarle.

Ipotizziamo di avere la serie $[A_1, A_2, A_3, A_4, ecc.]$, indichiamo con R_n le varie ridotte e con P_n e Q_n il numeratore e il denominatore delle relative ridotte. Cioè:

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1} \qquad R_2 = \frac{P_2}{Q_2} \qquad R_3 = \frac{P_3}{Q_3} \qquad \dots \qquad R_n = \frac{P_n}{Q_n}$$

Si può dimostrare, ma io non lo farò, che $R_n = \dfrac{P_{n-1} \cdot A_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} \cdot A_n + Q_{n-2}}$.

Esempio
Ammettiamo di avere la frazione continua [1,3,1,5,1,1,4,…].
Dobbiamo calcolare le ridotte R_1 e R_2
$R_1 = 1$
$R_2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = 1,\bar{3}$
Le ridotte successive valgono:

$$R_3 = \frac{P_2 \cdot A_3 + P_1}{Q_2 \cdot A_3 + Q_1} = \frac{4 \cdot 1 + 1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{5}{4} = 1,25$$

$$R_4 = \frac{P_3 \cdot A_4 + P_2}{Q_3 \cdot A_4 + Q_2} = \frac{5 \cdot 5 + 4}{4 \cdot 5 + 3} = \frac{29}{23} = 1,2608696\dots$$

$$R_5 = \frac{P_4 \cdot A_5 + P_3}{Q_4 \cdot A_5 + Q_3} = \frac{29 \cdot 1 + 5}{23 \cdot 1 + 4} = \frac{34}{27} = 1,2592593\dots$$

Ecc.

Proprietà delle ridotte di una frazione continua
Esistono alcune proprietà, delle ridotte delle frazioni continue, che sono interessanti.
1) Vale la seguente proprietà $P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^n$. Cioè la differenza è sempre ± 1.
Esempi

$P_4 Q_{4-1} - P_{4-1} Q_4 = (-1)^4$ cioè $P_4 Q_3 - P_3 Q_4 = (-1)^4$ cioè $29 \cdot 4 - 5 \cdot 23 = 1$

$P_5 Q_{5-1} - P_{5-1} Q_5 = (-1)^5$ cioè $P_5 Q_4 - P_4 Q_5 = (-1)^5$ cioè $34 \cdot 23 - 29 \cdot 27 = -1$

2) I numeri P_n e Q_n sono primi fra loro (numeri coprimi), cioè non hanno divisori in comune (oltre al numero 1).
Raggruppando le ridotte di ordine dispari e le ridotte di ordine pari possiamo vedere che esse formano due successioni numeriche che hanno queste proprietà.

3) Le ridotte di ordine dispari ($R_1 R_3 R_5 R_7$, ecc.) sono crescenti. Cioè ogni elemento della successione è maggiore del precedente ed è minore del successivo. Cioè $R_1 < R_3 < R_5 < R_7 <$ ecc.
Esempio
1 < 1,25 < 1,2592593… < 1,2599119… ecc.

4) Le ridotte di ordine pari ($R_2 R_4 R_6$ ecc.) sono decrescenti. Cioè ogni elemento della successione è minore del precedente ed è maggiore del successivo. Cioè $R_2 > R_4 > R_6 >$ ecc.
Esempio
$1,\bar{3}$ > 1,2608696… > 1,26 > ecc.

5) Ogni elemento della prima successione è minore di tutti gli elementi della seconda successione.

6) Ogni elemento della seconda successione è maggiore di tutti gli elementi della prima successione.

7) Le due successioni convergono ad uno stesso numero e, tale valore, è il valore della frazione continua.

Operazioni sulle frazioni continue
Qui vi varò vedere la possibilità di effettuare due operazioni direttamente sulle frazioni continue senza essere costretti a trasformarle in frazioni ordinarie o in numeri irrazionali per poterle eseguire.

Somma/sottrazione tra una frazione continua e un numero naturale
Visto che $\frac{19}{65} + 1 = \frac{84}{65}$ e visto che $\frac{19}{65}$ è uguale a [0,3,2,2,1,2] allora $\frac{84}{65}$ è uguale a [1,3,2,2,1,2].
Il numero intero deve essere sommato alla prima cifra della frazione continua (limitata o illimitata).

Visto che $\frac{67}{13} - 3 = \frac{28}{13}$ e visto che $\frac{67}{13}$ è uguale a [5,6,2] allora $\frac{28}{13}$ è uguale a [2,6,2].
Il numero intero deve essere sottratto alla prima cifra della frazione continua (limitata o illimitata). Se il numero da sottrarre è maggiore della prima cifra non è possibile effettuare l'operazione, visto che le frazioni continue (limitate o illimitate) rappresentano sempre e solo numeri (razionali o irrazionali) positivi.

Inversione di una frazione continua
Visto che $\frac{67}{13}$ è uguale a [5,6,2] allora $\frac{13}{67}$ (che è uguale a $\frac{1}{\frac{67}{13}}$) è uguale a [0,5,6,2].

Visto che $\frac{19}{65}$ è uguale a [0,3,2,2,1,2] allora $\frac{65}{19}$ (che è uguale a $\frac{1}{\frac{19}{65}}$) è uguale a [3,2,2,1,2].

L'inversione di una frazione continua (limitata o illimitata) si calcola in questo modo. Se la prima cifra della frazione continua è uguale a 0 allora deve essere tolto lo 0. Se la prima cifra della frazione continua è diversa da 0 allora deve essere aggiunto lo 0 come prima cifra.

Utilizzo pratico delle due precedenti operazioni
Grazie ai metodi sopramenzionati, applicabili alle frazioni continue, è possibile scrivere molte altre frazioni continue, deducibili dalle precedenti, tra cui le seguenti notevoli frazioni continue:

$\frac{1}{e-1} = [0,1,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,...]$ dove i numeri tra due 1 consecutivi formano una progressione aritmetica di ragione 2 (0 – 2 – 4 – 6 – 8 – 10 – …).

$\frac{e+1}{e-1} = [2,6,10,14,18,...]$ dove i numeri, a partire da 2, formano una progressione aritmetica di ragione 4 (2 – 6 – 10 – 14 – 18 – …).

$\frac{e+e^{-1}}{e-e^{-1}}=[1,3,5,7,9,11,...]$ dove i numeri, a partire da 1, formano una progressione aritmetica di ragione 2 (1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – …).

Altri tipi di frazioni continue
Esistono altri tipi di frazioni continue.

$$\beta = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \dots}}}$$

Questa è la struttura di una frazione continua discendente generalizzata.

$$\beta = a_0 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1+\dots}{a_4}}{a_3}}{a_2}}{a_1}$$

Questa è la struttura di una frazione continua ascendente.

Con questi altri tipi di frazioni continue è possibile ottenere alcuni sviluppi interessanti. Vediamone alcuni.

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \dots}}}}$$

$$e = 2 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1+\dots}{5}}{4}}{3}}{2}$$

Queste nuove frazioni continue, però, esulano da questo scritto. Esiste un'ultima cosa che è interessante ed attinente a questo scritto.

Trasformazione di un numero irrazionale quadratico in una frazione continua illimitata periodica generalizzata
Si deve a Raffaele Bombelli e a Pietro Antonio Cataldi la scoperta e l'utilizzo di questa tipologia di frazioni continue per il calcolo delle radici quadrate di un numero naturale, anche se alcune tracce di questa soluzione si trovano in testi molto più antichi.

$\sqrt{n} = \sqrt{a^2 + b}$
Con a = numero intero e a^2 = massimo quadrato non maggiore di n.

$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ldots}}}$ che si rappresenta in questo modo $[a, \overline{\frac{b}{2a}}]$.

Dimostrazione.

