FORMULE, CURIOSITÀ, GIOCHI MATEMATICI
TUTTO IN UNA TABELLA

Stefano Borgogni
stfbrg@rocketmail.com

SUNTO

Il presente testo presenta e descrive una tabella che raggruppa un'ampia varietà di dati relativi a formule, giochi e curiosità matematiche. Si intende mettere a disposizione di tutta la comunità degli appassionati questa tabella, che si può utilizzare come una sorta di prontuario agile e facilmente consultabile.
I dati sono ordinati per argomento e riguardano sia aspetti più specificamente matematici (costanti, numeri interi, calcolo combinatorio, figure geometriche), sia applicazioni legate al campo della matematica ricreativa.

INTRODUZIONE

Dopo aver letto nel corso degli anni libri, articoli e documentazione varia su svariati aspetti della matematica, ho pensato di raccogliere in un unico "contenitore" le informazioni che mi sembravano più interessanti, in modo da avere una sorta di prontuario da scorrere all'occorrenza. Così, pian piano ha preso forma una tabella che gradualmente è andata ingrandendosi, sia per la quantità delle informazioni presenti, sia per la tipologia degli argomenti trattati.
Ho pensato che, probabilmente, un contributo del genere può interessare anche altri appassionati, di matematica in generale e, in particolare, di tutte le sue innumerevoli applicazioni in giochi, passatempi, curiosità. Da qui nasce l'idea di condividerlo con tutta la "comunità matematica" che naviga su Internet, mettendo in rete una parte dei dati che ho raccolto e ordinato nel tempo.
Prima di entrare maggiormente nel dettaglio, vorrei chiarire che il presente lavoro non vuole assolutamente rappresentare l'ennesima versione di tavole riepilogative che raccolgono le principali formule matematiche, dall'algebra alla geometria, dai logaritmi alla trigonometria. Per questo motivo si sono volutamente lasciati da parte i dati più conosciuti, normalmente riportati in tutte le tavole esistenti: non ci saranno, dunque, né il teorema di Pitagora, né la formula per risolvere le equazioni di 2° grado, né quella dell'apotema dell'esagono, tanto per fare qualche esempio.
Al contrario, troveranno spazio dati assai meno conosciuti - ma non privi di interesse - relativi a svariati campi matematici, con particolare riferimento a quello della matematica ricreativa.
Un altro criterio di scelta delle informazioni da inserire nella tabella è stato quello di privilegiare dati sufficientemente semplici da poter essere compresi agevolmente anche da persone che - come chi scrive - partono da una buona cultura matematica di base, ma non sono in possesso di conoscenze superiori, né sono in alcun modo degli "addetti ai lavori".
Per ovvie ragioni di brevità, le descrizioni sono ridotte all'osso, ma i concetti dovrebbero risultare quasi sempre chiari. Nei (pochi) casi in cui ci sarebbe bisogno di spiegazioni più dettagliate, la tabella può comunque dare lo spunto per approfondire altrove l'argomento trattato.
Infine, va aggiunto che la tabella non ha alcuna pretesa di essere esaustiva (e come potrebbe, visti gli innumerevoli campi di applicazione della matematica?), ma è indubbiamente abbastanza ricca e, soprattutto, assai variegata. Con i pregi e i difetti che una sintesi del genere comporta: c'è un po' di tutto, ma nessun argomento viene sviluppato fino in fondo.

Detto questo, buona lettura a tutti.

ARGOMENTI DELLA TABELLA

Per una maggiore facilità di consultazione, la tabella è stata ordinata in una serie di argomenti, per quanto possibile omogenei, secondo un personale criterio di "praticità" che non parte dalle suddivisioni tradizionali. Egualmente, i "titoli" di tali argomenti sono stati talora attribuiti al di fuori di una nomenclatura strettamente matematica, con l'obiettivo di rendere i concetti espressi più chiari e immediati, anche a costo di sacrificare un po' di rigore scientifico.
In particolare, la tabella è suddivisa nei punti seguenti.

1 - Costanti matematiche

Sono qui raccolte alcune curiosità sulle costanti matematiche fondamentali - ad esempio, il π o il numero "*e*" - insieme a informazioni più generali su altre costanti meno conosciute, come la *costante di Brun*.

2 - Numeri interi

Il punto 2 comprende molti dati diversi sui numeri interi, dall'elenco di alcune possibili tipologie a una serie di funzioni e teoremi che prendono in considerazione soltanto l'insieme Z^+.
Anche in questo caso vengono fornite informazioni pressoché sconosciute al di fuori dell'ambito degli "addetti ai lavori" (vedi i *numeri di Achille* o la sorprendente *Legge di Benford*), insieme a formule notissime, sulle quali - secondo lo spirito di questo documento - ci si sofferma rapidamente, centrando l'attenzione soltanto su qualche particolarità ritenuta degna di interesse.

