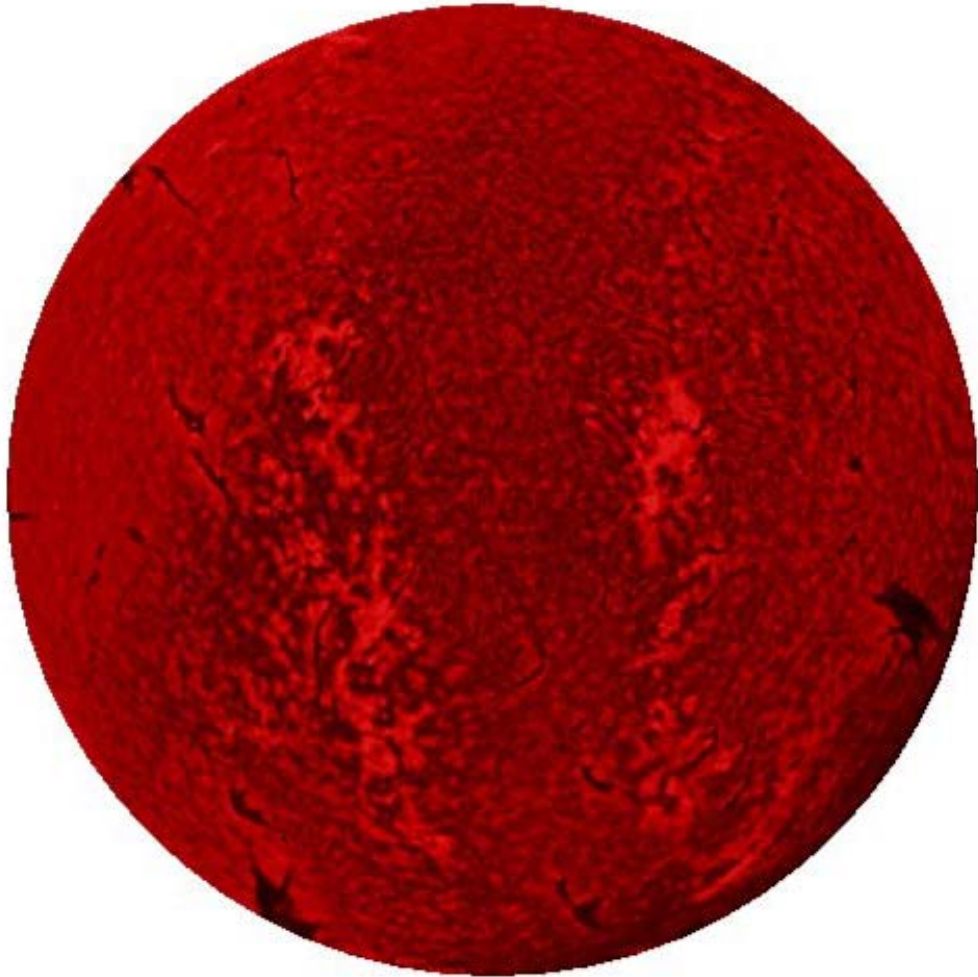


**Il Sole:**



**un amico caloroso**

*Diego Alberto, Novembre 2004*

# Ringraziamenti

a Gabriella,

desidero ringraziare Roberto Garelo, Bruno Leone e Marco Massazza per il tempo dedicatomi.

Un pensiero va a Natale Maffioli e all'amore che ha saputo trasmettermi per il passato in generale.

*Laudato sie, mi' Signore, cum tucte le Tue creature,  
spetialmente messor lo frate Sole,  
lo quale è iorno, et allumini noi per lui.  
Et ellu è bellu e radiante cum grande splendore:  
de Te, Altissimo, porta significatione.*

[S. FRANCESCO, Cantico delle Creature - 1224]

# Indice

<b>Ringraziamenti</b>	II
<b>1 Il Sole: un amico caloroso</b>	<b>1</b>
1.1 Situazione Orbita Terrestre . . . . .	1
1.2 Ore di illuminazione . . . . .	5
1.3 Applicazione II legge di Keplero . . . . .	11
1.4 Altezza del Sole a mezzogiorno . . . . .	16
1.5 Altezza del Sole nella giornata . . . . .	19
1.6 Azimut del Sole nella giornata . . . . .	24
1.7 Equazione del Tempo . . . . .	28
<b>A Altezza del Sole a Mezzogiorno: secondo metodo</b>	<b>36</b>
<b>B Sorgere e tramonto del Sole</b>	<b>38</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>40</b>

# Capitolo 1

## Il Sole: un amico caloroso

### 1.1 Situazione Orbita Terrestre

Il Sole scandisce da sempre la nostra vita sulla Terra, nel suo moto apparente giornaliero ci riscalda, ci illumina e con i suoi passi dà il ritmo usuale alla nostra esistenza, al pari di un metronomo. Il lavoro che segue vuole ripagare la nostra stella più vicina con una sorta di presa di coscienza e di ringraziamento per il dono che elargisce quotidianamente.

Vogliamo ricavare una formula che, noti i valori di latitudine e longitudine del luogo interessato ed il giorno dell'anno (gg/mm), restituisca il numero di ore di illuminazione (dal sorgere al tramonto del Sole).

Consideriamo l'orbita terrestre:

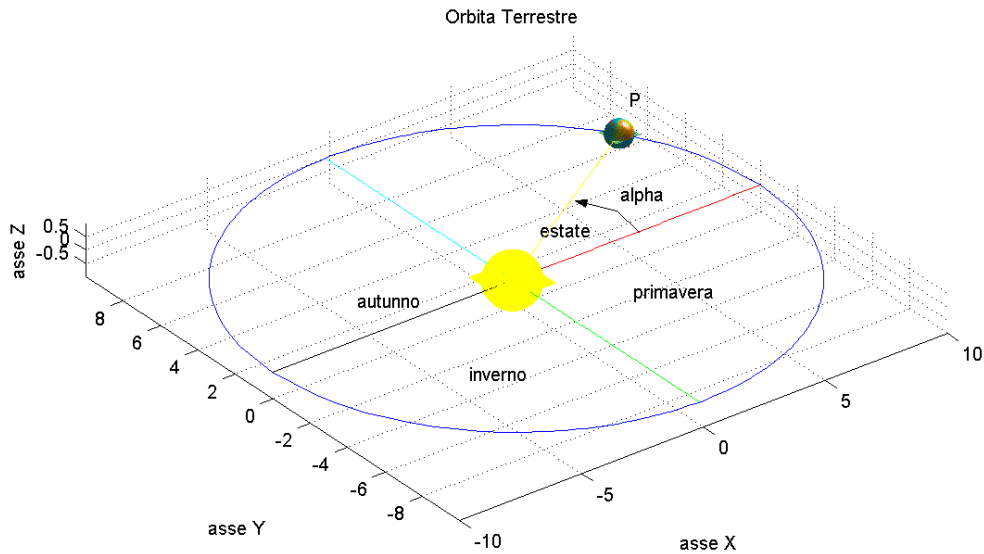


Figura 1.1.

In un qualsiasi giorno dell'anno (es: estivo 25/7) la Terra si trova in un generico punto P dell'orbita (figura 1.1), nell'esempio compreso tra il Solstizio d'Estate (21-6) e l'Equinozio d'Autunno (23-9). Secondo le leggi di Keplero, un pianeta descrive un'orbita ellittica attorno al Sole e questo si trova in uno dei due fuochi (per la Terra il più lontano dal Solstizio Estivo per l'emisfero Boreale il 21-6).

Inoltre un pianeta descrive aree uguali in tempi uguali, cioè si muove più velocemente in prossimità del perielio (quando è più vicino al Sole) rispetto a quando si trova nelle vicinanze dell'afelio (il punto più lontano del pianeta dall'astro). Supponiamo per semplicità che la Terra sia una sfera perfetta (e non un geoide) e che si trovi nel punto P, i raggi del Sole la colpiranno con inclinazione di  $\alpha$  gradi rispetto alla linea dei Solstizi con centro il fuoco dell'ellisse orbitale (occupato dal Sole); guardando dall'alto, facendo una proiezione sul piano xy, osserviamo:

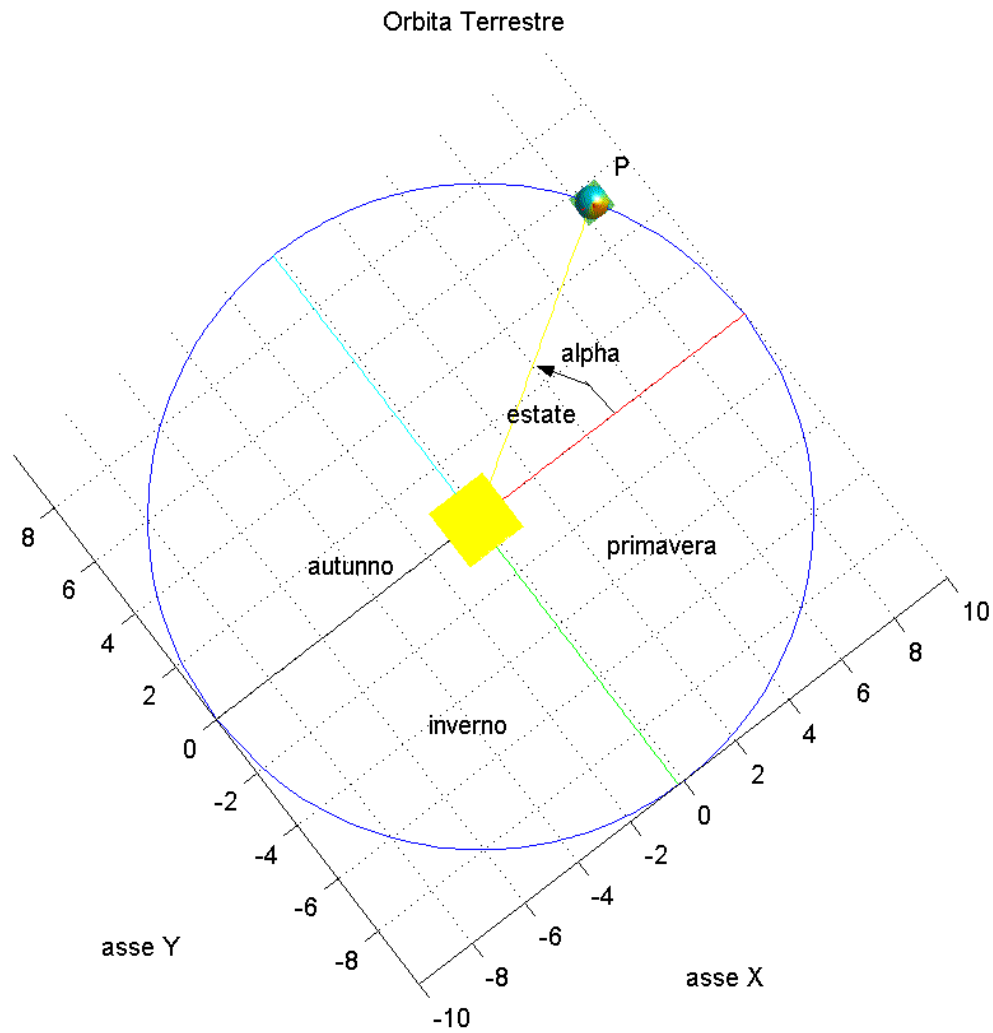


Figura 1.2.

L'orbita è ellittica, tuttavia essendo l'eccentricità molto bassa (0.017) sembra circolare, comunque ingrandendo possiamo osservare il centro dell'ellisse ed il fuoco (centro del Sole: intersezione della linea degli Equinozi con quella dei Solstizi) come punti separati (vedi figura 1.3).

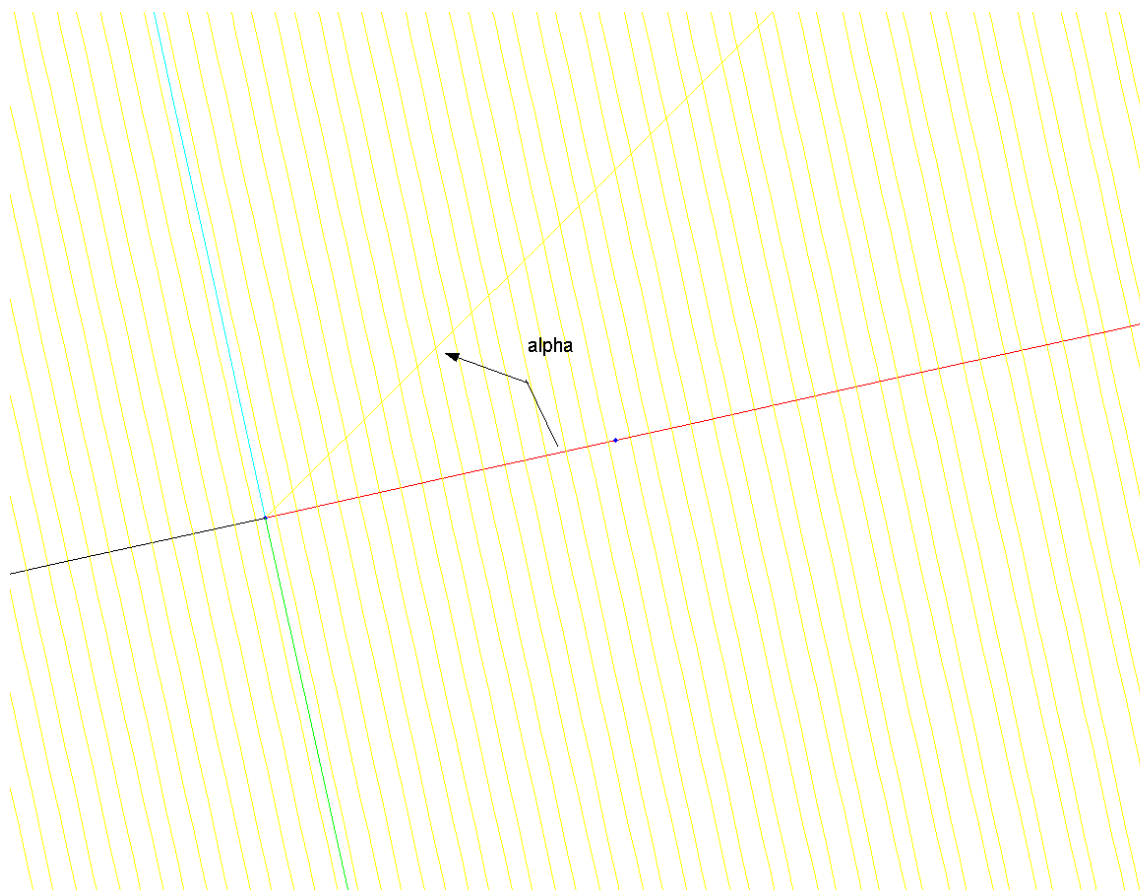


Figura 1.3.