$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{1}{x}$ $\qquad \sqrt{a^2+b} - a = \frac{1}{x}$ $\qquad x = \frac{1}{\sqrt{a^2+b} - a}$

$x = \frac{1}{(\sqrt{a^2+b} - a)} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b} + a}{(\sqrt{a^2+b} + a)}$ $\qquad x = \frac{\sqrt{a^2+b} + a}{a^2 + b - a^2}$ $\qquad x = \frac{\sqrt{a^2+b} + a}{b}$

siccome $\sqrt{a^2+b} = a + \frac{1}{x}$ sostituiamo ed otteniamo $\qquad x = \frac{a + \frac{1}{x} + a}{b}$

$x = \frac{2a + \frac{1}{x}}{b}$ $\qquad \frac{1}{x} = \frac{b}{2a + \frac{1}{x}}$

Sostituendo questo risultato in $\sqrt{a^2+b} = a + \frac{1}{x}$ otteniamo

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{1}{x}}$$

Continuando a eseguire tale sostituzione otteniamo $\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{1}{x}}}$ e poi proseguendo

ancora nella sostituzione otteniamo: $\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ldots}}}}$

Esempio

$$\sqrt{19} = \sqrt{4^2+3} = 4 + \cfrac{3}{8 + \cfrac{3}{8 + \cfrac{3}{8 + \cfrac{3}{8 + \cfrac{3}{8 + \ldots}}}}} = [4, \overline{\frac{3}{8}}]$$

Esempio

$\sqrt{30} = \sqrt{5^2+5} = 5 + \cfrac{5}{10 + \cfrac{5}{10 + \cfrac{5}{10 + \cfrac{5}{10 + \ldots}}}} = [5, \overline{\frac{5}{10}}]$ che è diverso da $[5, \overline{\frac{1}{2}}]$.

Ridotta di una frazione continua generalizzata
Ora è il momento, come abbiamo visto nel paragrafo "Metodo con uso di frazioni continue illimitate periodiche", di calcolare la frazione ordinaria corrispondente alla frazione continua generalizzata.

Esempio

$$\sqrt{31} = \sqrt{5^2 + 6} = 5 + \cfrac{6}{10 + \cfrac{6}{10 + \cfrac{6}{10 + \cfrac{6}{10 + \ldots}}}} = [5, \overline{\frac{6}{10}}]$$

$$R_1 = 5$$

$$R_2 = 5 + \frac{6}{10} = \frac{56}{10} = 5{,}6$$

$$R_3 = 5 + \cfrac{6}{10 + \cfrac{6}{10}} = \frac{590}{106} = 5{,}5660377$$

$$R_4 = 5 + \cfrac{6}{10 + \cfrac{6}{10 + \cfrac{6}{10}}} = \frac{6236}{1120} = 5{,}5678571$$

$$R_5 = 5 + \cfrac{6}{10 + \cfrac{6}{10 + \cfrac{6}{10 + \cfrac{6}{10}}}} = \frac{65900}{11836} = 5{,}5677594$$

Ecc.

Questo è il metodo più ovvio per calcolare le varie ridotte di una frazione continua generalizzata. Ora vediamo un sistema molto più semplice e rapido per calcolarle.

Ipotizziamo di avere la serie $[A_1, \frac{B_2}{A_2}, \frac{B_3}{A_3}, \frac{B_4}{A_4}, \frac{B_5}{A_5}, ecc.]$, indichiamo con R_n le varie ridotte e con P_n e Q_n il numeratore e il denominatore delle relative ridotte. Cioè:

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1} \qquad R_2 = \frac{P_2}{Q_2} \qquad R_3 = \frac{P_3}{Q_3} \qquad \ldots \qquad R_n = \frac{P_n}{Q_n}$$

Si può dimostrare, ma io non lo farò, che $R_n = \frac{P_{n-1} \cdot A_n + P_{n-2} \cdot B_n}{Q_{n-1} \cdot A_n + Q_{n-2} \cdot B_n}$.

Esempio
Calcoliamo le ridotte della frazione continua ascendente precedente

$$R_1 = 5$$

$$R_2 = 5 + \frac{6}{10} = \frac{56}{10} = 5{,}6$$

$$R_3 = \frac{56 \cdot 10 + 5 \cdot 6}{10 \cdot 10 + 1 \cdot 6} = \frac{590}{106} = 5{,}5660377$$

$$R_4 = \frac{590 \cdot 10 + 56 \cdot 6}{106 \cdot 10 + 10 \cdot 6} = \frac{6236}{1120} = 5{,}5678571$$

$$R_5 = \frac{6236 \cdot 10 + 590 \cdot 6}{1120 \cdot 10 + 106 \cdot 6} = \frac{65900}{11836} = 5{,}5677594$$

Ecc.

Il valore corretto della $\sqrt{31}$ è 5,5677644…

Metodo delle tangenti o iterazione di Newton

Tralasciando completamente tutta la teoria che c'è dietro, perché esula da questo scritto, diamo direttamente la formula definitiva, dove:

$f(x)$ = funzione da calcolare.
$f'(x)$ = derivata della funzione da calcolare.
$f(x_0)$ = valore della funzione nel punto x_0.
$f'(x_0)$ = valore della derivata, della funzione, nel punto x_0.
x_0 = valore approssimato di partenza della nostra funzione.
x_1 = valore approssimato, un poco migliore rispetto a x_0, della nostra funzione.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Per essere chiari facciamo subito un esempio.
Esempio
$f(x) = x^5 + x - 1 = 0$
Vogliamo trovare il valore di x che soddisfi questa funzione.

La funzione, per $x_0 = 0$ vale $f(x_0) = -1$
La funzione, per $x_0 = 1$ vale $f(x_0) = 1$

Da questi due valori appena calcolati si vede che una delle 5 soluzioni, della nostra equazione, deve essere compresa tra 0 e 1. Utilizziamo la formula appena scritta per poter calcolare questo valore.

La derivata della funzione è $f'(x) = 5x^4 + 1$

Utilizziamo, in questo esempio, il valore $x_0 = 1$ come primo valore approssimato della nostra funzione.

La funzione è $f(x) = x^5 + x - 1$ e sostituendo ad x il valore di x_0 abbiamo $f(x_0) = 1$
La derivata è $f'(x) = 5x^4 + 1$ e sostituendo ad x il valore di x_0 abbiamo $f'(x_0) = 6$

Siccome $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ allora $x_1 = 1 - \dfrac{1}{6} = 0{,}8\overline{3}$
Per cui il valore di $f(x_1)$ è 0,2352108.

Se reiteriamo questa funzione otteniamo:
$f(x_1) = x^5 + x - 1$ dove $x = 0{,}8\overline{3}$, per cui $f(x_1) = 0{,}2352108$.
$f'(x_1) = 5x^4 + 1$ dove $x = 0{,}8\overline{3}$, per cui $f'(x_1) = 3{,}411265$.

Siccome $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ allora $x_2 = 0{,}8\overline{3} - \dfrac{0{,}2352108}{3{,}411265} = 0{,}7643821$
Per cui il valore di $f(x_2)$ è 0,0253292.

Se reiteriamo questa funzione otteniamo:
$f(x_2) = x^5 + x - 1$ dove $x = 0{,}7643821$, per cui $f(x_2) = 0{,}0253292$.
$f'(x_2) = 5x^4 + 1$ dove $x = 0{,}7643821$, per cui $f'(x_2) = 2{,}7069156$.

Siccome $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$ allora $x_3 = 0{,}7643821 - \dfrac{0{,}0253292}{2{,}7069156} = 0{,}7550249$.
Per cui il valore di $f(x_3)$ è 0,0003864.

Come è possibile vedere con sole 3 iterazioni abbiamo ottenuto una buona approssimazione, visto che la $f(x_3)$, per $x_3 = 0{,}7550249$, è molto vicino a 0 (vale 0,0003864).
A questo punto ci sarà sicuramente qualcuno che si domanderà "Bello, interessante, ma che c'entra con il calcolo delle radici?". La risposta è semplice, anche la soluzione di una radice è espressione di una funzione.

Calcolo delle radici n-esime.
Per $f(x) = x^n - a = 0$ allora $x = \sqrt[n]{a}$.
Se risolviamo la $f(x) = x^n - a = 0$ allora abbiamo risolto anche la $x = \sqrt[n]{a}$.

La derivata della $f(x) = x^n - a$ è $f'(x) = nx^{n-1}$.