3 - Frazioni e numeri non interi

Per questo blocco di dati, il più piccolo dell'intera tabella, vale un discorso analogo a quello appena fatto: si parla di frazioni, numeri reali e numeri complessi, ma soltanto per metterne in evidenza alcune curiosità.

4 - Serie numeriche

Pur rimanendo nell'ambito dei numeri interi, si considerano solo alcune serie di numeri con le loro particolarità. E in qualche caso sarebbe più corretto dire "una sintesi estrema delle loro particolarità", poiché alcune di queste serie potrebbero da sole dare spunto a interi volumi; basta citare il *Triangolo di Pascal* (o di Tartaglia) oppure i *numeri di Fibonacci*.

5 - Numeri figurati

Si prendono in esame i numeri che si ottengono disponendo n oggetti (o, più semplicemente, scrivendo n punti su un foglio) secondo svariate configurazioni geometriche. Si trattano, ad esempio, i *numeri poligonali* che hanno origine a partire dalla forma di un poligono regolare, e i *numeri stella*, rappresentabili con la struttura della dama cinese.

6 - Quadrati e altre figure magiche

Il punto 6 è dedicato al classico tema dei quadrati magici (disposizioni di numeri tali che resta sempre costante la loro somma lungo righe, colonne e diagonali), con alcune possibili varianti, sia nelle regole di calcolo, sia nella forma delle figure "magiche". Tra queste varianti è senz'altro degno di nota il sorprendente *esagono magico*.

7 - Calcolo combinatorio e probabilità

Questo blocco rappresenta pienamente lo spirito della tabella, in quanto l'argomento trattato si colloca al confine tra matematica pura e matematica ricreativa. Insieme ad alcune formule del calcolo combinatorio, sono qui raccolti dati fortemente orientati verso il mondo dei giochi e dei passatempi matematici, tra cui stranezze e paradossi della probabilità come i *compleanni coincidenti* o il geniale *duello triangolare*.

8 - Figure geometriche
Raccoglie alcune curiosità relative alle figure geometriche, come il semisconosciuto *teorema di Napoleone* (ideato, pare, dal grande imperatore in persona) o la formula degli *ovali*.
Si parla per lo più di figure piane, ma non mancano accenni allo spazio tridimensionale, agli spazi n-dimensionali e all'affascinante universo delle *geometrie non-euclidee*.

9 - Riempimenti, allineamenti, colorazioni
Anche se i temi trattati hanno avuto una certa rilevanza in vari campi della matematica, questa parte della tabella è prettamente orientata ai giochi matematici. Un esempio è quello dei *polimini*, inventati dal matematico britannico Salomon Golomb e resi celebri dagli articoli di Martin Gardner.
Si accenna anche alla colorazione di mappe (il *teorema dei quattro colori*) e di varie figure geometriche.

10 - Grafi e alberi
In quest'ultimo blocco della tabella si parla molto brevemente delle strutture matematiche note come alberi e grafi riportando, tra le numerose possibili applicazioni, quella riguardante una soluzione generale del classico problema dell'*attraversamento di un fiume* con limitazioni varie ("pastore, lupo e pecora" o "missionari e cannibali").

BIBLIOGRAFIA
Per realizzare la tabella si sono utilizzati in primo luogo le opere di Martin Gardner, uno dei più grandi divulgatori matematici del '900 con i suoi articoli sulla rivista "Scientific American", poi raccolti in numerosi volumi (alcuni disponibili in italiano altri solo in inglese).
Si allega un elenco dei libri di Gardner, sicuramente non completo poiché in tempi diversi gli stessi articoli sono stati variamente assemblati e tradotti.

- *Enigmi e giochi matematici n. 1-5*, Sansoni
- *Ah! Ci sono! Paradossi stimolanti e divertenti*, Zanichelli
- *Mathematical carnival*, Mathematical association of America
- *Mathematical magic show*, Mathematical association of America
- *Mathematical circus*, Mathematical association of America
- *The magic numbers of Doctor Matrix*, Mathematical association of America
- *Wheels, life and other mathematical amusements*, Mathematical association of America
- *Knotted doughnuts and other mathematical entertainments*, Mathematical association of America
- *Time travel and other mathematical bewilderments*, Mathematical association of America
- *Penrose tiles to trapdoor ciphers*, Mathematical association of America
- *Fractal music, hypercards and more*, Mathematical association of America
- *The last recreations*, Mathematical association of America

Inoltre, sono stati consultati numerosi siti Internet e i seguenti volumi:

- Du Sautoy M., *L'enigma dei numeri primi*, BUR
- Singh S., *L'ultimo teorema di Fermat*, Rizzoli
- Balzarotti G.-Lava P., *Le sequenze di numeri interi*, Hoepli
- Livio M., *La sezione aurea. Storia di un numero e di un mistero che dura da tremila anni*, Rizzoli
- Eastaway R.-Wyndham J., *Probabilità, numeri e code. La matematica nascosta nella vita quotidiana*, Dedalo
- Eastaway R.-Wyndham J., *Coppie, numeri e frattali. Altra matematica nascosta nella vita quotidiana*, Dedalo

FORMULE, CURIOSITÀ, GIOCHI MATEMATICI

1 - COSTANTI MATEMATICHE

Pi greco $\pi \approx 3,14159$	Approssimazioni di $\boldsymbol{\pi}$	22 / 3 ≈ 3,143 - 355 / 113 ≈ 3,141593 - $\sqrt{2}+\sqrt{3} \approx 3,146$
	π come limite di serie numeriche	$\boldsymbol{\pi/2} = 2/1 \times 2/3 \times 4/3 \times 4/5 \times 6/5 \times 6/7$ etc. $\boldsymbol{\pi/4} = 1/1-1/3+1/5-1/7+1/9$ etc. $\boldsymbol{\pi^2/6} = 1/1^1+1/2^2+1/3^2+1/4^2$ etc. $\boldsymbol{\pi^2/8} = (1/1)^1+(1/3)^2+(1/5)^2+(1/7)^2$ etc.
Numero di Eulero o di Nepero **e** ≈ 2,71828	Approssimazioni di **e**	87 / 32 ≈ 2,719 - 878 / 323 ≈ 2,71826
	e come limite di serie numeriche	**e** = 1+1/1!+1/2!+1/3!+1/4! etc.
	E' maggiore $\mathbf{e}^{\boldsymbol{\pi}}$ o $\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{e}}$?	$\mathbf{e}^{\boldsymbol{\pi}} = 23,14$ - $\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{e}} = 22,46$
Numero aureo $\varphi \approx 1,61803$	$\boldsymbol{\varphi = 1+ \sqrt{5} / 2}$	Unico numero reale per cui $\boldsymbol{\varphi-1 = 1 / \varphi}$ e $\boldsymbol{\varphi^2 = \varphi+1}$
	Serie aurea: 1, φ, φ^2, φ^3	Unica serie additiva con rapporto tra termini consecutivi costante
	Proprietà varie (geometria)	Rettangolo aureo: togliendo un quadrato rimane tale 3 rettangoli aurei perpendicolari formano i vertici di un icosaedro
	Proprietà varie (numeri)	$\boldsymbol{\varphi}$ è il limite del rapporto tra 2 numeri di Fibonacci consecutivi
$\mathbf{B_2} \approx 1,90216$	Costante di Brun	Limite della serie formata dalla somma delle coppie di primi gemelli: (1/3+1/5) + (1/5+1/7) + (1/11+1/13) + …
Identità di Eulero	$\mathbf{e}^{i\pi} \mathbf{+1 = 0}$	Unisce in un'unica formula le costanti fondamentali **0**, **1**, **i**, **e**, $\boldsymbol{\pi}$

2 - NUMERI INTERI

Numeri primi	Formula di Eulero: $\mathbf{x^2+x+41}$	Produce una sequenza ininterrotta di 40 numeri primi
	Numeri di Mersenne: $\mathbf{2^P-1}$ con P primo. Non si sa se siano infiniti.	3 - 7 - 31 - 127 - 8.191 - 131.071 etc.
	Numeri di Fermat: $\mathbf{2^F+1}$ con F = numero primo di Mersenne. Non si sa se siano infiniti.	3 - 5 - 17 - 257 - 65.537 - 4.294.967.297 etc.
	Numero di Skewes: minimo numero per cui l'approssimazione di Gauss del numero di primi passa da difetto a eccesso	Equivale a 10 elevato a 10^{34} E' probabilmente il più grande numero con una precisa funzione utilizzato in matematica
Categorie di numeri rispetto ai divisori	Difettivi = numeri N maggiori della somma dei propri divisori Tutti i primi lo sono	1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 13 - 14 etc.
	Altamente composti = hanno più divisori di qualsiasi intero positivo minore	1 - 2 - 4 - 6 - 12 - 24 - 36 - 48 - 60 - 120 - 180 - 240 etc.

