Osservazioni sulla uniforme convergenza

Vogliamo fare un'osservazione *elementare* su una equivalenza che compare in alcuni testi di Analisi 2 e che, così come è ivi riportata, può indurre una convinzione errata.
In questi testi, infatti, si dice che una successione f_n di funzioni reali definite in un insieme J di numeri reali *converge uniformemente* in J verso una funzione f se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un indice ν_ε tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall n > \nu_\varepsilon \quad \text{e} \quad \forall x \in J \tag{1}$$

poi, si afferma che, *equivalentemente* ,la successione f_n *converge uniformemente* in J verso f , se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un indice ν_ε tale che

$$sup\{|f_n(x) - f(x)| \,,\; x \in J\} < \varepsilon \qquad \forall n > \nu_\varepsilon \tag{2}$$

lasciando intendere che l'indice ν_ε nella (2) sia lo stesso riportato nella (1) (anche se, un lettore, più attento, intenderà bene che non sia così).
La nostra osservazione è che l'indice suddetto non può essere lo stesso nella (1) e nella (2). Per questo, per comodità di qualcuno, anche, sia detto senza offesa, di alcuni insegnanti (a tutti, anche su questioni elementari, può capitare di avere qualche dubbio, non credo ci si debba vergognare) ci attarderemo a dimostrare (pedissequamente) nei dettagli la doppia implicazione, sostituendo la seconda affermazione con la seguente: la successione f_n *converge uniformemente* in J verso f , se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un indice υ'_ε tale che

$$sup\{|f_n(x) - f(x)| \,,\; x \in J\} < \varepsilon \qquad \forall n > \upsilon'_\varepsilon \tag{3}$$

cioè, in pratica, dimostreremo l'equivalenza della (1) con la (3).
Supponiamo, allora, che valga la (1);si ha che dalla (1) consegue subito che

$$sup\{|f_n(x) - f(x)| \,,\; x \in J\} \leq \varepsilon \qquad \forall n > \nu_\varepsilon \tag{4}$$

(se fosse sup $\{|f_n(x) - f(x)| \,,\; x \in J\} > \varepsilon$ per qualche n, posto p_n = sup $\{|f_n(x) - f(x)| \,,\; x \in J\}$, per le proprietà dell'estremo superiore, dovrebbe esistere un $x' \in J$, tale che $|f_n(x') - f(x')|$ apparterrebbe all'intervallo$]\varepsilon, p_n]$, in evidente contraddizione con la (1)).
Poiché, evidentemente, la (1) vale per ogni $\varepsilon > 0$, scelto $\varepsilon' < \varepsilon$,è possibile trovare $\nu_{\varepsilon'} \geq \nu_\varepsilon$ tale che si abbia:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon' \qquad \forall n > \nu_{\varepsilon'} \quad e \quad \forall x \in J; \tag{5}$$

se fosse:

$$sup\{|f_m(x) - f(x)| \,,\; x \in J\} = \varepsilon$$

per qualche m > $\nu_{\varepsilon'}$,per le proprietà dell'estremo superiore, nell'insieme J si potrebbe trovare un x' tale che $|f_m(x') - f(x')|$ appartenga all'intervallo $]\varepsilon', \varepsilon]$, cioè tale che:

$$|f_m(x') - f(x')| > \varepsilon'$$

In evidente contraddizione con la (5). Da ciò discende che vale la (4), pur di sostituire $\nu_{\varepsilon'}$ *con* ν_ε e il segno "≤" con il segno "<", quindi vale la (3) dove $\nu_{\varepsilon'}$ si è indicato con υ'_ε , cioè $(1) \Rightarrow (3))$.
Infine, concludiamo osservando che l'implicazione inversa $((3) \Rightarrow (1))$ è banalmente soddisfatta, anche supponendo $\upsilon'_\varepsilon = \nu_\varepsilon$, per ovvie proprietà dell'estremo superiore. Era quanto si voleva dimostrare.

Prof. Salvatore Antonucci