Visto che $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ sostituendo si ottiene $x_1 = x_0 - \frac{x_0^{\,n} - a}{nx_0^{\,n-1}}$ che semplificando si trasforma in $x_1 = \frac{nx_0^{\,n} - x_0^{\,n} + a}{nx_0^{\,n-1}}$ e poi, con un ultimo passaggio, otteniamo $x_1 = \frac{(n-1)x_0^{\,n} + a}{nx_0^{\,n-1}}$. Possiamo rappresentare, la precedente formula, anche in un altro modo, e cioè con $x_1 = \frac{1}{n}((n-1)x_0 + \frac{a}{x_0^{\,n-1}})$.

Per $n = 2$ si ottiene:

$$x_1 = \frac{x_0^{\,2} + a}{2x_0} = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{a}{x_0})$$

Per $n = 3$ si ottiene:

$$x_1 = \frac{2x_0^{\,3} + a}{3x_0^{\,2}} = \frac{1}{3}(2x_0 + \frac{a}{x_0^{\,2}})$$

Per $n = 4$ si ottiene:

$$x_1 = \frac{3x_0^{\,4} + a}{4x_0^{\,3}} = \frac{1}{4}(3x_0 + \frac{a}{x_0^{\,3}})$$

Ecc.

Calcolo del reciproco delle radici n-esime.

Per $f(x) = \frac{1}{x^n} - a = 0$ allora, con semplici passaggi abbiamo $x = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

Se risolviamo la $f(x) = \frac{1}{x^n} - a = 0$ allora abbiamo risolto anche la $x = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

La derivata della $f(x) = \frac{1}{x^n} - a$ è $f'(x) = -n \cdot x^{-(n+1)}$.

Visto che $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ sostituendo si ottiene $x_1 = x_0 - \frac{x_0^{\,-n} - a}{-nx_0^{\,-(n+1)}}$ che semplificando si trasforma in

$$x_1 = x_0 - (\frac{-1}{n}x_0^{\,(n+1)} \cdot (x_0^{\,-n} - a)) \qquad x_1 = x_0 - (\frac{-1}{n}x_0 + \frac{a}{n}x_0^{\,(n+1)})$$

$$x_1 = x_0 + \frac{x_0}{n} - \frac{a}{n}x_0^{\,(n+1)}$$

$$x_1 = \frac{nx_0 + x_0 - ax_0^{\,(n+1)}}{n} \qquad x_1 = \frac{x_0(n+1) - ax_0^{\,(n+1)}}{n}$$

$$x_1 = \frac{x_0((n+1) - ax_0^{\,n})}{n}$$

Per $n = 2$ si ottiene:

$$x_1 = \frac{x_0(3 - ax_0^{\,2})}{2}$$

Per $n = 3$ si ottiene:

$$x_1 = \frac{x_0(4 - ax_0{}^3)}{3}$$

Per $n = 4$ si ottiene:

$$x_1 = \frac{x_0(5 - ax_0{}^4)}{4}$$

Ecc.
Per essere completamente sinceri bisogna dire che questa seconda variante ha una sua ragione di esistere nel calcolo delle radici in alta precisione. Cioè quando è necessario calcolare migliaia (o anche milioni) di cifre decimali per cui il tempo di esecuzione, dei vari calcoli, è, nel suo complesso, rilevante. In questo caso, per calcolare la $\sqrt[n]{a}$ conviene, con l'intento di ridurre al minimo il tempo di esecuzione totale, utilizzare questa seconda variante ed effettuare il calcolo di $\frac{1}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}$. Poi visto che vale la seguente equazione $\frac{1}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} \cdot a = \sqrt[n]{a}$ ottenere la $\sqrt[n]{a}$. Non spiegherò il motivo di questo singolare procedimento perché questo argomento esula da questo scritto.

Sviluppo in serie di Taylor

Tralasciando tutta la teoria che c'è dietro, è possibile dimostrare che la funzione $(1+x)^a$ può essere sviluppata come somma di vari termini. Vediamone direttamente lo sviluppo:

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = 1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!}x^4 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)}{5!}x^5 + \ldots\ldots\ldots$$

Esempio
Ammettiamo di voler calcolare $(1+8)^4$.
In questo esempio avremo a = 4 x = 8.
Effettuando le opportune sostituzioni nell'espressione precedente avremo:

$$(1+8)^4 = 1 + \frac{4}{1!}8 + \frac{4\times3}{2!}8^2 + \frac{4\times3\times2}{3!}8^3 + \frac{4\times3\times2\times1}{4!}8^4 + \frac{4\times3\times2\times1\times0}{5!}8^5 + \ldots\ldots.$$

Come è possibile vedere il termine $\frac{4\times3\times2\times1\times0}{5!}8^5$ è uguale a 0 ed anche tutti i termini successivi sono, ovviamente, uguali a 0. Ora vediamo di rendere la nostra espressione un po' più familiare.

$$1 + \frac{4}{1!}8 + \frac{4\times3}{2!}8^2 + \frac{4\times3\times2}{3!}8^3 + \frac{4\times3\times2\times1}{4!}8^4 = 1\times8^0 + 4\times8^1 + 6\times8^2 + 4\times8^3 + 1\times8^4.$$

Ora potrete vedere che il nostro sviluppo si è trasformato nel famoso "binomio di Newton" che ha molta affinità all'altrettanto famoso "triangolo di Tartaglia" In Spagna e in Francia tale triangolo è conosciuto con il nome di "triangolo di Pascal".

Andiamo ora ad effettuare i calcoli del nostro esempio. $(1+8)^4 = 9^4 = 6561$

$1\times8^0 + 4\times8 + 6\times8^2 + 4\times8^3 + 1\times8^4 = 1 + 32 + 384 + 2048 + 4096 = 6561$

Molti potranno obbiettare che il calcolo di $(1+8)^4$ è piuttosto semplice e non ha nessun scopo complicarlo effettuando la somma di una serie di molti termini, come avviene attraverso lo sviluppo in serie di Taylor. Chi pensa questo ha perfettamente ragione, ma se la funzione da calcolare fosse più difficile (o impossibile), potrebbe essere molto utile (o indispensabile) poter effettuare molti semplici calcoli, piuttosto che un calcolo complesso (o non realizzabile).

Vediamo alcuni esempi di funzioni sviluppabili in serie di Taylor.
Grazie a questo metodo è possibile calcolare le funzioni esponenziali (e^x, e^{-x}, ecc.), le funzioni trigonometriche ($\text{sen}\, x, \cos x$, ecc.), le funzioni iperboliche ($\text{senh}\, x, \cosh x$, ecc.), le funzioni logaritmiche ($\log(1+x), \log(1-x), \log\frac{1+x}{1-x}$, ecc.), ecc.

Andiamo ora ad analizzare una nuova funzione che ci interessa molto più da vicino. La funzione è, ovviamente, $\sqrt[a]{1+x}$. Questa funzione è equivalente alla funzione $(1+x)^{\frac{1}{a}}$.
Sviluppando in serie di Taylor questa funzione e facendo delle semplici operazioni otteniamo:

$$\sqrt[a]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{a}} = 1 + \frac{x}{a} - \frac{a-1}{2a^2}x^2 + \frac{1-3a+2a^2}{6a^3}x^3 - \dots\dots\dots$$

Lo scopo di questo sviluppo è quello di poter avere un valore della funzione, anche se approssimato, attraverso poche e semplici operazioni. Come è ovvio, più termini si aggiungono allo sviluppo della serie, più il valore si avvicina al valore vero, ma al contempo si complica l'operatività.
Nell'ipotesi che $|x|$ (il valore assoluto di x) sia minore di 1, possiamo ritenere il termine $\frac{a-1}{2a^2}x^2$, e tutti i successivi, abbastanza piccoli da poterli trascurare senza alterare, in modo significativo, il risultato. Nell'ipotesi che $|x|$ sia maggiore di 1 non possiamo ritenere il termine $\frac{a-1}{2a^2}x^2$, e tutti i successivi, trascurabili per cui questa semplificazione non la possiamo effettuare.