## 1.2 Ore di illuminazione

Nella prima proiezione (quella sul piano xy, fig 1.4.a) la circonferenza che separa la

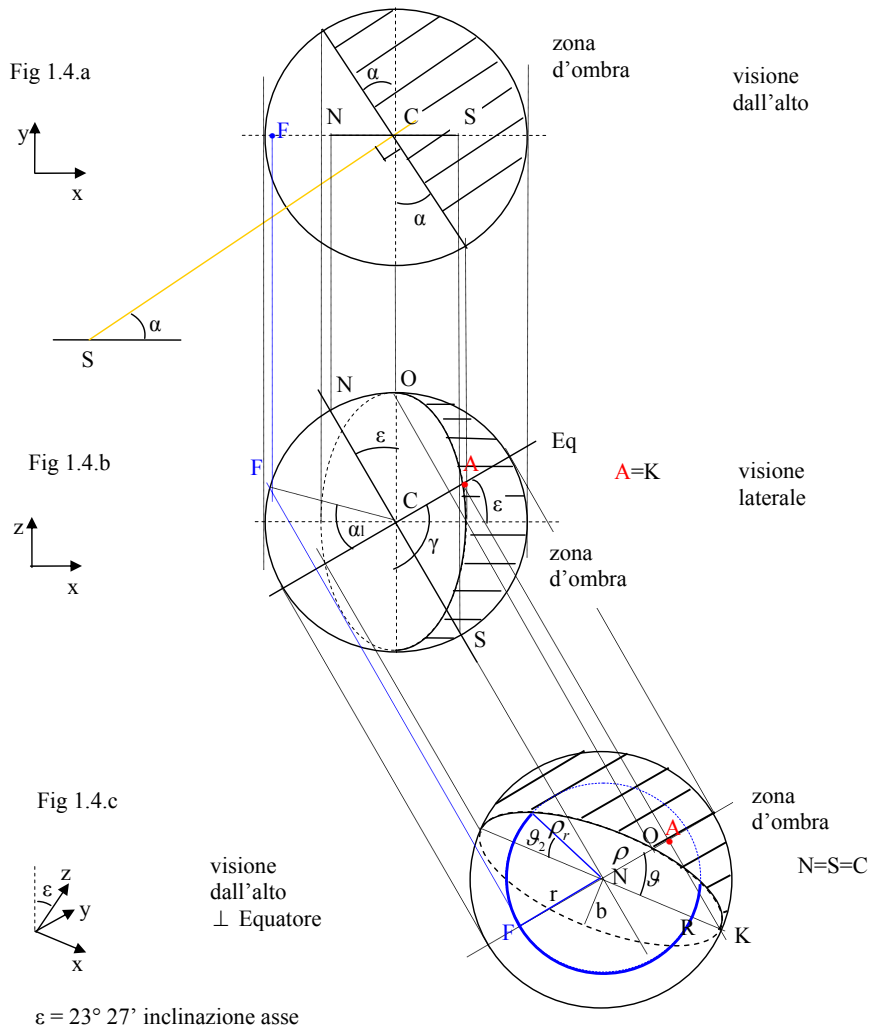


Figura 1.4.

zona in ombra da quella illuminata dal Sole è rappresentata da un segmento (effetto prospettico) perpendicolare alla direzione dei raggi solari. Questa circonferenza, proiettata sul piano xz (fig 1.4.b) diventa un'ellisse di semiasse maggiore  $R$  (raggio della circonferenza) e minore  $R \sin(\alpha)$  (per comodità considereremo il raggio unitario  $R=1$ ) dove  $\alpha$  è l'angolo sotto il quale i raggi del Sole illuminano la Terra nello



specifico giorno considerato.

Ogni punto del Pianeta, in un giorno compie una rotazione di  $360^\circ$  attorno all'asse terrestre (considerata rispetto alle stelle fisse, non rispetto al Sole; si tratta di un'ulteriore approssimazione, in quanto rispetto al Sole tale rotazione va aumentata di una piccola quantità variabile di circa  $1^\circ$ , corrispondente ad una variazione massima nel tempo di circa 4 min, vedi sezione §1.6 **Equazione del Tempo**); in questa rotazione, il punto considerato descrive una circonferenza di raggio  $r$  pari a  $R\cos(\alpha_{lat})$ , dove  $R$  è sempre il raggio (unitario) della Terra e  $\alpha_{lat}$  è l'angolo di latitudine del luogo considerato.

Per ricavare il numero di ore di illuminazione è sufficiente trovare le intersezioni tra la circonferenza descritta dal punto (del luogo considerato, di raggio  $r$ ) e la circonferenza che divide la porzione in ombra da quella in luce della Terra (di raggio  $R$ , che vista in proiezione sul piano  $xz$ , diventa un'ellisse), a questo punto, secondo questo procedimento, basta ricavare i valori dei due angoli esplementari individuati dalle due intersezioni e dal centro delle circonferenze.

Le circonferenze sono sempre concentriche ma non sono mai complanari poiché quella della linea d'ombra giace su un piano perpendicolare al Piano dell'Eclittica, mentre quella tracciata dal punto sulla Terra, giace su un piano parallelo all'Equatore e quindi inclinato di  $23^\circ 27'$  sempre rispetto al piano orbitale.

Noti tali angoli, diventa semplice ricavare le ore di illuminazione (quelle in ombra sono il complemento a 24 ore) con una semplice proporzione: l'angolo considerato sta a  $360^\circ$  come il numero di ore di illuminazione sta a 24 ore (si tratta di un'ulteriore approssimazione: la Terra per ruotare di  $360^\circ$  impiega solo 23 ore 56 min 4 sec).

Vediamo quindi come ricavare le intersezioni tra le due circonferenze:

una possibile soluzione è quella di considerare una nuova proiezione (vedi fig 1.4.c): quella condotta perpendicolarmente al piano dell'Equatore, fissando il punto di osservazione sull'asse polare (polo Nord ad esempio). Secondo questa nuova proiezione, la traiettoria descritta dal punto interessato sulla Terra ha sempre proiezione circolare (con raggio  $r = R\cos(\alpha_{lat})$  come abbiamo già ricavato), mentre la circonferenza che separa la parte illuminata da quella in ombra ha proiezione ellittica in cui il semiasse maggiore è pari ad  $R$  e quello minore  $b$  che si può ricavare nel modo seguente:

con riferimento alla figura 1.4.c della pagina precedente, proiettando l'arco di circonferenza  $\widehat{NO}$  sul piano dell'Equatore abbiamo:

$$\rho = R \cdot \sin\varepsilon$$

che è il raggio vettore dell'ellisse di centro C (ottenuto dalla proiezione della circonferenza luce-ombra), centrato in C e separato dal semiasse maggiore dall'angolo  $\theta$

$$\theta = 90^\circ - C\hat{K}A$$

dove

$$C\hat{K}A = \arcsin\left(\frac{CA}{R}\right)$$

e  $CA$  è il raggio vettore dell'ellisse (ottenuto dalla proiezione laterale sul piano  $xz$  della circonferenza luce-ombra) centrato in  $C$  e sotteso dall'angolo  $\gamma$  pari a  $90^\circ + \epsilon$  rispetto al semiasse maggiore e  $R$  è il raggio della Terra (per convenzione unitario).

Sfruttando la formula della lunghezza generica del raggio vettore (centrato nel centro dell'ellisse, separato da un angolo  $\gamma$  dal semiasse maggiore) di un ellisse (vedi figura 1.4.b):

$$CA^2 = \frac{(R \cdot \sin(\alpha))^2}{1 - e_1 \cos^2(\gamma)}$$

cioè

$$(\text{raggio}_{vett})^2 = \frac{(\text{semiasse}_{min})^2}{1 - e \cdot \cos^2(\text{angolo}_{(da \text{ semiasse } max)})}$$

dove  $e$  = eccentricità dell'ellisse considerato ed  $R = 1$ , inoltre essendo l'ellisse simmetrico rispetto ai semiassi, non è necessario specificare rispetto a quale semiasse maggiore è considerato l'angolo.

Noti quindi  $\theta$  e  $\rho$ , conosciamo raggio vettore e angolo di separazione dell'ultimo ellisse che ci interessa (vedi figura 1.4.c, ovvero proiezione sul piano dell'Equatore della circonferenza luce-ombra). A questo punto possiamo ricavare il semiasse minore ( $b$ , che cercavamo fin dal principio) di quest'ultima ellisse invertendo l'ultima formula scritta, in cui però l'angolo di separazione dal semiasse maggiore vale  $\theta$  gradi.

Noto  $b$ , ci accorgiamo che il raggio  $r$  della circonferenza descritta dal punto  $F$  in un giorno, all'intersezione tra le due circonferenze (di cui una è in proiezione un'ellisse) può essere considerato anche come raggio vettore dell'ellisse (= circonferenza in proiezione). Chiamiamo il raggio  $r$  sotteso dall'angolo  $\theta_2$ , questo angolo rimane la nostra unica e ultima incognita.

Essendo noti il raggio vettore e il semiasse minore  $b$ , possiamo ricavare il valore di  $\theta_2$  semplicemente invertendo l'ultima formula. Ricavato  $\theta_2$  i due angoli luce-ombra saranno:  $(180 + 2\theta_2)^\circ$  per le ore di luce ed il suo angolo esplementare per le ore di ombra (ovviamente in riferimento all'esempio mostrato in figura). La somma o la sottrazione di  $2\theta_2$ , come la distinzione tra angolo in luce e angolo in ombra dipendono dal punto in cui si trova la Terra nell'orbita ellittica.

Trovati gli angoli con una semplice proporzione, ricordando che  $360^\circ$  corrispondono a 24 ore (approssimazione), si possono ricavare le ore di luce e quelle di ombra.

Volendo scrivere tutte le equazioni:

$\alpha$  = inclinazione raggi solari (angolo in gradi)

$\varepsilon = 23^\circ 27'$

$\gamma = 90^\circ + \varepsilon$

( $\varepsilon$  = inclinazione asse terrestre rispetto alla verticale condotta sul Piano dell'Eclittica.)

Ellisse fig 1.4.b:

- semiasse maggiore  $R$
- semiasse minore  $R \sin(\alpha)$
- $CA = \sqrt{\frac{R^2 \cdot \sin^2 \alpha}{1 - e_1^2 \cdot \cos^2 \gamma}}$
- Eccentricità  $e_1 = \cos(\alpha)$

Ellisse fig 1.4.c:

- $NA = CA = \sqrt{\frac{R^2 \cdot \sin^2 \alpha}{1 - e_1^2 \cdot \cos^2 \gamma}}$
- $\theta = 90^\circ - \arcsin\left(\frac{NA}{R}\right)$
- semiasse maggiore  $R$
- semiasse minore  $b = (R \sin(\varepsilon)) \cdot \sqrt{1 - e_2^2 \cdot \cos^2 \theta}$
- $\theta_2 = \arccos\left(\frac{1}{e_2 \cdot R \cos(\alpha_{lat})} \sqrt{R^2 \cos^2(\alpha_{lat}) - b^2}\right)$
- Eccentricità  $e_2 = \frac{\cos(\varepsilon)}{\sqrt{1 - \sin^2(\varepsilon) \cos^2(\theta)}}$

Nell'esempio in figura 1.1, le ore di illuminazione sono quindi:

$$ore_{luce} = \frac{180^\circ + 2\theta_2}{15} =$$

volendo scrivere un'unica equazione:

$$\frac{180^\circ + 2 \arccos \left\{ \frac{1}{\frac{\cos(\varepsilon) \cdot R \cos \alpha_{lat}}{\sqrt{1 - \sin^2(\varepsilon) \cos^2(\theta)}}} \sqrt{R^2 \cos^2 \alpha_{lat} - \left[ R \sin(\varepsilon) \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{\cos(\varepsilon)}{\sqrt{1 - \sin^2(\varepsilon) \cos^2(\theta)}} \right)^2} \cdot \cos^2 \left( 90^\circ - \arcsin \left( \frac{1}{R} \sqrt{\frac{R^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{1 - \cos^2(\alpha) \cdot \cos^2(90^\circ + \varepsilon)}} \right) \right)} \right]^2}{15}$$

dove  $R$  è il raggio della Terra (che per comodità può essere considerato unitario) e  $\varepsilon$  l'inclinazione dell'asse terrestre rispetto alla normale all'Eclittica, inoltre data la dimensione della formula  $\theta = 90^\circ - \arcsin \left( \frac{\sqrt{\frac{R^2 \cdot \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2(\alpha) \cdot \cos^2(90^\circ + \varepsilon)}}}{R} \right)$ .