Dobbiamo notare che, fermando lo sviluppo al secondo termine, abbiamo sempre un risultato approssimato per eccesso, visto che il termine successivo (il terzo termine) è sempre da sottrarre, per cui otteniamo che:

$$\sqrt[a]{1+x} \approx 1+\frac{x}{a}$$

Questa è la formula che abbiamo utilizzato al paragrafo "Metodo dell'aumento finito: teorema di Taylor" per effettuare il calcolo delle radici.

Nel caso che l'indice delle radici sia 2, cioè nel caso che siano delle radici quadrate otteniamo la "semplice" formula:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \dots\dots\dots$$

Esempio
Proviamo ad utilizzare questa formula, fermandoci al quarto termine, nel calcolo di una delle radici quadrate del capitolo 14 per poterne valutarne la convenienza. Il valore scelto è $\sqrt{53}$ ed il suo valore è 7,2801099…

$$\sqrt{53} = \sqrt{49+4} = 7\sqrt{1+\frac{4}{49}}$$

In questo caso x è uguale a $\frac{4}{49}$ e cioè a 0,0816327, per cui abbiamo:

$$\sqrt{53} \approx 7(1 + \frac{4}{2\times 49} - \frac{16}{8\times 2401} + \frac{64}{16\times 117649}) =$$
$$= 7\times(1 + 0{,}0408163 - 0{,}000833 + 0{,}000034) = 7{,}2801211$$

$$\sqrt{53} = \sqrt{64-11} = 8\sqrt{1-\frac{11}{64}}$$

In questo caso x è uguale a $\frac{11}{64}$ e cioè a 0,171875, per cui abbiamo:

$$\sqrt{53} \approx 8(1 - \frac{11}{2\times 64} - \frac{121}{8\times 4096} - \frac{1331}{16\times 262144}) =$$
$$= 8(1 - 0{,}0859375 - 0{,}0036926 - 0{,}0003173) = 7{,}2804208$$

Con questo semplice esempio abbiamo potuto facilmente verificare, come era ovvio attendersi, che aggiungendo alcuni termini allo sviluppo in serie il risultato si avvicina al valore corretto.

Esempio

Proviamo a calcolare la $\sqrt{2}$. Diciamo subito che il valore della $\sqrt{2}$ è = 1,4142136… Utilizzeremo per questo esempio le formule, con quattro termini, che abbiamo appena visto.

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+1} \approx 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 + 0{,}5 - 0{,}125 + 0{,}0625 = 1{,}4375$$

Come potete vedere siamo ancora un po' troppo lontani dal valore corretto e questo è dovuto al fatto che 1 non è "molto diverso" dall'unità. Per risolvere questo problema ci sono 2 strade, la prima, ed è la più ovvia, è quella di incrementare il numero dei termini, la seconda è un poco diversa, ma è molto più creativa ed interessante. Andiamola a vedere.

Proviamo a sviluppare in serie la funzione $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Questa funzione la possiamo scrivere anche in un altro modo, un poco diverso ma, più semplice da sviluppare.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + (-\frac{1}{2}x) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \ldots..$$

Da qui, con semplici calcoli possiamo ottenere:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3 + \ldots..$$

Se poniamo $x = -\frac{1}{50}$ otteniamo:

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{50}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{50-1}{50}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{49}{50}}} = \sqrt{\frac{50}{49}} = \frac{\sqrt{50}}{7} = \frac{5\sqrt{2}}{7}$ ed ora, quasi per miracolo, è apparsa la $\sqrt{2}$. In questo caso abbiamo che x (x = $\frac{1}{50}$) è molto più piccolo dell'unità, per cui sono necessari molti meno termini (o come si usa dire "converge molto più velocemente") per arrivare ad un valore accettabile della $\sqrt{2}$. Da qui eseguendo le sostituzioni abbiamo:

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{50}}} \approx \frac{7}{5}(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1\times 3}{2!\times 10^4} + \frac{1\times 3\times 5}{3!\times 10^6}) = 1{,}4142135$$

Come potete vedere, il valore appena trovato è davvero ottimo. Questo sviluppo in serie ha un grande vantaggio. I vari termini della serie sono facilmente calcolabili, facilitando i vari calcoli.

Esiste anche un'altra soluzione per trovare il valore della $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}\sqrt{1+\frac{1}{49}} \approx \frac{7}{5}(1 + \frac{1}{2\times 49} - \frac{1}{8\times 2401} + \frac{1}{16\times 117649}) = 1{,}4142135$$

Ora proviamo a calcolare la $\sqrt{3}$. Premetto che il suo valore è 1,7320508…

$$\sqrt{3} = \frac{7}{4}\sqrt{1-\frac{1}{49}} \approx \frac{7}{4}(1-\frac{1}{2\times 49}-\frac{1}{8\times 2401}-\frac{1}{16\times 117649}) = 1{,}7320508$$

Ora proviamo a calcolare la $\sqrt{5}$. Premetto subito che il suo valore è 2,236068…

$$\sqrt{5} = \frac{9}{4}\sqrt{1-\frac{1}{81}} \approx \frac{9}{4}(1-\frac{1}{2\times 81}-\frac{1}{8\times 6561}-\frac{1}{16\times 531441}) = 2{,}236068$$

Ora proviamo a calcolare la $\sqrt{7}$. Premetto subito che il suo valore è 2,6457513…

$$\sqrt{7} = \frac{8}{3}\sqrt{1-\frac{1}{64}} \approx \frac{8}{3}(1-\frac{1}{2\times 64}-\frac{1}{8\times 4096}-\frac{1}{16\times 262144}) = 2{,}6457515$$

Ora proviamo a calcolare la $\sqrt[3]{2}$. Premetto subito che il suo valore è 1,259921…

$$\sqrt[3]{2} = \frac{5}{4}\sqrt[3]{1+\frac{3}{125}} \approx \frac{5}{4}(1+\frac{3}{3\times 125}) = 1{,}26$$

Ora proviamo a calcolare la $\sqrt[3]{3}$. Premetto subito che il suo valore è 1,4422495…

$$\sqrt[3]{3} = \frac{13}{9}\sqrt[3]{1-\frac{10}{2197}} \approx \frac{13}{9}(1-\frac{10}{3\times 2197}) = 1{,}4422529$$

Come ultimo esempio proviamo a calcolare la $\sqrt[3]{5}$. Premetto subito che il suo valore è 1,7099759…

$$\sqrt[3]{5} = \frac{12}{7}\sqrt[3]{1-\frac{13}{12^3}} \approx \frac{12}{7}(1-\frac{13}{3\times 12^3}) = 1{,}7099868$$

Precisazioni sul punto B del paragrafo "Metodo dell'aumento finito: teorema di Taylor"

All'inizio del paragrafo "Metodo dell'aumento finito: teorema di Taylor" ho affermato che "Più il valore di "n" è grande più $1+\frac{\varepsilon}{n}$ si avvicina al valore $\sqrt[n]{1+\varepsilon}$". Ora è arrivato il momento di precisare e delimitare questa affermazione. Bisogna premettere che in un raffronto è significativo l'errore assoluto $(V_C - V_V)$, ma ancora più significativo è l'errore relativo ($\frac{V_C - V_V}{V_V}$). Per cui più il valore assoluto dell'errore relativo è piccolo più il valore calcolato si avvicina al valore vero. Facciamo alcuni esempi per poi delimitare il campo di applicazione.

Esempio
Confronto fra l'errore relativo nel calcolo della $\sqrt{1{,}1}$ e nel calcolo della $\sqrt[10]{1{,}1}$.

Calcolo della $\sqrt{1{,}1}$.

$\sqrt{1{,}1} = 1{,}0488088\ldots$ V_V Valore vero

$\sqrt{1{,}1} \approx 1+\frac{1}{2\cdot 10} = 1{,}05$ V_C Valore calcolato

In questo esempio l'errore relativo è $\frac{1{,}05 - 1{,}0488088}{1{,}0488088} = \frac{0{,}0011912}{1{,}0488088} = 0{,}1135765\%$

Calcolo della $\sqrt[10]{1{,}1}$.

$\sqrt[10]{1{,}1} = 1{,}0095766\ldots$

$\sqrt[10]{1{,}1} \approx 1+\frac{1}{10\cdot 10} = 1{,}01$

In questo esempio l'errore relativo è $\frac{1{,}01 - 1{,}0095766}{1{,}0095766} = \frac{0{,}0004234}{1{,}0095766} = 0{,}0419384\%$

Da qui si vede che il valore assoluto degli errori relativi indica che la migliore approssimazione l'abbiamo ottenuta nel calcolo della $\sqrt[10]{1{,}1}$ rispetto al calcolo della $\sqrt{1{,}1}$.

Esempio
Confronto fra l'errore relativo nel calcolo della $\sqrt{1000}$ e nel calcolo della $\sqrt[10]{1000}$.

Calcolo della $\sqrt{1000}$.

$\sqrt{1000} = 31{,}622777\ldots$

$\sqrt{1000} = \sqrt{961+39} \approx 31\cdot(1+\frac{39}{2\cdot 961}) = 31{,}629032\ldots$

In questo esempio l'errore relativo è $\frac{31{,}629032 - 31{,}622777}{31{,}622777} = \frac{0{,}006255}{31{,}622777} = 0{,}01978\%$

Calcolo della $\sqrt[10]{1000}$.

$\sqrt[10]{1000} = 1{,}9952623\ldots$

$\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{1024-24} \approx 2\cdot(1-\frac{24}{10\cdot 1024}) = 1{,}9953125\ldots$

In questo esempio l'errore relativo è $\frac{1{,}9953125 - 1{,}9952623}{1{,}9952623} = \frac{0{,}0000502}{1{,}9952623} = 0{,}002516\%$

Da qui si vede che, anche in questo esempio, il valore assoluto degli errori relativi indica che la migliore approssimazione l'abbiamo ottenuta nel calcolo della $\sqrt[10]{1000}$ rispetto al calcolo della $\sqrt{1000}$.

Questi due esempi non devono trarre in inganno, perché il calcolo effettuato da un'ottima approssimazione solo nei dintorni delle potenze n-esime dei numeri che sappiamo calcolare alla potenza n-esima, altrimenti l'errore relativo cresce in modo significativo.

<u>Esempio</u>

Confronto fra l'errore relativo nel calcolo della $\sqrt{500}$ e nel calcolo della $\sqrt[10]{500}$.

Calcolo della $\sqrt{500}$.

$\sqrt{500} = 22{,}36068\ldots$

$\sqrt{500} = \sqrt{484+16} \approx 22\cdot(1+\frac{16}{2\cdot 484}) = 22{,}363636\ldots$

In questo esempio l'errore relativo è $\frac{22{,}363636 - 22{,}36068}{22{,}36068} = \frac{0{,}002956}{22{,}36068} = 0{,}0132213\%$

Calcolo della $\sqrt[10]{500}$.

$\sqrt[10]{500} = 1{,}8616456\ldots$

$\sqrt[10]{500} = \sqrt[10]{1024-524} \approx 2\cdot(1-\frac{524}{10\cdot 1024}) = 1{,}8976563\ldots$

In questo esempio l'errore relativo è $\frac{1{,}8976563 - 1{,}8616456}{1{,}8616456} = \frac{0{,}0360107}{1{,}8616456} = 1{,}9343478\%$

Da qui si vede che il valore assoluto degli errori relativi indica che la migliore approssimazione l'abbiamo ottenuta nel calcolo della $\sqrt{500}$ rispetto al calcolo della $\sqrt[10]{500}$.

Nella pratica questo metodo si usa solo per il calcolo delle radici quadrate, delle radici cubiche e delle radici di qualunque ordine nell'intorno della potenza n-esima di un numero che sappiamo calcolare. Comunque, nonostante tutto, anche al di fuori dell'intorno della potenza n-esima di un numero che sappiamo calcolare questo metodo permette di avere un buon valore da utilizzare, come prima approssimazione, nel "Metodo delle tangenti o iterazione di Newton".

Alcune operazioni sui numeri complessi

Qui vedremo come si possono effettuare alcune operazioni sui numeri complessi.

Prodotto di due numeri complessi

I numeri complessi si possono rappresentare in due modi distinti, ma equivalenti.

Se i numeri complessi sono rappresentati in coordinate cartesiane abbiamo:

$z_1 = (a_1 + jb_1)$

$z_2 = (a_2 + jb_2)$

Il loro prodotto vale:

$z_1 z_2 = (a_1 + jb_1)\cdot(a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Se i numeri complessi sono rappresentati in coordinate polari abbiamo:

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + j\mathrm{sen}\varphi_1)$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + j\mathrm{sen}\varphi_2)$$

Il loro prodotto vale:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\mathrm{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Come è facile vedere, se i numeri complessi sono rappresentati in coordinate polari (o in forma trigonometrica), effettuare la moltiplicazione è veramente semplice, molto più semplice rispetto al calcolo da effettuare se i numeri complessi fossero espressi in coordinate cartesiane. Per questo motivo, da ora in avanti, mi riferirò sempre ai numeri complessi espressi in coordinate polari.

Prodotto di molti numeri complessi
In modo analogo all'esempio precedente, abbiamo:

$$z_1 z_2 ... z_n = \rho_1\rho_2...\rho_n \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n) + j\mathrm{sen}(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n)]$$

Potenza n-esima di un numero complesso
Numero da elevare all'n-esima potenza

$$z = \rho(\cos\varphi + j\mathrm{sen}\varphi)$$

$$z^n = [\rho(\cos\varphi + j\mathrm{sen}\varphi)]^n = \rho^n[\cos(n\varphi) + j\mathrm{sen}(n\varphi)]$$

Quoziente di due numeri complessi

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + j\mathrm{sen}\varphi_1)$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + j\mathrm{sen}\varphi_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\mathrm{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Radice n-esima di un numero complesso

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + j\mathrm{sen}\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}[\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}) + j\mathrm{sen}(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})]$$

In questa formula φ (anomalia) è espressa in radianti.

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + j\mathrm{sen}\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}[\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{360°k}{n}) + j\mathrm{sen}(\frac{\varphi}{n} + \frac{360°k}{n})]$$

In questa formula φ (anomalia) è espressa in gradi sessagesimali.
Con "k" = 0, 1, 2, 3, …, (n - 1) per entrambe le formule.

Radice n-esima dell'unità
L'unità può essere rappresentata, in forma complessa, in questo modo.

$$1 = \cos 0 + j\mathrm{sen}0$$

Con semplici passaggi otteniamo:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + j\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{n}$$

In questa formula φ (anomalia) è espressa in radianti.

Con "k" = 0, 1, 2, 3, …, (n - 1).

Radice n-esima dell'unità negativa
L'unità negativa può essere rappresentata, in forma complessa, in questo modo.
$$-1 = \cos 180° + j\mathrm{sen} 180°$$

Con semplici passaggi otteniamo:
$$\sqrt[n]{-1} = \cos\left(\frac{180°}{n} + \frac{360°k}{n}\right) + j\mathrm{sen}\left(\frac{180°}{n} + \frac{360°k}{n}\right)$$
In questa formula φ (anomalia) è espressa in gradi sessagesimali.
Con "k" = 0, 1, 2, 3, …, (n - 1).

Radice n-esima dell'unità immaginaria
L'unità immaginaria può essere rappresentata, in forma complessa, in questo modo.
$$j = \cos\frac{\pi}{2} + j\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}$$

Con semplici passaggi otteniamo:
$$\sqrt[n]{j} = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + j\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$
In questa formula φ (anomalia) è espressa in radianti.
Con "k" = 0, 1, 2, 3, …, (n - 1).

Radice n-esima dell'unità immaginaria negativa
L'unità immaginaria negativa può essere rappresentata, in forma complessa, in questo modo.
$$-j = \cos\frac{3\pi}{2} + j\mathrm{sen}\frac{3\pi}{2}$$

Con semplici passaggi otteniamo:
$$\sqrt[n]{-j} = \cos\left(\frac{3\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + j\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$
In questa formula φ (anomalia) è espressa in radianti.
Con "k" = 0, 1, 2, 3, …, (n - 1).