Località considerata: Foglizzo Canavese (Torino)

gradi di latitudine Nord : 45

primi di latitudine Nord : 16

Tempo di Illuminazione solare ( = dal sorgere al tramonto del Sole)

ore = 14 min = 49

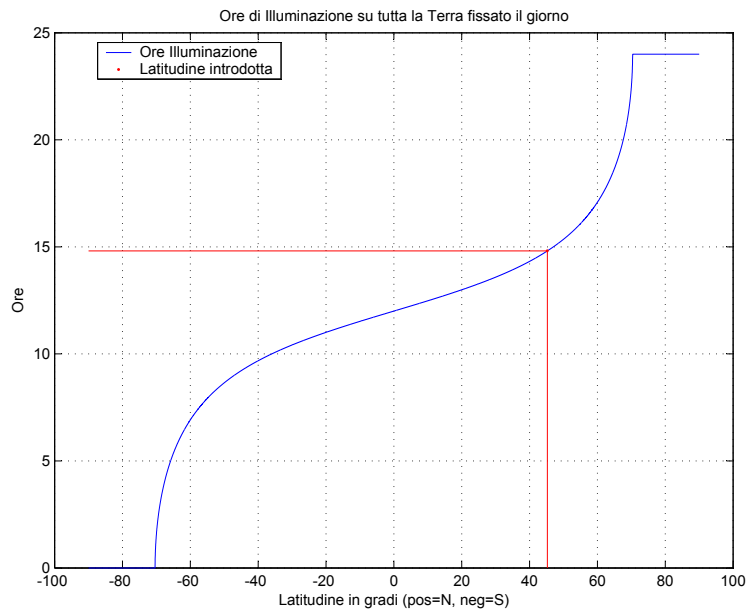


Figura 1.5.

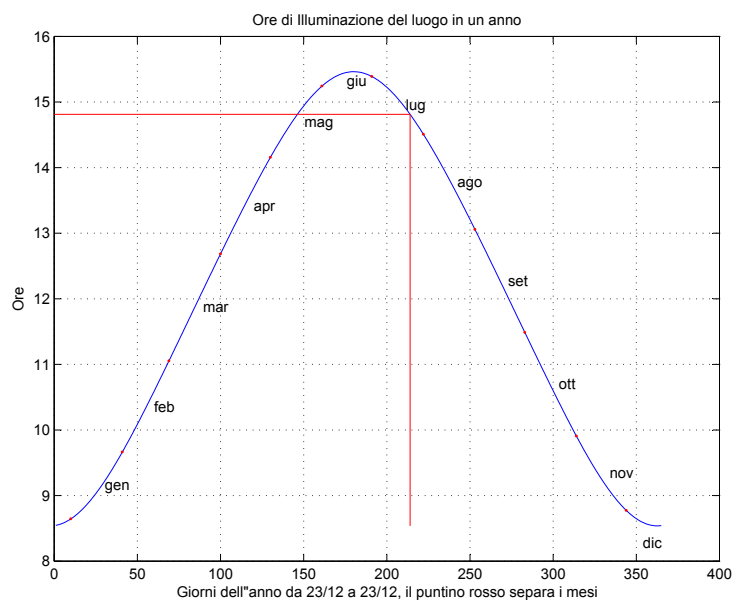


Figura 1.6.

### 1.3 Applicazione II legge di Keplero

Si può legare il valore dell'angolo  $\alpha$  (sotto cui il Sole illumina la Terra in riferimento al semiasse maggiore estivo: quello rosso di figura 1.2) con il giorno dell'anno considerando la **II legge di Keplero**: aree (dei settori ellittici coperte dai raggi vettori) uguali in tempi uguali.

Quindi se per tempi uguali ci riferiamo ai singoli giorni, ogni 24 ore (= giorno solare medio) il raggio vettore che collega il centro del Sole (ricordiamo che è posizionato in un fuoco) con il centro della Terra individua settori ellittici di superficie equivalente. Ogni giorno la Terra copre quindi una superficie pari all'area totale dell'ellisse diviso 365,2422 (giorni di durata dell'anno Tropico: tempo impiegato dalla Terra per passare due volte dal punto Vernale –Equinozio di Primavera–).

In questo modello non esiste il 29 febbraio, non ci interessa recuperare la frazione di giorno 0,2422 in quanto analizziamo un singolo anno.

Possiamo calcolare l'area dell'orbita ellittica terrestre:

$$A = ab\pi$$

dove  $a$  il semiasse maggiore,  $b$  quello minore dell'ellisse. In realtà è molto più comodo riferirci all'eccentricità  $e$  (nel nostro caso  $e = 0,017$ )

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

dove  $c$  l'ascissa del fuoco, quindi

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

dunque possiamo scrivere

$$A = \pi \cdot a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

In questo modo, nota l'eccentricità, l'area dell'ellisse dipende solo dal suo semiasse maggiore, che per comodità può esser posto alla dimensione che si preferisce pur mantenendo la congruenza con quello dell'orbita a cui ci si riferisce (individuato dal particolare valore di  $e$ ). Nei nostri esempi grafici  $a = 10$ .

La situazione di figura 1.1 può essere così rappresentata

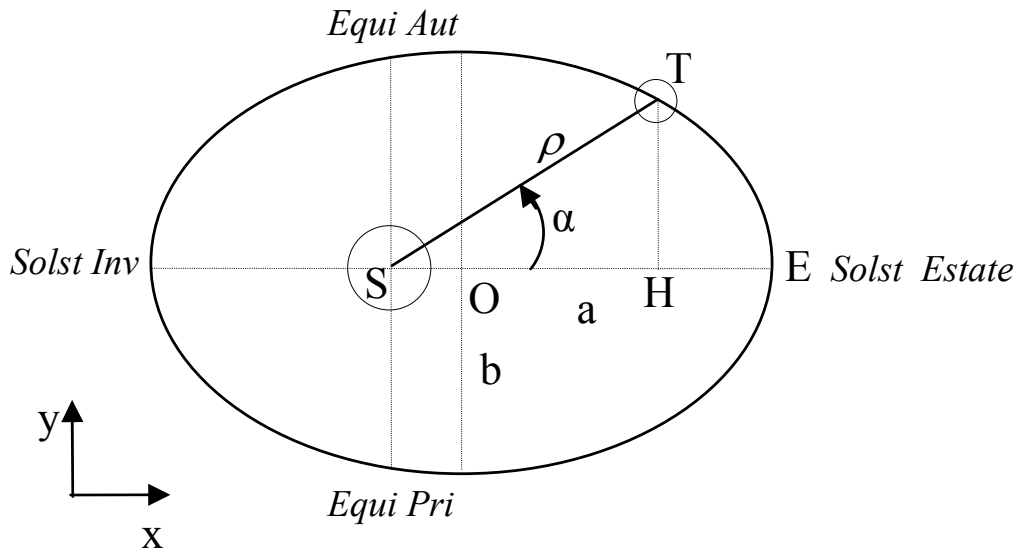


Figura 1.7.

Con riferimento alla figura 1.7 possiamo scrivere

$$\rho = TS = \frac{b^2}{a(1 + e \cdot \cos(\pi - \alpha))}$$

$$OH = SH - SO = \rho \cos(\alpha) - ea$$

$$AREA_{TSE} = AREA_{TSH} + AREA_{THE}$$

$$AREA_{TSH} = \frac{1}{2} \rho^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$AREA_{THE} = \int_H^E f_{ellisse}(x) dx$$

$$f_{ellisse}(x) : y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned} AREA_{THE} &= +\frac{b}{a} \int_H^E \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \left\{ \left[ \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right]_H^E \right\} = \\ &= \frac{b}{a} \left\{ \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \left[ \frac{H\sqrt{a^2 - H^2}}{2} + \frac{H^2}{2} \arcsin\left(\frac{H}{a}\right) \right] \right\} \end{aligned}$$

ricordando

$$\begin{aligned} E &= OE = a \\ H &= OH = \rho \cos(\alpha) - ea \end{aligned}$$

quindi

$$AREA_{TSE} = \frac{1}{2} \rho^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) + \frac{b}{a} \left\{ \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \left[ \frac{H\sqrt{a^2 - H^2}}{2} + \frac{H^2}{2} \arcsin\left(\frac{H}{a}\right) \right] \right\}$$

Questa ultima formula è valida solo per il periodo estivo (in riferimento all'esempio di figura 1.2 e 1.7): noto il valore di  $\alpha$  (compreso tra  $0^\circ$  e  $90^\circ$ ), restituisce il valore dell'area del settore ellittico coperto dal raggio vettore. Noi volevamo invece il contrario: considerati i giorni dal Solstizio Estivo e moltiplicati per l'area giornaliera (costante) ricavare l'angolo  $\alpha$  che sottendeva il settore ellittico equivalente.

Basterebbe scrivere l'ultima equazione in maniera inversa ed esplicitare  $\alpha$ , ma ciò risulta complesso (forse impossibile a partire dalla formulazione dell'ultima equazione).

Un metodo, per nulla elegante, di ricavare il valore di tale angolo, noto il valore di  $AREA_{TSE}$ , è quello di utilizzare un programma che calcoli il valore di  $AREA_{TSE}$  più prossimo a quello reale facendo variare  $\alpha$  con un ciclo di passo legato all'errore che si è disposti ad accettare tra il valore vero dell'area del settore (corrispondente al vero  $\alpha$ ) e quello approssimato (ottenuto con valori di  $\alpha$  crescenti che rappresenterà il valore  $\alpha$  trovato).

In maniera analoga si possono ricavare formule per le altre stagioni, corrispondenti ad intervalli di valori di  $\alpha$  differenti, valori ricavabili sempre con il 'metodo di forza'.



In questo modo abbiamo legato (con la forza) la data introdotta e l'angolo  $\alpha$  (che separa il raggio vettore corrispondente dal semiasse di riferimento: quello del Solstizio Estivo) considerando la II legge di Keplero.

Possiamo valutare l'evoluzione dello spostamento giornaliero in gradi della Terra nell'Eclittica, osserviamo che i valori massimi si hanno in prossimità del perielio (Solstizio d'Inverno). I valori sono stati ottenuti con il metodo appena descritto, dove  $\alpha$  è stato fatto variare con passo di 1 secondo ( $0,00027^\circ$ ), l'andamento semestrale 21-6—23-12 è monotono crescente, quello 23-12—21-6 monotono decrescente.

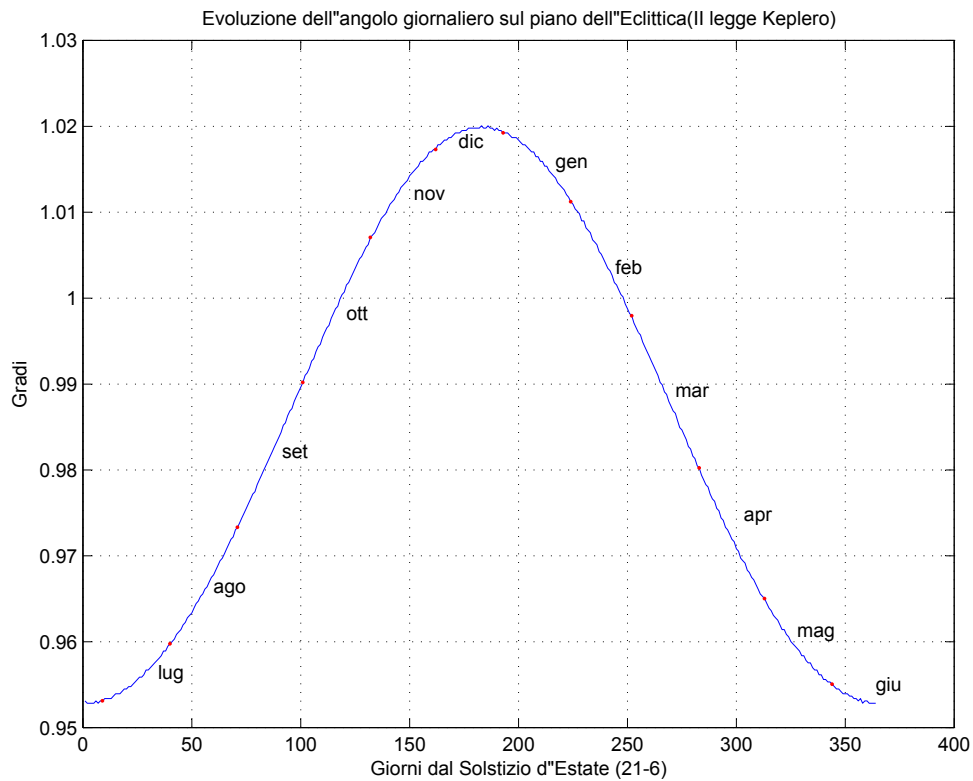


Figura 1.8.

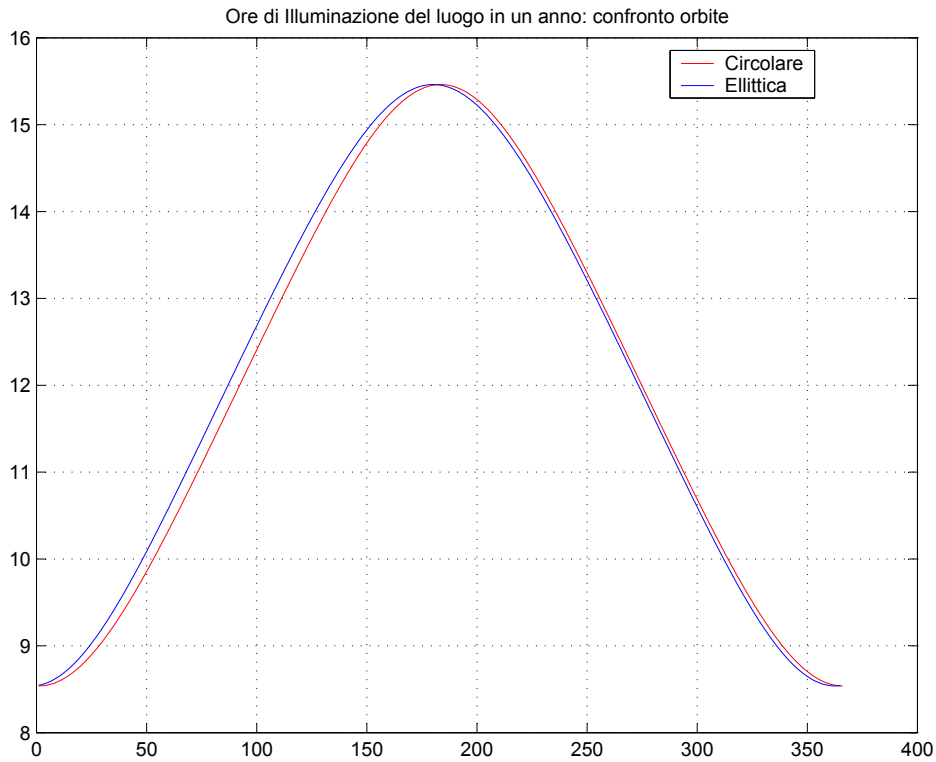


Figura 1.9.

Ecco (figura 1.9) come varia l'evoluzione delle ore di illuminazione del luogo (sempre Foggizzo Canavese (To)) in un anno a seconda che si consideri l'orbita circolare od ellittica, la differenza soltanto lieve è dovuta alla piccola eccentricità dell'orbita (0,017).

## 1.4 Altezza del Sole a mezzogiorno

Volendo inoltre ricavare l'*altezza del Sole sull'orizzonte a mezzogiorno* (ovviamente per la data e la latitudine considerate), si può operare nel modo seguente:

con riferimento alla figura 1.10 ed alla situazione di figura 1.1 (ovvero un giorno d'estate):

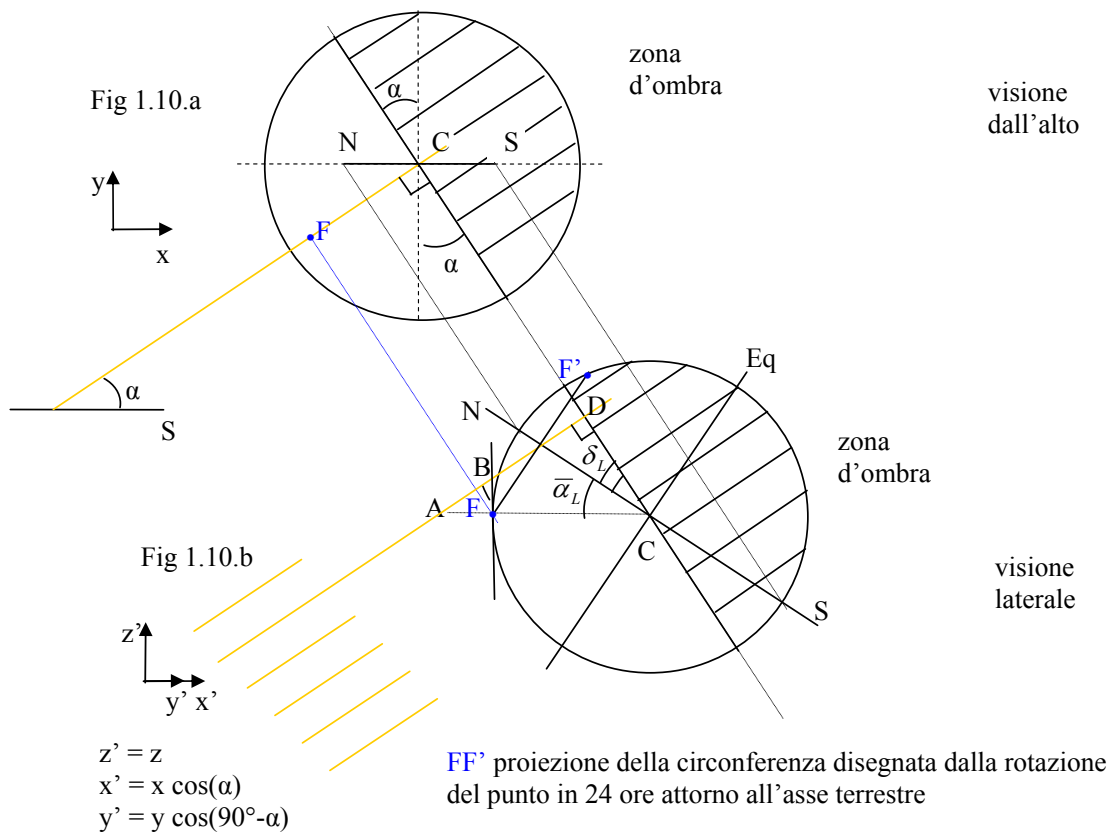


Figura 1.10.

Incominciamo a considerare la posizione del punto, di latitudine introdotta, a mezzogiorno; la proiezione più utile è quella riportata in figura 1.10.b (in modo che il punto di trovi esattamente sulla circonferenza che è la proiezione della Terra). Per angolo di inclinazione sull'orizzonte ci riferiamo a quello individuato dei raggi solari e dal piano tangente al punto F, che con riferimento alla figura 1.10.b chiamiamo  $\hat{A}BF$ .

I triangoli  $ABF$  e  $ADC$  sono simili in quanto entrambi retti per costruzione ed aventi l'angolo  $\hat{A}$  in comune.

Si ricava facilmente che l'angolo  $\hat{ABF}$  è congruente a  $\bar{\alpha}_L + \delta_L$  dove:

- $\bar{\alpha}_L$  è l'angolo complementare della latitudine introdotta del luogo considerato.
- $\delta_L$  è l'angolo che separa il polo Nord dalla circonferenza luce ombra e con riferimento alla figura 1.4.c possiamo calcolarlo poiché  $b$  (semiasse minore dell'ellisse ottenuto dalla proiezione della circonferenza luce ombra sempre per la figura 1.4.c) ne rappresenta il seno, quindi  $\delta_L = \arcsin(\frac{b}{R})$  dove  $R$  è il raggio terrestre.

Inoltre essendo  $b$  legato ad  $\alpha$  (angolo sotto cui i raggi solari illuminano la Terra nel particolare giorno introdotto), anche l'angolo di incidenza dei raggi del Sole a mezzogiorno  $\hat{ABF}$  è legato alla posizione della Terra nell'orbita celeste (ovvero nel periodo dell'anno considerato).

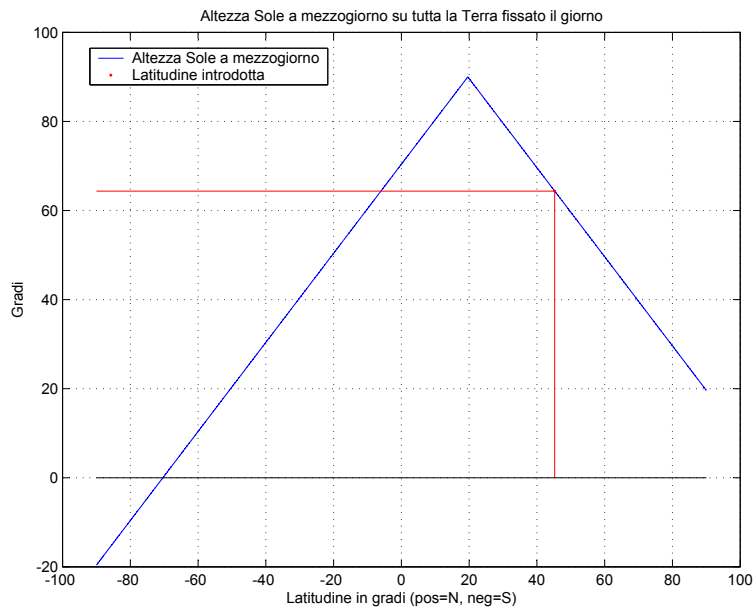


Figura 1.11.

(sempre riferito a Foglizzo Canavese lat  $45^{\circ} 16'$  N, giorno 25/7)

Altezza del Sole a mezzogiorno in gradi

gradi = 64 primi = 21

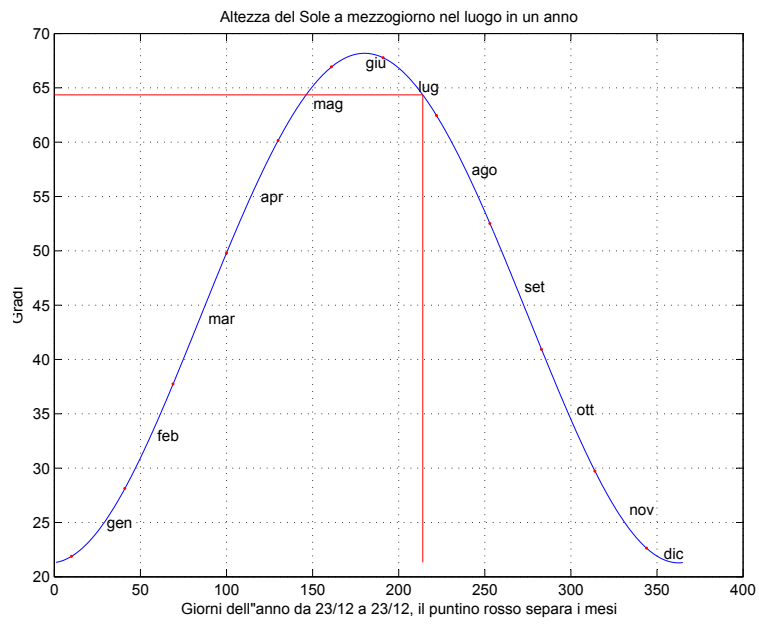


Figura 1.12.

## 1.5 Altezza del Sole nella giornata

Possiamo chiederci come varia l'*altezza del Sole sull'orizzonte nell'arco della giornata* (data introdotta) alla latitudine considerata. Con riferimento alla figura 1.4.c e cambiando il sistema di riferimento consideriamo fissa la Terra ed il Sole le ruoti intorno (moto apparente). Vedi Sfera Celeste fig. 1.13

- L'arco di circonferenza descritta dall'astro giace su un piano inclinato rispetto a quello dell'orizzonte di un angolo pari all'angolo complementare della latitudine del luogo considerato  $\bar{\alpha}_{lat}$ .
- Il centro di questa circonferenza si trova su una retta inclinata rispetto alla verticale (Z = Zenit) di un angolo pari ad  $\bar{\alpha}_{lat}$  e si sposta su questa durante l'anno.
- Durante l'anno il Sole descrive archi giornalieri di ampiezza variabile compresi tra quello estivo e quello invernale.

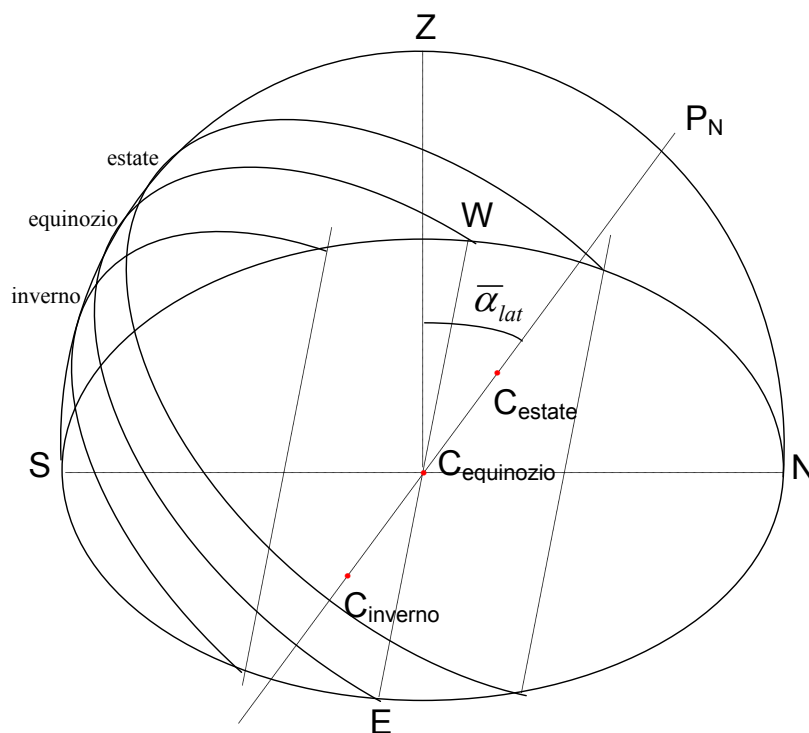


Figura 1.13.

dove:

- $C_{estate}, C_{equinozio}, C_{inverno}$  sono i centri delle circonferenze descritte dal Sole (moto apparente)
- $Z$  è lo zenit, ovvero la verticale condotta dal punto di osservazione
- $P_N$  indica la direzione del polo Nord, è quindi separato dallo zenit dall'angolo  $\bar{\alpha}_{lat}$

Considerando per semplicità il periodo Primavera-Estate, con riferimento alla figura 1.14, in un generico istante della giornata il Sole si troverà nel punto P ad un'altezza di  $\delta$  gradi sull'orizzonte. La nostra incognita è proprio  $\delta$ :

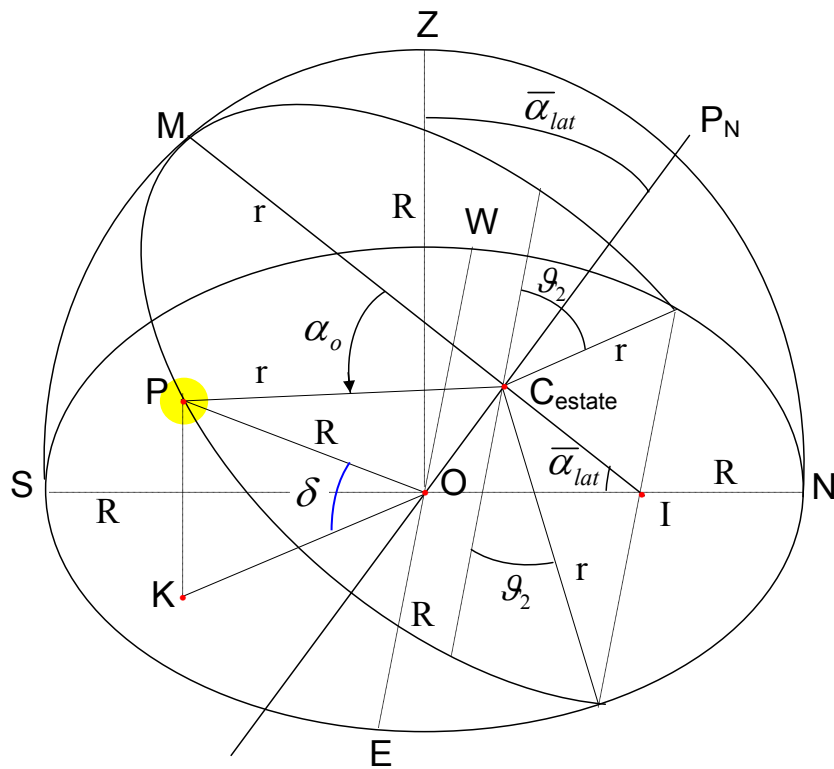


Figura 1.14.