Calcolo della radice quadrata di un numero complesso espresso in coordinate cartesiane
Per essere completamente sinceri bisogna dire che esiste un particolare metodo, diverso da quello illustrato nel relativo capitolo, per calcolare le sole radici quadrate di un numero complesso espresso in coordinate cartesiane. Questo metodo non necessita la trasformazione del numero da coordinate cartesiane a coordinate polari. Permette il calcolo in modo diretto e le due soluzioni sono date in coordinate cartesiane. Visto che "la radice quadrata di un numero complesso deve essere un numero complesso", vale la seguente affermazione:
$$\sqrt{A + jB} = a + jb$$

Elevando entrambi i termini al quadrato otteniamo:
$$(\sqrt{A + jB})^2 = (a + jb)^2$$

Semplificando abbiamo:
$$A + jB = (a + jb)^2 \qquad A + jB = a^2 - b^2 + j2ab$$

Ovviamente deve risultare:

$$\begin{cases} A = a^2 - b^2 \\ B = 2ab \end{cases} \qquad \begin{cases} A = a^2 - b^2 \\ a = \dfrac{B}{2b} \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \dfrac{B^2}{4b^2} - b^2 \\ a = \dfrac{B}{2b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{B^2 - 4b^4}{4b^2} \\ a = \dfrac{B}{2b} \end{cases}$$

Dalla prima equazione ($A = \dfrac{B^2 - 4b^4}{4b^2}$) ricaviamo il valore di "b".

$$A = \frac{B^2 - 4b^4}{4b^2} \qquad 4Ab^2 = B^2 - 4b^4 \qquad 4b^4 + 4Ab^2 - B^2 = 0$$

$$b^2 = \frac{-4A \pm \sqrt{16A^2 + 16B^2}}{2 \cdot 4} \qquad b^2 = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + B^2}}{2}$$

$$b = \pm\sqrt{\frac{-A \pm \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} \text{ con } -A \pm \sqrt{A^2 + B^2} \geq 0 \text{ per cui } b = \pm\sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}$$

Possiamo calcolare "a" sostituendo il valore di "b", appena trovato, nell'equazione $a = \dfrac{B}{2b}$.

Comunque è possibile calcolare "a" anche in un altro modo. Vediamolo.

$$\begin{cases} A = a^2 - b^2 \\ B = 2ab \end{cases} \qquad \begin{cases} A = a^2 - b^2 \\ b = \dfrac{B}{2a} \end{cases} \qquad \begin{cases} A = a^2 - \dfrac{B^2}{4a^2} \\ b = \dfrac{B}{2a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{4a^4 - B^2}{4a^2} \\ b = \dfrac{B}{2a} \end{cases}$$

Dalla prima equazione ($A = \dfrac{4a^4 - B^2}{4a^2}$) ricaviamo il valore di "a".

$$A = \frac{4a^4 - B^2}{4a^2} \qquad 4Aa^2 = 4a^4 - B^2 \qquad 4a^4 - 4Aa^2 - B^2 = 0$$

$$a^2 = \frac{4A \pm \sqrt{16A^2 + 16B^2}}{2 \cdot 4} \qquad a^2 = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2}}{2}$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} \text{ con } A \pm \sqrt{A^2 + B^2} \geq 0 \text{ per cui } a = \pm\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}$$

Le due soluzioni sono:

$$I°\begin{cases} a = \dfrac{B}{2b} \\ b = \sqrt{\dfrac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} \end{cases} \qquad II°\begin{cases} a = \dfrac{B}{2b} \\ b = -\sqrt{\dfrac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} \end{cases}$$

oppure

$$I°\begin{cases} a = \sqrt{\dfrac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} \\ b = \dfrac{B}{2a} \end{cases} \qquad II°\begin{cases} a = -\sqrt{\dfrac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} \\ b = \dfrac{B}{2a} \end{cases}$$

Per esemplificare bene questo metodo facciamo un esempio.

Esempio

Abbiamo visto, nel capitolo relativo, che le due soluzioni della $\sqrt{8 + j3}$ sono uguali a:

$$\begin{cases} soluzione1 = 2{,}8761 + j0{,}52156 \\ soluzione2 = -2{,}8761 - j0{,}52156 \end{cases}$$

Vediamo ora come dobbiamo procedere per poter calcolare le due soluzioni utilizzando il procedimento appena esposto.

$$\begin{cases} A = 8 \\ B = 3 \end{cases}$$

Visto che $b = \pm\sqrt{\dfrac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}$ sostituendo abbiamo:

$$b = \pm\sqrt{\frac{-8 + \sqrt{64 + 9}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{-8 + 8{,}5440037}{2}} = \pm\sqrt{0{,}2720019} = \pm 0{,}521538$$

Da cui ricaviamo "a" che è uguale a:

$$a = \frac{B}{2b} = \frac{3}{2 \cdot (\pm 0{,}521538)} = \pm 2{,}8761087$$

Ovviamente bisognerà inserire, nella precedente formula, il valore di "b" con il suo segno. In questo modo otterremo il valore di "a" con il giusto segno per la soluzione cercata. L'altra soluzione avrà i valori opposti rispetto alla prima soluzione.

E' possibile calcolare il valore di "a" anche con la seguente formula $a = \pm\sqrt{\dfrac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}$

$$a = \pm\sqrt{\frac{8 + \sqrt{64 + 9}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{8 + 8{,}5440037}{2}} = \pm\sqrt{8{,}2720019} = \pm 2{,}8761088$$

Ovviamente si ottiene il medesimo valore, ma bisogna porre attenzione al segno del risultato visto che deve essere sempre rispettata la seguente condizione $2ab = B$.

Per cui le due soluzioni saranno:

$$\begin{cases} soluzione1 = 2{,}8761087 + j0{,}521538 \\ soluzione2 = -2{,}8761087 - j0{,}521538 \end{cases}$$

E' facile verificare che, ovviamente, i due metodi (quello qui illustrato e il metodo utilizzando la formula di Moirè) danno il medesimo risultato. La lieve differenza è imputabile al diverso procedimento di calcolo.

Calcolo della radice cubica di un numero reale o immaginario espresso in coordinate cartesiane
Esiste un metodo, analogo al metodo appena visto per la radice quadrata, per il calcolo delle tre soluzioni di una radice cubica di un numero reale o di un numero immaginario. Anche in questo caso vale l'affermazione che "la radice cubica di un numero complesso deve essere un numero complesso", per cui:

$$\sqrt[3]{A+jB}=a+jb$$

Elevando entrambi i termini al cubo otteniamo:

$$A+jB=(a+jb)^3 \qquad A+jB=a^3+j3a^2b-3ab^2-jb^3$$

Ovviamente deve risultare:

$$\begin{cases}A=a^3-3ab^2\\B=3a^2b-b^3\end{cases} \qquad \begin{cases}A=a(a^2-3b^2)\\B=b(3a^2-b^2)\end{cases}$$

Radice cubica di un numero reale
Se il radicando è un numero reale significa che deve essere $B=0$.

$$\begin{cases}A=a^3-3ab^2\\0=b(3a^2-b^2)\end{cases}$$

Da qui si ricava che $b=0$ o $3a^2=b^2$.

Le tre soluzioni sono:

$$I°\begin{cases}A=a^3\\b=0\end{cases} \qquad I°\begin{cases}a=\sqrt[3]{A}\\b=0\end{cases}$$

$$II°\begin{cases}A=a^3-3a(3a^2)\\3a^2=b^2\end{cases} \qquad II°\begin{cases}A=a^3-9a^3\\3a^2=b^2\end{cases} \qquad II°\begin{cases}A=-8a^3\\3a^2=b^2\end{cases}$$

$$II°\begin{cases}a=-\sqrt[3]{\dfrac{A}{8}}\\3a^2=b^2\end{cases}$$

$$II°\begin{cases}a=-\dfrac{\sqrt[3]{A}}{2}\\3a^2=b^2\end{cases} \qquad II°\begin{cases}a=-\dfrac{\sqrt[3]{A}}{2}\\3(\dfrac{\sqrt[3]{A^2}}{4})=b^2\end{cases} \qquad II°\begin{cases}a=-\dfrac{\sqrt[3]{A}}{2}\\b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{A}\end{cases}$$

$$II°\begin{cases}a=-\dfrac{\sqrt[3]{A}}{2}\\b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{A}\end{cases}$$

$$III°\begin{cases} a = -\dfrac{\sqrt[3]{A}}{2} \\ b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{A} \end{cases} \qquad III°\begin{cases} a = -\dfrac{\sqrt[3]{A}}{2} \\ b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{A} \end{cases}$$

Radice cubica di un numero immaginario

Se il radicando è un numero immaginario significa che deve essere $A = 0$.

$$\begin{cases} 0 = a(a^2 - 3b^2) \\ B = 3a^2b - b^3 \end{cases}$$

Da qui si ricava che $a = 0$ o $a^2 = 3b^2$.