- L'angolo descritto dalla rotazione (apparente) del Sole è quindi pari all'angolo di illuminazione (in figura 1.4.c  $= 180^\circ + 2\theta_2$  vedi anche fig. 1.14)

- La retta di intersezione dei piani e la distanza  $OC_{estate}$  sono funzione dell'angolo di illuminazione: il sorgere ed il tramonto del Sole sono specifici di ogni singolo giorno e devono giacere sull'intersezione di tali piani
- $\alpha_o$  è angolo che lega il Sole con l'ora del giorno, il riferimento è il mezzodì
- $C_{estate}M = r =$  raggio della circonferenza descritta dal Sole, varia durante l'anno di giorno in giorno

$$O\hat{P}C_{estate} = arctg\left(\frac{OC_{estate}}{r}\right)$$

$$OC_{estate} = r \cdot \sin(\theta_2) \cdot tg(\bar{\alpha}_{lat})$$

$$O\hat{P}C_{estate} = arctg[\sin(\theta_2) \cdot tg(\bar{\alpha}_{lat})]$$

$$\frac{R}{\sin(\pi/2)} = \frac{r}{\sin(\pi/2 - O\hat{P}C_{estate})} = \frac{r}{\cos(O\hat{P}C_{estate})}$$

$$r = R \cdot \cos\{arctg[\sin(\theta_2) \cdot tg(\bar{\alpha}_{lat})]\}$$

quindi possiamo esprimere  $OC_{estate}$  come

$$OC_{estate} = R \cdot \sin(O\hat{P}C_{estate}) = R \cdot \sin\{arctg[\sin(\theta_2) \cdot tg(\bar{\alpha}_{lat})]\}$$

E dalla proiezione laterale otteniamo (fig. 1.15):



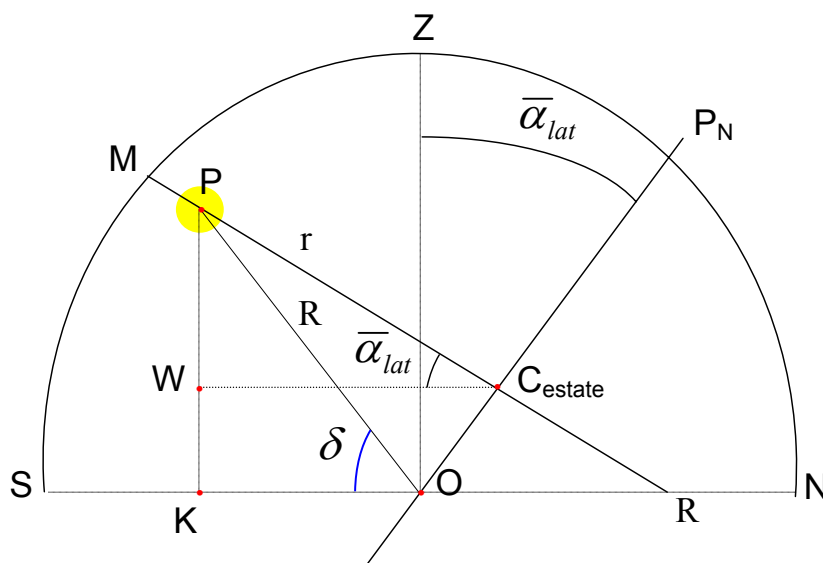


Figura 1.15.

- l'angolo  $\delta = P\hat{O}K$  è la nostra incognita
- in particolare

$$PK = PW + WK$$

$$PW = r \cdot \cos(\alpha_o) \cdot \sin(\bar{\alpha}_{lat})$$

$$WK = OC_{estate} \cdot \cos(\bar{\alpha}_{lat})$$

- quindi l'angolo

$$P\hat{O}K = \arcsin \left\{ \frac{PK}{R} \right\}$$

$$\delta = P\hat{O}K$$

$$\delta = \arcsin \{ \cos[\arctg(\sin(\theta_2)tg(\bar{\alpha}_{lat}))]\cos(\alpha_o)\sin(\bar{\alpha}_{lat}) + \sin[\arctg(\sin(\theta_2)tg(\bar{\alpha}_{lat}))]\cos(\bar{\alpha}_{lat}) \}$$

Con questa formula, facendo variare l'angolo  $\alpha_o$  (ricordandosi che ogni  $15^\circ$  abbiamo una variazione di un'ora) otteniamo l'evoluzione dell'altezza in gradi del Sole in funzione dell'ora del giorno considerata. Il sorgere ed il tramonto del Sole corrispondono all'intersezione di tale curva con la linea di orizzonte (retta a zero gradi).

In riferimento al caso di figura 1.1 (giorno d'estate), per questa valutazione modellizzato con le figure 1.13,1.14,1.15 da cui abbiamo ricavato la formula per  $P\hat{O}K$ ,

bisogna ricordare che questo modello e questa formula sono validi solamente per giorni primaverili ed estivi. Per il caso autunno-inverno il centro della circonferenza descritta dal Sole ( $C_{inverno}$ ) si trova sotto il piano (circonferenza) di orizzonte, varierà quindi il calcolo di  $P\hat{O}K$  (semplicemente basta scambiare nell'ultima equazione il segno '+' con un segno '-' nell'argomento della funzione  $\arcsin()$ ). Infine ricordiamo ancora che tale centro giacerà sulla retta di intersezione delle due circonferenze solo in occasione degli equinozi.

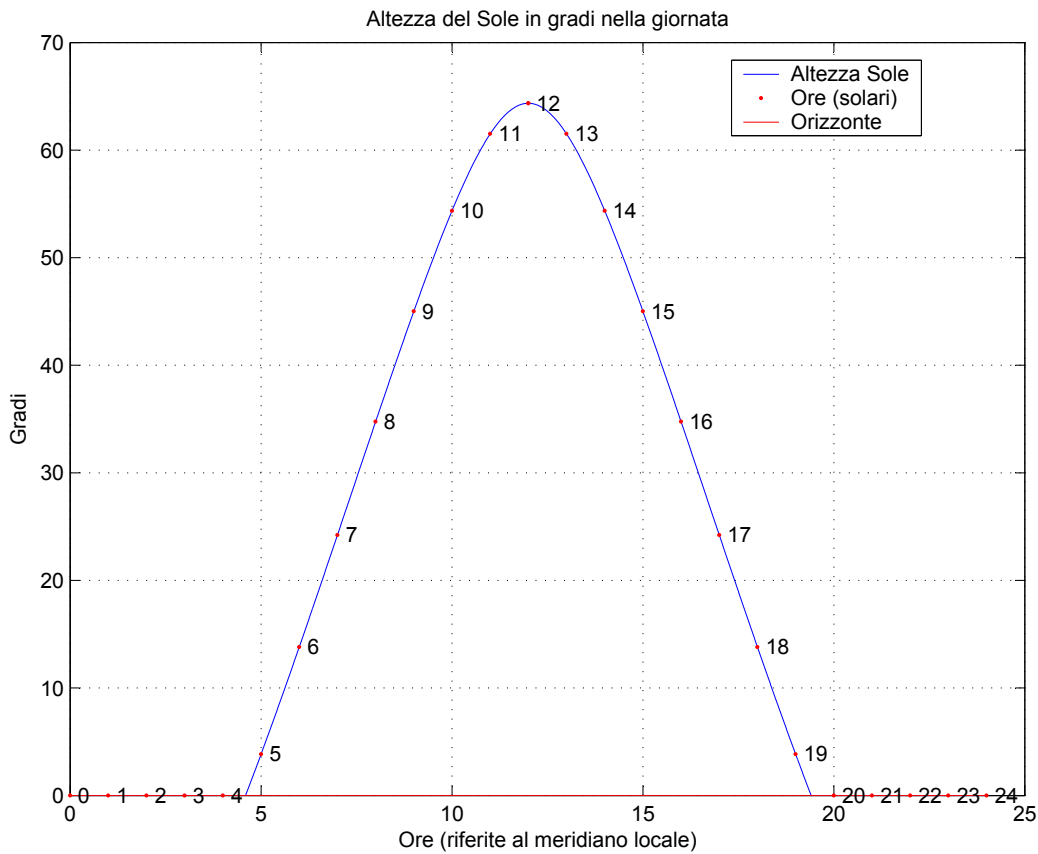


Figura 1.16.

(sempre riferito a Foglizzo Canavese Lat.  $45^{\circ}16'$  N, giorno 25/7)

## 1.6 Azimut del Sole nella giornata

Per individuare un astro nella Sfera Celeste sono necessarie due coordinate per convenzione espresse in gradi rispetto all'orizzonte locale:

- *Altezza*
- *Azimut*

L'*altezza* è stata considerata nel precedente capitolo, ora ci occupiamo di definire e ricavare l'*azimut*. Con riferimento alla figura 1.17

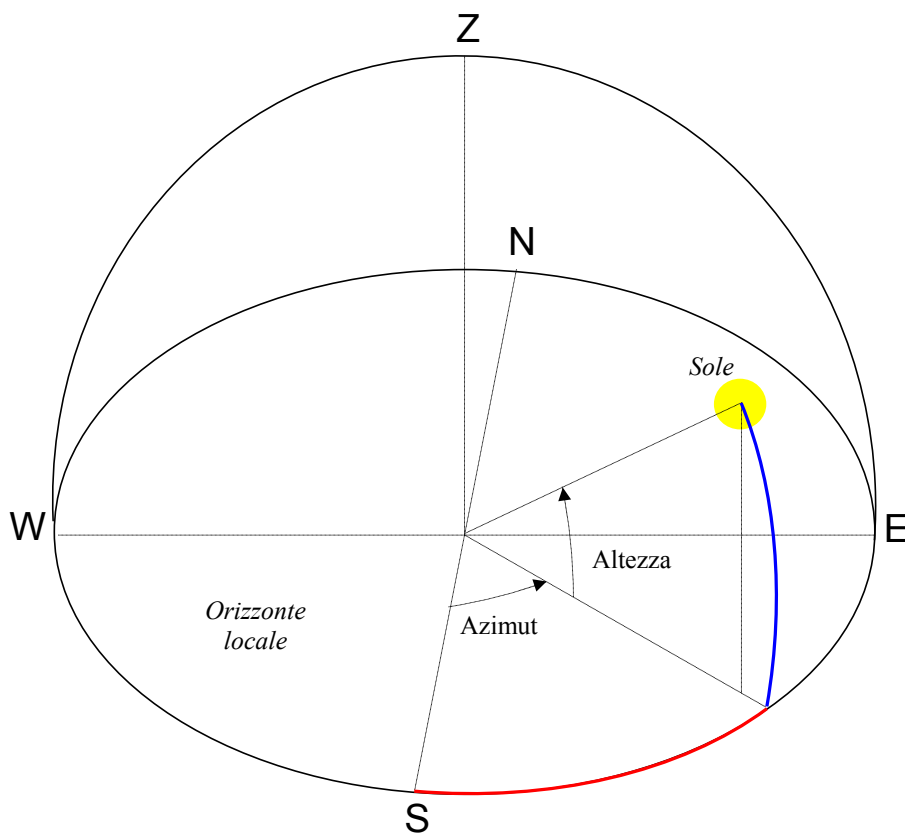


Figura 1.17.

notiamo che per *azimut* si intende l'angolo che separa il punto cardinale Sud dal piede della verticale condotta dall'astro (il Sole in questo caso). Per convenzione questo angolo si misura (crescente) a partire dal Sud, muovendosi verso Est, Nord, Ovest; quindi nell'esempio in figura, un'ora del mattino, tale angolo assume un valore negativo in quanto misurato nel senso opposto alla convenzione.

Consideriamo un modello ed un metodo per ricavare l'*azimut* istante per istante nell'arco della giornata. Nell'esempio (25 / 7) la giornata è estiva (o primaverile) e l'ora è mattutina, quindi separata dal riferimento del mezzogiorno di un angolo  $\alpha_o$ .

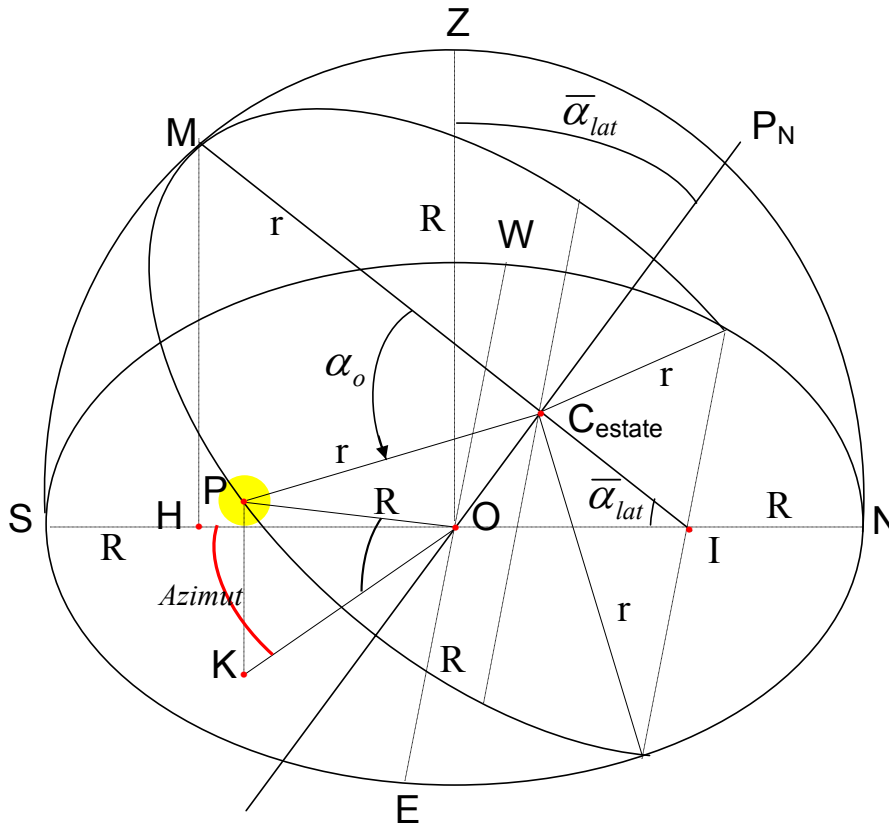


Figura 1.18.

la nostra incognita è l'angolo  $H\hat{O}K$ .

Individuiamo il segmento che unisce H e K e conduciamo una proiezione perpendicolare a tale segmento, otteniamo fig. 1.19, dove:

- $R$  è il raggio della Sfera Celeste
- $r$  il raggio  $CP$  variabile di giorno in giorno e definito in §1.5
- $h_P^o$  l'altezza del Sole all'ora generica del punto P
- $h_M^o$  l'altezza del Sole a mezzogiorno

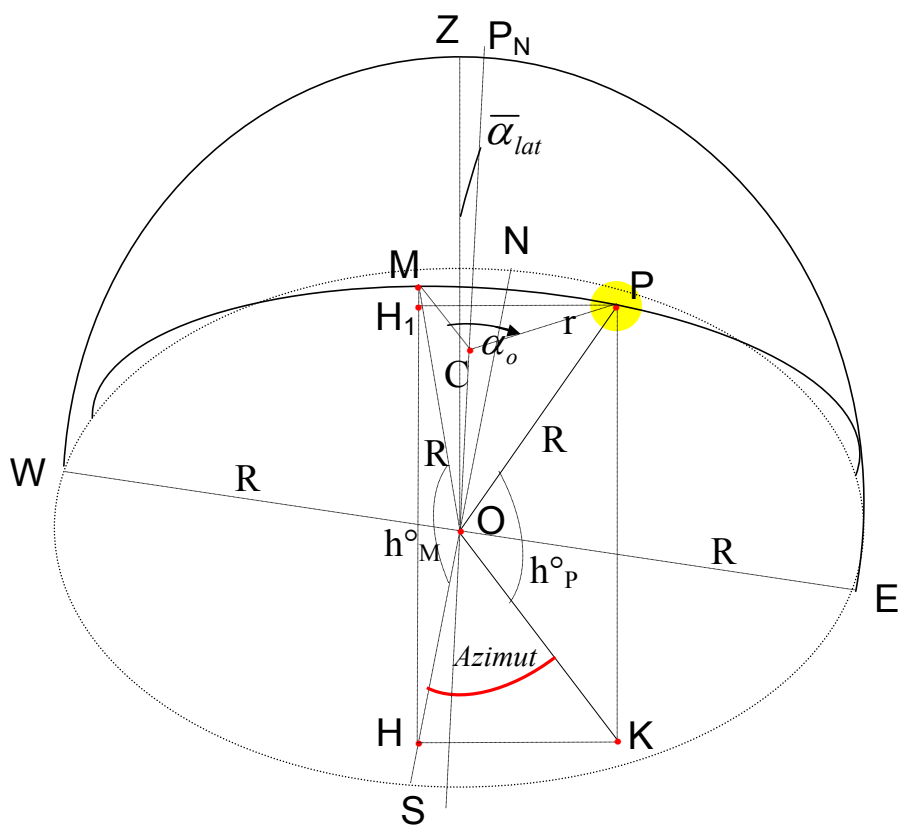


Figura 1.19.

$$MH = R \cdot \sin(h_M^o)$$

$$HO = R \cdot \cos(h_M^o)$$

$$PK = R \cdot \sin(h_P^o)$$

teorema di Carnot sul triangolo MCP

$$MP = r^2 \cdot \sqrt{r(1 - \cos \alpha_o)}$$

$$MH_1 = MH - PK$$

$$HK = \sqrt{MP^2 - MH_1^2}$$

$$KO = \sqrt{R^2 - PK^2}$$

semiperimetro di HKO

$$p = (HO + HK + KO)/2$$

teorema di Erone, Area del triangolo HKO

$$A = \sqrt{p \cdot (p - HO)(p - HK)(p - KO)}$$

$$Azimut = H\hat{O}K = a \sin \left( \frac{2A}{HO \cdot KO} \right)$$

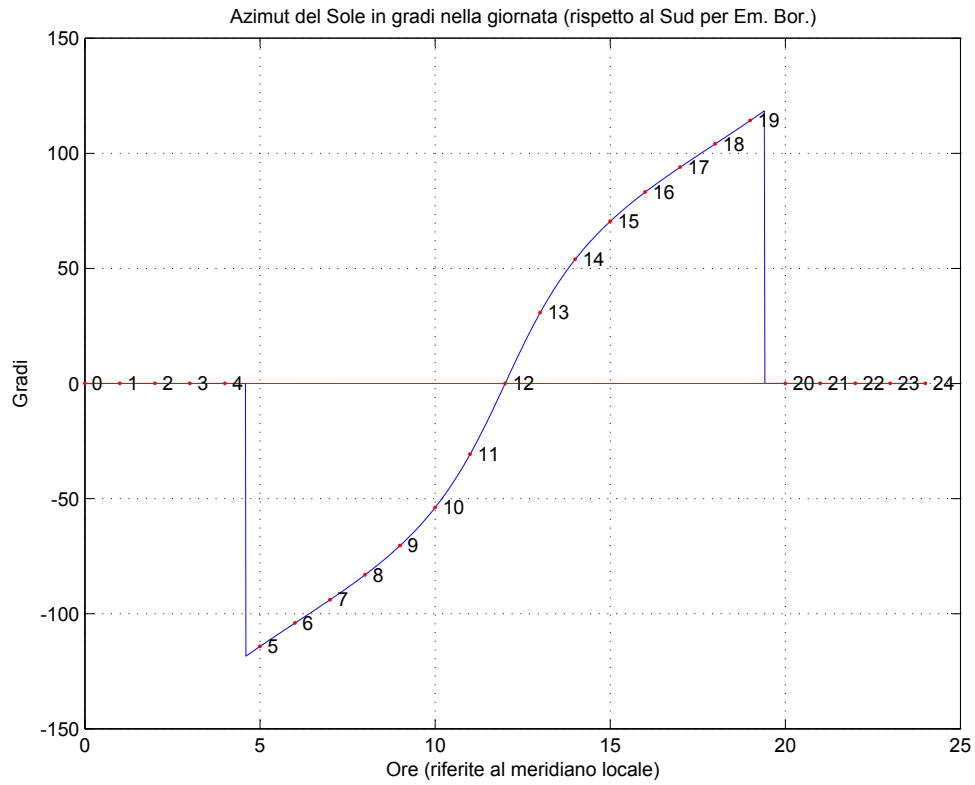


Figura 1.20.

Questo è l'andamento dell'angolo di *azimut* nell'arco della giornata del 25 / 7 a Foglizzo lat. 45°16' N long. 7°49' E

## 1.7 Equazione del Tempo

Ci siamo spesso riferiti al mezzogiorno locale, relativo al meridiano del luogo; ma qual è la differenza che intercorre tra le ore considerate in questi calcoli e quelle che segnano le lancette dei nostri orologi? Per rispondere a questa domanda dobbiamo fare riferimento all'**Equazione del Tempo** ed al procedimento per ricavarla. Per giorno solare intendiamo il lasso temporale che intercorre tra due passaggi successivi del Sole sopra uno stesso meridiano (magari del luogo considerato), il suo valore medio nell'arco dell'anno è di 24 ore. Come possiamo osservare in figura 1.21: la

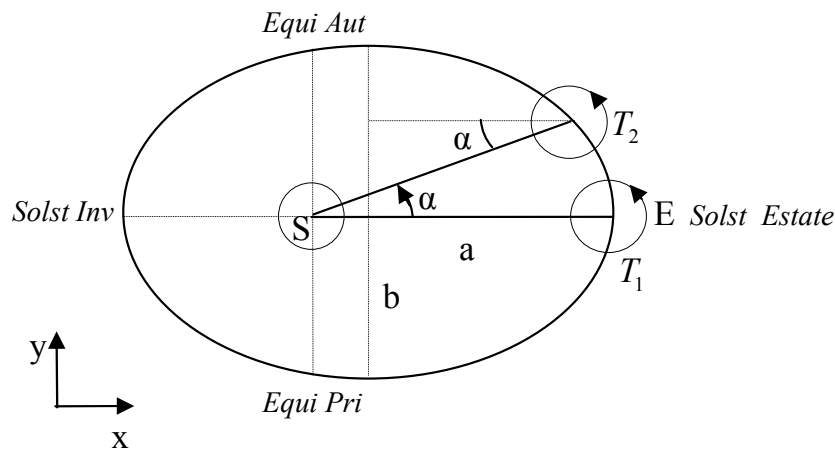


Figura 1.21.

Terra nel suo moto di rivoluzione intorno al Sole copre ogni giorno un angolo  $\alpha$  (nella figura molto più ampio di quello reale pari mediamente a poco meno di  $1^\circ$ ) nel piano dell'Eclittica ed un moto di rotazione intorno al proprio asse di un angolo superiore a  $360^\circ$ . Dalla figura 1.21 si evince che questo angolo vale  $360^\circ + \alpha$ , l'angolo  $\alpha$  possiamo chiamarlo angolo di sovrarotazione.

Siccome la Terra nel suo moto di rivoluzione copre ogni giorno angoli  $\alpha$  diversi (in accordo con la II legge di Keplero, vedi figura 1.8), ne consegue che i gradi di rotazione complessivi giornalieri (giorni solari) siano differenti al variare del giorno considerato. La rotazione della Terra di  $360^\circ$  avviene in 23 ore 56 min 4 sec, i 3 min 56 sec che mancano alle 24 ore rappresentano il tempo aggiuntivo impiegato per ruotare dell'angolo di sovrarotazione media.