Le tre soluzioni sono:

$$I°\begin{cases} a = 0 \\ B = -b^3 \end{cases} \qquad I°\begin{cases} a = 0 \\ b = -\sqrt[3]{B} \end{cases}$$

$$II°\begin{cases} a^2 = 3b^2 \\ B = 3(3b^2)b - b^3 \end{cases} \qquad II°\begin{cases} a^2 = 3b^2 \\ B = 9b^3 - b^3 \end{cases} \qquad II°\begin{cases} a^2 = 3b^2 \\ B = 8b^3 \end{cases}$$

$$II°\begin{cases} a^2 = 3b^2 \\ b = \sqrt[3]{\dfrac{B}{8}} \end{cases}$$

$$II°\begin{cases} a^2 = 3b^2 \\ b = \dfrac{\sqrt[3]{B}}{2} \end{cases} \qquad II°\begin{cases} a^2 = 3\dfrac{\sqrt[3]{B^2}}{4} \\ b = \dfrac{\sqrt[3]{B}}{2} \end{cases} \qquad II°\begin{cases} a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{B} \\ b = \dfrac{\sqrt[3]{B}}{2} \end{cases}$$

$$II°\begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{B} \\ b = \dfrac{\sqrt[3]{B}}{2} \end{cases}$$

$$III°\begin{cases} a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{B} \\ b = \dfrac{\sqrt[3]{B}}{2} \end{cases} \qquad III°\begin{cases} a = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{B} \\ b = \dfrac{\sqrt[3]{B}}{2} \end{cases}$$

Interpretazione grafica della formula di Moivrè

Possiamo interpretare, graficamente, la formula di Moivrè per l'effettuazione del calcolo della radice n-esima di un numero complesso. Vediamo ora come poter effettuare tale interpretazione.

I) In un piano cartesiano riportiamo il punto P che rappresenta il numero complesso da calcolare.
II) Uniamo il punto P con l'origine delle coordinate e ne misuriamo il modulo ρ (distanza dall'origine delle coordinate al punto P).
III) Misuriamo, del punto P, anche la sua anomalia φ (angolo tra la retta che unisce l'origine delle coordinate ed il punto P, e l'asse polare del piano cartesiano).
IV) Calcoliamo la radice n-esima del modulo ρ e lo chiamiamo ρ_1.

V) Dividiamo per "n" la sua anomalia φ e la chiamiamo φ_1.
VI) Riportiamo sul piano cartesiano questo nuovo vettore che ha per modulo ρ_1 e per anomalia l'angolo φ_1.
Questa è prima delle "n" soluzioni della radice n-esima.
VII) Dividiamo l'angolo giro (360° o 2π) per "n" e chiamiamo questo angolo φ'.
VIII) Il modulo della seconda soluzione è ρ_1 e la sua anomalia va calcolata sommando φ_1 e φ' ($\varphi_1 + \varphi'$).
IX) Il modulo della terza soluzione è ρ_1 e la sua anomalia va calcolata sommando φ_1 e $2\varphi'$ ($\varphi_1 + 2\varphi'$).
X) In modo analogo si calcolano tutte le altre eventuali soluzioni.

Ovviamente dopo aver sommato "n" volte φ' si ottiene un angolo che si sovrappone all'angolo della prima soluzione, visto che "n" volte φ' è uguale ad un angolo giro. Per questo motivo le soluzioni della radice n-ennesima di un numero, nel campo dei numeri complessi, sono soltanto "n".

Profili biografici

In questi brevissimi profili il lettore troverà alcuni cenni sui matematici citati.

Apollonio Pergeo – Matematico greco, nato a Perge circa nel 262 a.C., morto a Perge circa nel 180 a.C. Studiò ad Alessandria nella scuola dei successori di Euclide. E' considerato uno dei matematici greci più importanti. La sua opera più famosa è le "Coniche" in 8 libri. Migliorò il calcolo, effettuato da Archimede, del rapporto tra circonferenza e diametro (π).

Archimede – Matematico e fisico italiano, nato a Siracusa nel 287 a.C., morto a Siracusa nel 212 a.C. Di lui ci sono rimaste molte opere che ne fanno uno dei matematici e dei fisici più grandi di sempre. Di lui è famosa l'esclamazione "Eureka" (ho trovato) quando riuscì a trovare un metodo per confrontare il peso specifico dei solidi. Altrettanto famosa è la sua frase "Datemi un punto di appoggio che vi solleverò il mondo" quando riuscì a stabilire i principi delle leve. I suoi risultati sono molteplici in tutti i campi. Riuscì a calcolare l'area del segmento parabolico; riuscì a calcolare il volume e la superficie del cilindro, della sfera e delle sue porzioni; riuscì a calcolare l'area dell'arbello e del salinon; fu il precursore del "calcolo infinitesimale"; ecc. Il suo nome è legato indissolubilmente al "principio di Archimede" (principio di idrostatica), alla "spirale di Archimede" e ad una pompa dal nome di "vite di Archimede". Fu sempre Archimede a calcolare che il rapporto tra circonferenza e diametro (π), era compreso tra $\frac{223}{71}$ ($\frac{223}{71} = 3{,}1408$) e $\frac{220}{70}$ ($\frac{22}{7} = 3{,}\overline{142857}$).

Bombelli Raffaele – Matematico ed ingegnere italiano, nato (forse) a Borgo Panigale nel XVI secolo, morto dopo il 1572. Di lui si hanno scarse notizie, ma sappiamo per certo che si dedicò al prosciugamento delle paludi della val di Chiana. E' noto soprattutto per i suoi lavori di algebra e di geometria, ma dette un contributo importante alla teoria dei numeri e all'introduzione dei numeri immaginari. In alcuni suoi scritti ci sono accenni alle frazioni continue illimitate.

Briggs Henry – Matematico inglese, nato a Warley Wood nel 1556, morto a Oxford nel 1631. Insegnò a Cambridge, Londra ed Oxford. E' famoso per aver introdotto l'uso del logaritmi decimali e per alcune formule trigonometriche.

Burgi Joost – Matematico e astronomo svizzero, nato a Lichtensteig nel 1552, morto a Kassel nel 1632. Fu assistente di Keplero e compose, indipendentemente dal Napier, le prime tavole logaritmiche. E' considerato, insieme al Napier, uno degli inventore dei logaritmi.

Cartesio René – Matematico francese, nato a La Haye nel 1596, morto a Stoccolma nel 1650. Il suo nome era Descartes René, ma in Italia è conosciuto con il nome di Cartesio. Di famiglia ricca e nobile studiò matematica a Parigi sotto la guida del matematico Mersenne. Si arruolò come militare, ma a 33 anni si congedò ritirandosi in Olanda a vita privata. Si dedicò esclusivamente alla matematica e nel 1649 accettò di trasferirsi a Stoccolma. Grandissimo matematico, ha pubblicato moltissime opere in tutti i campi della matematica tra cui un trattato di geometria dal titolo "Geometrie". Il suo nome è universalmente legato all'utilizzo delle "coordinate cartesiane" e alla curva denominata "folium" o "foglia di Cartesio".

Cataldi Pietro Antonio – Matematico italiano, nato a Bologna nel 1552, morto a Bologna nel 1626. Di lui si hanno poche notizie, anche se ha pubblicato oltre trenta opere di matematica. Scoprì le frazioni continue illimitate. La sua opera più famosa è "Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadrata delli numeri" visto che segna la nascita delle frazioni continue illimitate.

Euclide – Matematico greco, vissuto nel III secolo a.C. Discepolo di Platone, si trasferì ad Alessandria d'Egitto dove vi fondò una scuola di matematica. Della sua vita ci sono poche notizie, ma la sua fama è immensa. Molte sono le opere di Euclide, ma la sua opera più importante è gli "Elementi", suddivisa in 13 volumi dove espone dei teoremi con minuziosa precisione grazie all'uso dei postulati e delle definizioni. Euclide è universalmente ricordato, anche per due teoremi di geometrica che portano il suo nome.

Euler Leonard – Matematico tedesco, nato a Basilea nel 1707, morto a Pietroburgo nel 1783. Allievo di Johann Bernulli, si trasferisce in Russia insieme a Daniel Bernulli e Nikolaus Bernulli. E' stato uno dei più grandi matematici, insieme a Giuseppe Luigi Lagrange, del XVIII secolo. Ha fatto innumerevoli scoperte in tutti i campi della matematica. Il suo nome è legato a molti risultati da lui raggiunti e tra essi c'è la scoperta di molte proprietà del numero "e", base dei logaritmi naturali ed anche denominato "Numero di Euler".

Fermat Pierre – Matematico francese, nato a Beaumont de Lomagne nel 1601, morto a Castres nel 1665. Di professione era un magistrato e un consigliere al parlamento di Tolosa e dedicava alla matematica solo il suo tempo libero. Nonostante non fosse un matematico di professione raggiunse dei risultati di tutto rilievo in molti settori tra cui il "calcolo delle probabilità" ed il "calcolo infinitesimale". Ma la sua fama è dovuta ai suoi grandissimi contributi alla "teoria dei numeri". Fermat non ha mai pubblicato nulla sui risultati da lui raggiunti e tutti i propri scritti sono postumi e questo non facilita l'individuazione certa sui suoi, sicuramente straordinari, successi.

Fibonacci Leonardo (detto Leonardo Pisano) – Matematico italiano, nato a Pisa circa nel 1170, morto a Pisa dopo il 1240. Viaggiò molto per motivi di commercio. La sua opera più famosa è il "Liber Abbaci", che gli valse, postuma, grandissima fama e dove descrive i vantaggi della numerazione araba, rispetto alla numerazione romana allora in uso. Il suo nome è legato alla serie 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 ecc. (denominata "serie di Fibonacci") dove ogni termine è dato dalla somma dei due termini che lo precedono.

Gunter Edmund - Matematico inglese, nato a Hertfordshire nel 1581, morto a Londra nel 1626. Insegnò astronomia a Londra e i suoi più importanti contributi sono nella trigonometria e nell'invenzione di alcuni strumenti per la navigazione.

Ippocrate di Chio – Geometra greco, vissuto nel V secolo a.C. Sono molto poche le informazioni che abbiamo di questo matematico, sicuramente insegnò geometria ad Atene nel (circa) 450 a.C. Ricercò un metodo per la soluzione della quadratura del cerchio e per la duplicazione del cubo. Di questo matematico ci è pervenuto soltanto un opera dal titolo "Elementi".

Lagrange Giuseppe Luigi – Matematico italiano, nato a Torino nel 1736, morto a Parigi nel 1813. Insieme a Leonard Euler è stato uno dei più grandi matematici della sua epoca. Nel 1755 fu nominato professore alla reale scuola di artiglieria di Torino. Nel 1766 si trasferisce a Berlino per dirigerne l'accademia di matematica e nel 1787 lascia Berlino per Parigi. Fu nominato professore all'Ecole Normale e all'Ecole Polytechnique. Era talmente tanto famoso, ed apprezzato, che nemmeno la rivoluzione francese lo colpì, e per lui fu fatto un apposito decreto per salvaguardarlo evitandogli l'espulsione dalla Francia. I suoi contributi sono in tutti i campi della matematica, ma il suo meglio lo ha dato nel campo dell'algebra. Il suo nome è legato soprattutto al teorema di analisi matematica denominato "Teorema del valore medio" o "Teorema di Lagrange".

Menecmo – Matematico greco, nato circa nel 375 a.C., morto circa nel 325 a.C. Fratello del matematico Dinostrato e allievo di Eudosso di Cnido. La sua fama è dovuta alla soluzione del problema della duplicazione del cubo grazie all'utilizzo delle coniche da lui studiate per primo.

Moivre Abraham de – Matematico francese, nato a Vitry nel 1667, morto a Londra nel 1754. Il suo nome è legato alla formula per il calcolo delle radici di un numero complesso e al calcolo delle probabilità.

Napier John – Matematico inglese, nato ad Edimburgo nel 1550, morto a Edimburgo nel 1617. Il suoi contributi sono tanti ed importanti. Il suo nome è legato indissolubilmente all'uso dei logaritmi naturali (detti anche "Logaritmi di Napier") e, in trigonometria, al "Teorema di Napier".

Newton Isaac – Matematico inglese, nato a Woolsthorpe nel 1642, morto a Kensington nel 1727. Ancora studente espose, in una lettera a Gottfried Wilhelm von Leibniz, il teorema del binomio che porta il suo nome. Nel 1696 divenne direttore della Zecca di Londra. Le sue scoperte sono state innumerevoli in tutti i campi, ma il suo nome è universalmente legato alla legge di gravitazione universale o "legge di Newton" ($F = G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2}$).

Pascal Blaise – Matematico e fisico francese, nato a Clermont nel 1623, morto a Parigi nel 1662. All'età di diciannove anni ideò una macchina calcolatrice meccanica (la pascalina) in grado di effettuare somme semplicemente impostando i vari addendi. I suoi contributi sono stati tanti e in varie discipline tra cui bisogna ricordare gli studi sulle coniche, sull'idrostatica (Teorema fondamentale sull'equilibrio dei liquidi) e sul calcolo delle probabilità (ne è stato l'iniziatore). Il suo nome è legato ai suoi studi sulla pressione atmosferica.

Pitagora – Matematico greco, vissuto nel VI secolo a.C. Secondo la tradizione Pitagora è nato a Samo. Visitò l'Egitto e la Babilonia. Il nome di Pitagora è universalmente associato al "Teorema di Pitagora". Fu Pitagora, per primo, a scoprire l'esistenza dei numeri irrazionali, scoprendo che la $\sqrt{2}$ non era un numero razionale.

Tartaglia Nicolò – Matematico italiano, nato a Brescia circa nel 1499, morto a Venezia nel 1557. Orfano di padre, di cui ignorava anche il cognome, fu soprannominato Tartaglia visto che era balbuziente. I suoi studi si riducono a 15 giorni di "scola per scrivere" effettuati quando aveva circa 14 anni. Il Tartaglia è noto per il cosiddetto "Triangolo di Tartaglia" dove sono esposti i coefficienti numerici degli sviluppi della potenza di un binomio. Ma quello che lo ha reso celebre è la risoluzione dell'equazione di terzo grado insieme ai matematici Gerolamo Cardano e Scipione Del Ferro. Il Tartaglia effettuò la prima traduzione, in italiano, del libro di Euclide gli "Elementi" e del libro di Archimede "De insidentibus acquae".

Taylor Brook – Matematico inglese, nato a Edmonton nel 1685, morto a Somerset House nel 1731. Studiò a Cambridge dove si laureò, divenendo dottore in legge, ma si dedicò allo studio della matematico. Il suo nome è conosciuto per la formula dell'aumento finito.

Viète Francois - Matematico, astronomo e uomo di stato francese, nato a Fontenay-le-Comte nel 1540, morto a Parigi nel 1603. Uno dei più grandi scienziati dell'epoca. Fu tra i primi a concepire l'importanza del calcolo algebrico o letterale e ad introdurlo nell'uso della descrizione delle equazioni. Al pari degli algebristi italiani Gerolamo Cardano, Scipione Dal Ferro e Nicolò Tartaglia studiò le equazioni di terzo grado. Viète è famoso per aver dato un grande contributo alla formula che poi ha preso il nome di "Formula di Moivre" e per i suoi contributi alla trigonometria.