Tuttavia la realtà è ancora più complessa (vedi figura 1.22): l'angolo di sovrarotazione  $\alpha$  è considerato sul piano dell'Eclittica (piano xy), ma la Terra ruota su un

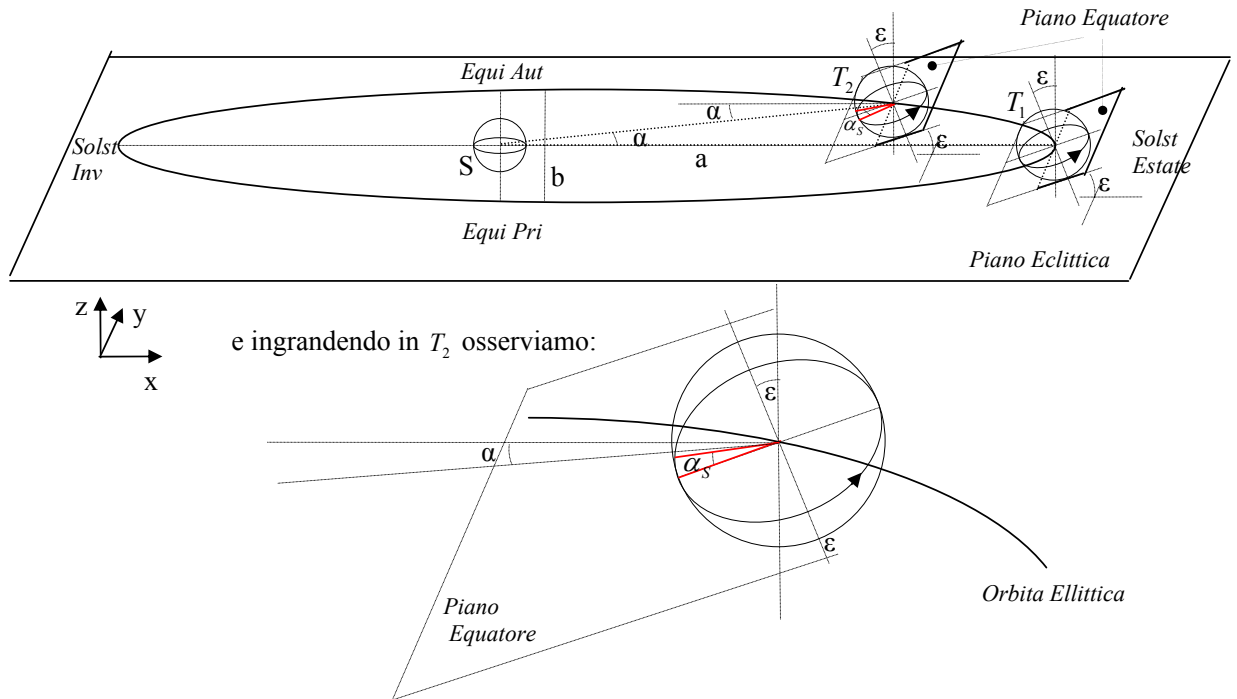


Figura 1.22.

piano differente (piano Equatoriale), un piano normale all'asse di rotazione, inclinato quindi di  $23^{\circ}27'$  rispetto al piano dell'orbita terrestre. Bisogna quindi proiettare l'angolo  $\alpha$  sul piano Equatoriale e su questo piano misurarne (calcolarlo) per ottenere l'angolo di sovrarotazione  $\alpha_s$  realmente coperto dalla Terra per osservare il Sole di nuovo sotto lo stesso meridiano.

E' bene precisare che il piano Equatoriale non ruota su se stesso e non cambia inclinazione durante l'anno (si tratta ovviamente di un'approssimazione, in quanto l'asse di rotazione è soggetto ad un moto millenario della durata media di 40000 anni nei quali passa da un minimo di  $21^{\circ}55'$  ad un massimo di  $24^{\circ}20'$  di inclinazione rispetto al piano dell'Eclittica ).

Il tempo impiegato dalla Terra per coprire questo angolo di sovrarotazione varia (al variare del periodo dell'anno considerato) circa dai 3 min 36 sec ai 4 min 26 sec (vedi figure 1.23, 1.24, 1.25), siccome l'angolo medio di sovrarotazione richiedeva un tempo di copertura di 3 min 56 sec, possiamo osservare che uno specifico giorno solare ha una durata compresa tra 24 ore 30 sec e 23 ore 59 min 40 sec circa, quindi nei nostri calcoli delle ore di illuminazione giornaliera abbiamo introdotto un'approssimazione per difetto: considerando rotazioni di  $360^{\circ}$  rispetto alle stelle



fisse, non abbiamo tenuto conto dell'angolo di sovrarotazione  $\alpha_S$  (e quindi del tempo che la Terra impiega per coprirlo ) per riallinearci con il Sole e osservarlo sotto lo stesso meridiano.

Ovviamente le ore di illuminazione variano di una frazione di tempo pari al rapporto tra  $\alpha_S$  e l'angolo di illuminazione giornaliera per la latitudine considerata (con riferimento alla figura 1.4.c,  $(180 + 2\theta_2)^\circ$ ).

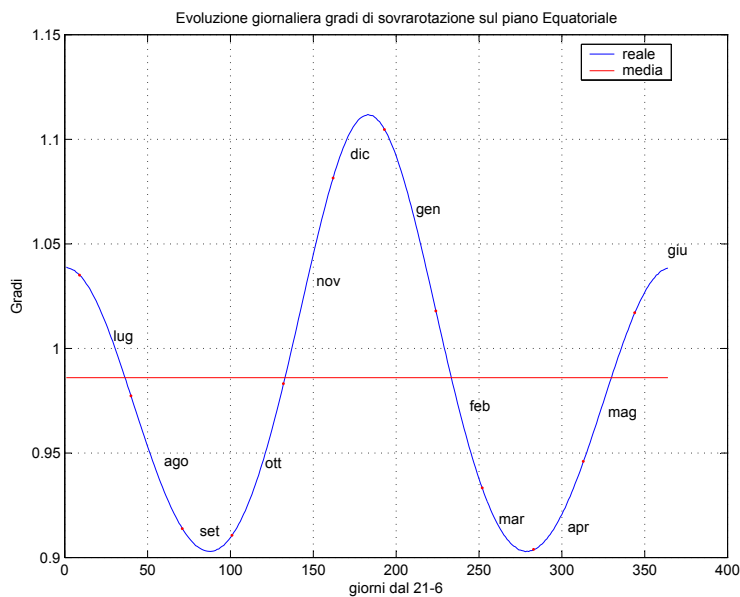


Figura 1.23.

Considerando quindi ogni giorno di 24 ore commettiamo un errore, come abbiamo detto, che può arrivare a 30 sec al giorno. Possiamo finalmente ricavare l'Equazione del Tempo andando a sommare questo ritardo (o anticipo) giornaliero dovuto alla sovrarotazione reale. Esistono solo quattro giorni all'anno in cui la sommatoria del ritardo cumulato è uguale a zero. Questi giorni sono il 15/4, 14/6, 2/9, 25/12. Per gli altri esiste una differenza che si ricava facendo riferimento al grafico dell'Equazione del Tempo (figura 1.26).

Questo sfasamento tra l'ora dell'orologio e quella segnata dal Sole è pari alla correzione che si può ricavare dall'Equazione del Tempo solo se il luogo considerato si trova sullo stesso meridiano sul quale è sincronizzata l'ora nazionale del luogo considerato (un multiplo di  $15^\circ = 1$  ora da Greenwich). Quindi se il luogo considerato non si trova ad un multiplo di  $15^\circ$  dal Meridiano Zero (di Greenwich) è necessario apportare una seconda correzione che prende il nome di **Costante Locale** e si traduce in una proporzione tra i 60 minuti (tempo) che corrispondono a  $15^\circ$  ed

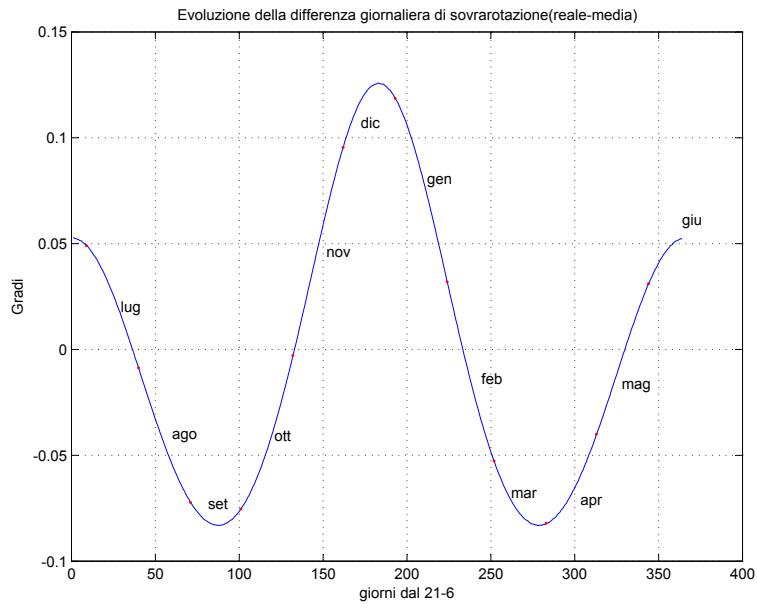


Figura 1.24.

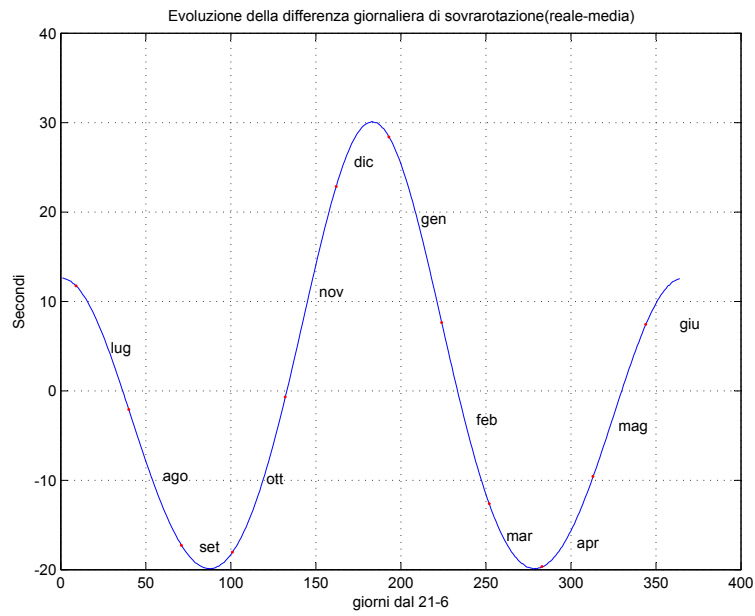


Figura 1.25.

il numero di minuti (tempo) che corrispondono alla differenza di longitudine tra il luogo considerato e quella del meridiano nazionale (su cui è fissata l'ora nazionale).

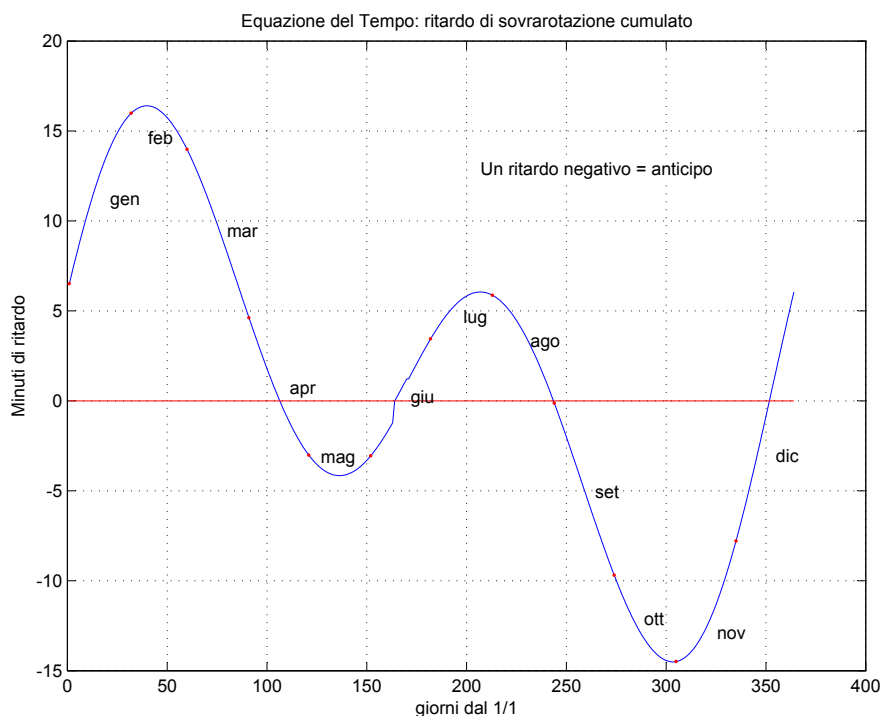


Figura 1.26.

In riferimento all'esempio del 25 / 7 trattato nei grafici precedenti:

**Costante Locale** di Foglizzo (long  $7^{\circ}49'$  E  $\rightarrow$   $7^{\circ}11'$  dal Meridiano Nazionale a  $15^{\circ}$  E da Greenwich ) = 28 min 49 sec

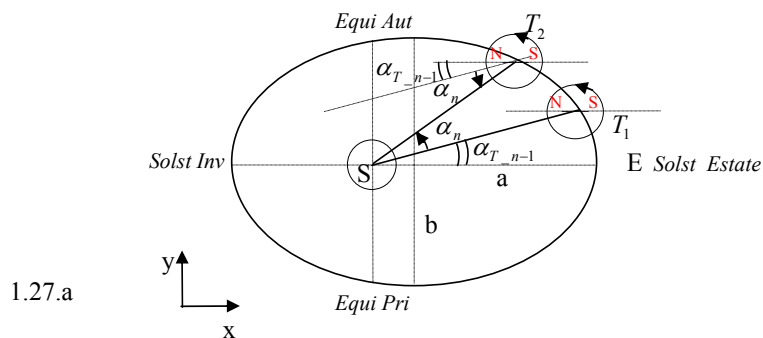
Correzione derivante da **Equazione del Tempo** (relativa al 25 / 7) = 6 min 3 sec

Inoltre essendo in vigore l'ora legale (Estiva), bisogna sommare al tutto 1 ora.

Complessivamente la differenza tra l'ora segnata dall'orologio e quella del Sole (ricordiamo ancora per la data considerata) è : 1 ora 34 min 52 sec (circa, di ritardo)

del Sole rispetto all'orologio). Ad esempio, il mezzogiorno solare (Sole allo zenit) avviene alle ore 13:34:52 (circa).

Ecco come abbiamo proiettato l'angolo del piano dell'Eclittica sul piano Equatoriale ottenendo l'angolo  $\alpha_S$  (il procedimento è valido per un giorno estivo):



$\alpha_n$  è l'angolo di sovrarotazione dello specifico giorno,  $\alpha_{T_{n-1}}$  la somma di tutti quelli dei giorni precedenti. Entrambi questi angoli sono considerati sul Piano dell'Eclittica. Ingrandendo  $T_2$  :

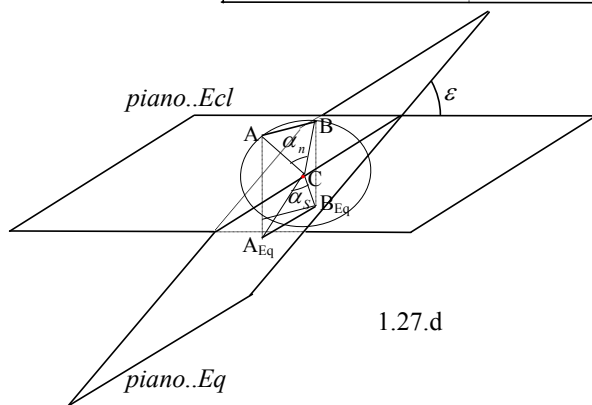
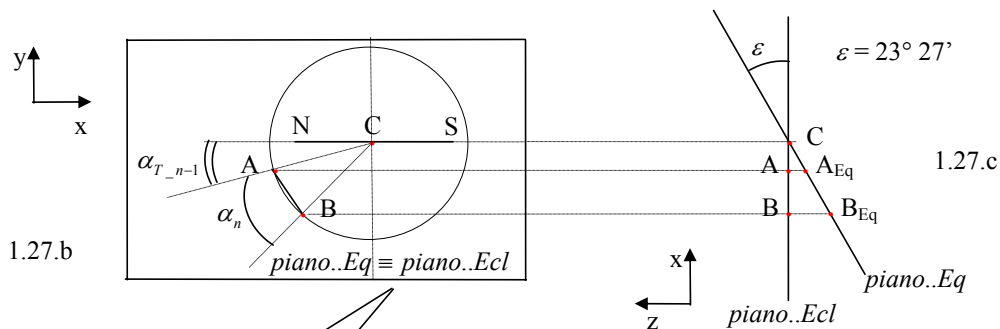


Figura 1.27.

Con riferimento alla figura 1.27:

solo  $A'A''$  ,  $B'B''$  ,  $CA = CB = R$  (Terra) rappresentano segmenti con misure reali (ovvero non visti in proiezione).  $CA''$  e  $CB''$  sono i lati del triangolo sul piano Equatoriale visti in proiezione.

$CA'$  e  $CB'$  sono i lati del triangolo sul piano dell'Eclittica visti in proiezione

$$CA'' = \frac{CA'}{\cos(\varepsilon)} = \frac{R \cdot \sin(\alpha_{T-n-1})}{\cos(\varepsilon)} \quad CB'' = \frac{CB'}{\cos(\varepsilon)} = \frac{R \cdot \sin(\alpha_{T-n})}{\cos(\varepsilon)}$$

E i lati in dimensione reale (= non proiettata) sul piano Equatoriale sono:

$$AC_{Eq} = \sqrt{R^2 + (A'A'')^2}$$

$$BC_{Eq} = \sqrt{R^2 + (B'B'')^2}$$

$$AB_{Eq} = \sqrt{(AB)^2 + (A'A'' - B'B'')^2}$$

Ci interessa ricavare l'angolo  $\hat{A}CB_{Eq}$  (=  $\alpha_S$  = proiezione dell'angolo  $\alpha$  del piano dell'Eclittica sul piano Equatoriale)

$$p = \frac{AC_{Eq} + BC_{Eq} + AB_{Eq}}{2} \quad \text{semiperimetro}$$

$$Area = \sqrt{p \cdot (p - AC_{Eq}) \cdot (p - BC_{Eq}) \cdot (p - AB_{Eq})} \quad \text{formula di Erone}$$

$$\alpha_S = \hat{A}CB_{Eq} = \arcsin\left(\frac{2 \cdot Area}{AC_{Eq} \cdot BC_{Eq}}\right)$$

Il lavoro è concluso, l'evidenza sperimentale (delle poche settimane di osservazione dopo aver completato questo programma) conferma come l'approssimazione condotta da questi modelli sia accettabile e dell'ordine dei minuti (2 o 3, per la località considerata negli esempi ). E' bene ricordare inoltre che il caso ideale per ogni coordinata considerata è quello di altezza di 0 metri slm ed orizzonte non delimitato da montagne (es isola in mezzo al mare, sarebbe anche più romantica !).

In questi modelli il Sole è sempre stato considerato puntiforme e coincidente con il centro geometrico dell'astro reale, inoltre sono stati trascurati gli effetti della rifrazione atmosferica. Per letture più approfondite si faccia riferimento alla bibliografia.

Il nostro obiettivo era e rimane un'interpretazione geometrica dell'osservazione del Sole. Ogni correzione, appunto o suggerimento sarà molto gradita. Il mio indirizzo di posta elettronica è : [diego.alberto@mensa.it](mailto:diego.alberto@mensa.it) , grazie per la cortesia dimostrata nel leggere pazientemente queste note.

- Tutti i grafici sono stati ricavati con Matlab 6.5
- L'immagine di copertina è proprietà di **Celestron *The Sky***

# Appendice A

## Altezza del Sole a Mezzogiorno: secondo metodo

Un metodo alternativo per il calcolo dell'altezza in gradi sull'orizzonte del Sole a mezzogiorno può essere il seguente: con riferimento alla figura A.1 (molto simile a quella vista per il calcolo dell'altezza del Sole nella giornata fig 1.14)

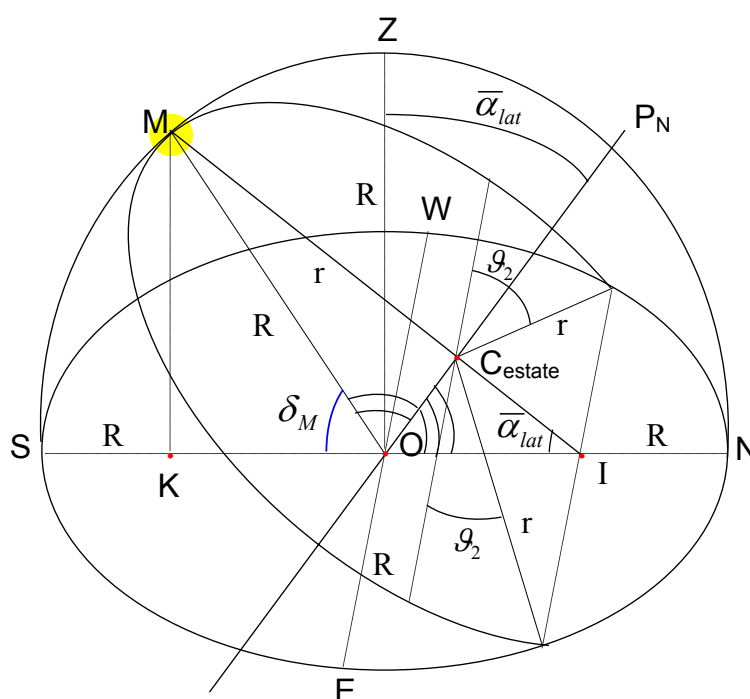


Figura A.1.

L'altezza del Sole a mezzogiorno è individuata dall'angolo  $\delta_M$  dove:

$$\delta_M = 180^\circ - C_{estate}\widehat{OI} - M\widehat{OC}_{estate}$$

ricordando dal capitolo §1.5 che:

$$r = R \cdot \cos\{\arctg[\sin(\theta_2) \cdot tg(\bar{\alpha}_{lat})]\}$$

possiamo scrivere:

$$C_{estate}\widehat{OI} = 90^\circ - \bar{\alpha}_{lat} = \alpha_{lat}$$

$$M\widehat{OC}_{estate} = \arcsin\left(\frac{r}{R}\right) = \arcsin(\cos\{\arctg[\sin(\theta_2) \cdot tg(\bar{\alpha}_{lat})]\})$$

quindi

$$\delta_M = 180^\circ - \alpha_{lat} - \arcsin(\cos\{\arctg[\sin(\theta_2) \cdot tg(\bar{\alpha}_{lat})]\})$$

Un ulteriore metodo per ricavare l'altezza del Sole a mezzogiorno è quella di porre:

$$\alpha_o = 0$$

nell'equazione del capitolo §1.5:

$$\delta = \arcsin\{\cos[\arctg(\sin(\theta_2)tg(\bar{\alpha}_{lat}))]\cos(\alpha_o)\sin(\bar{\alpha}_{lat}) + \sin[\arctg(\sin(\theta_2)tg(\bar{\alpha}_{lat}))]\cos(\bar{\alpha}_{lat})\}$$

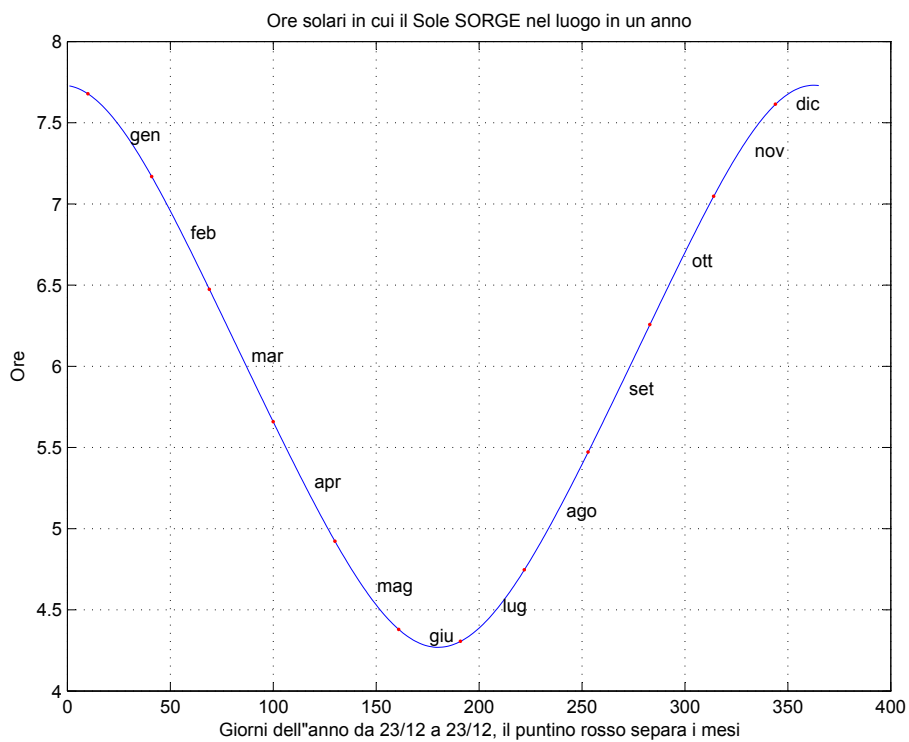
in quanto  $\alpha_o$  rappresenta l'angolo orario che separa l'ora considerata dal mezzogiorno vedi figura 1.14.

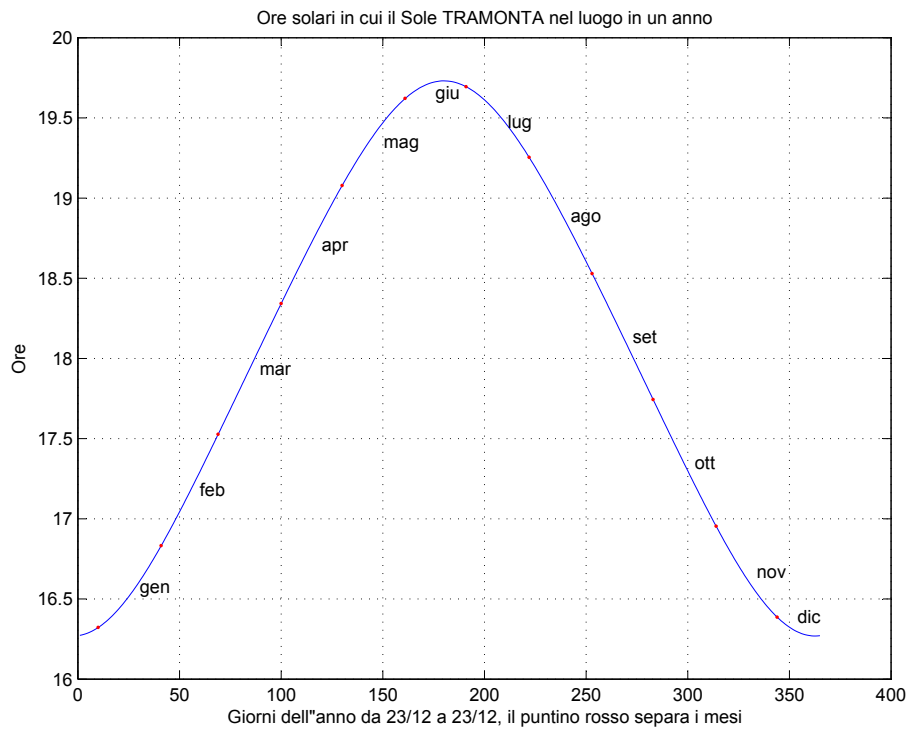


# Appendice B

## Sorgere e tramonto del Sole

Con riferimento alla località Foglizzo Canavese, ora locale solare





# Bibliografia

- [1] M. Baudoin. *Impara L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub> (...e mettilo da parte)*. ENSTA, 2000.
- [2] M.Parotto B.Accordi, E.Lupia Palmieri. *Il globo terrestre e la sua evoluzione*. Zanichelli, 1997.
- [3] J.Gribbin. *Enciclopedia di Astronomia e Cosmologia*. Garzanti, 1998.
- [4] Istituto nautico artiglio (viareggio): <http://www.nauticoartiglio.lu.it>.
- [5] Equation of time: <http://www.sundials.co.uk>.
- [6] A.Trincherò G.Pavanello. *Le Meridiane*. De Vecchi, 1999.
- [7] AA.VV. *Meridiane: le tecniche*. la casa verde, 2001.