	Abbondanti = numeri inferiori alla somma dei propri divisori Alcuni numeri con molti divisori propri	12 - 18 - 20 - 24 - 30 - 36 - 40 - 42 - 48 - 54 - 56 - 60 etc. Con al massimo 4 cifre: 7.560 e 9.240 (hanno 63 divisori propri)
Numeri potenti (powerful)	Numeri N tali che per ogni primo p che divide N, anche p^2 lo divide. Sono sempre della forma a^2b^3	1 - 4 - 8 - 9 - 16 - 25 - 27 - 32 - 36 - 49 - 64 - 72 etc.
Numeri di Achille	Tutti i numeri potenti che non sono una potenza perfetta	72 - 108 - 200 - 288 - 392 - 432 - 500 - 648 - 675 - 800 etc.
Numeri “magici”	Numeri che consentono di eseguire in fretta operazioni apparentemente complicate	1.667 (5.001 / 7) - 142.857.143 (1.000.000.001 / 7)
	Numeri composti che consentono trucchi di magia matematica	111 = 3x37 / 1.001 = 7x11x13 / 111.111 = 3x7x11x13x37
Numeri ciclici	Numeri interi di N cifre che moltiplicati per 1,2…N contengono le stesse cifre nello stesso ordine ciclico	Il più piccolo è 142.857
	Regola generale: se 1/P con P primo produce un decimale con un periodo di P-1 cifre, tale periodo è un numero ciclico	Es. la frazione 1/17 genera il periodo 0.588.235.294.117.647 Al di sotto di 100, vi sono 9 generatori di numeri ciclici: 7-17-19-23-29-47-59-61-97
	Moltiplicando un numero ciclico per il generatore si hanno tutti 9	Es. 142.857x7 = 999.999
Numeri perfetti	Equivalgono alla Σ dei propri divisori (compreso 1) Quelli pari sono tutti del tipo $2^{N-1}(2^N-1)$ con N primo Non si sa se siano infiniti, né se ne esistano di dispari	1 - 6 - 28 - 496 - 8.128 - 33.550.336 etc.
Numeri amichevoli	Coppie di numeri in cui ciascuno è la Σ dei divisori dell’altro Esistono anche coppie dispari	220 e 284 / 1.184 e 1.210 / 2.620 e 2.924 etc.
Numeri socievoli	Come i numeri amichevoli, ma anziché in coppie sono in gruppi di tre o più numeri	Es. 12.496 - 14.288 - 15.472 - 14.536 - 14.264 (periodo 5)
Legge di Benford	Dà la probabilità che i numeri di un elenco casuale comincino con le cifre 1, 2 … 9. E’ stata usata per smascherare frodi in elenchi di importi.	Stranamente, la probabilità decresce dalla cifra 1 (probabilità del 30% circa) alla cifra 9 (meno del 5%). Non è del tutto chiaro il perché. Formula: **P = Log (1+1/C)** con C = cifra da 1 a 9
Sommatorie varie	Σ dei primi N dispari Σ dei primi N quadrati Somma dei primi N quadrati = quadrato perfetto? Σ dei primi N cubi	$\mathbf{N^2}$ **N(N+1)(2N+1) / 6** Equivale ai numeri piramidali quadrati Unica soluzione: $1^2+2^2+ \ldots 24^2 = 70^2$ $\mathbf{[N(N+1) / 2]^2}$ Equivale al numero di cubi contenuti in un cubo NxNxN
Curiosità varie con le potenze	Somme di potenze 1	1+2 = 3 / 4+5+6 = 7+8 / 9+10+11+12 = 13+14+15
	Somme di quadrati	$10^2+11^2+12^2 = 13^2+14^2 = 365$ / $21^2+22^2+23^2+24^2 = 25^2+26^2+27^2$ In generale, il primo numero di queste uguaglianze è N(2N+1) Somma notevole con numeri piccoli: $2^2+3^2+6^2 = 7^2$
	Somme di cubi	$3^3+4^3+5^3 = 6^3$
Analisi diofantina	Ricerca le sole soluzioni intere di equazioni Esempio: esiste un mattone con interi i lati e tutte le diagonali (compresa quella interna al mattone)?	La forma più semplice è: Ax+By = C No, ma ne esistono con la sola diagonale spaziale non intera (il più piccolo ha lati 44-117-240)

	Numeri di Pell: interi x, y che risolvono l'equazione $\mathbf{x^2-Ay^2 = 1}$ Sono infiniti	Vi sono soluzioni intere non banali (x=±1; y=0) per ogni A che non sia un quadrato perfetto
	Equazioni ellittiche: funzioni del tipo $\mathbf{y^2 = x^3+ax^2+bx+c}$ con soluzioni intere	Es. $x^3-x^2 = y^2+y$
Funzione **φ** di Eulero	**φ** (N) = numero di interi minori o uguali a N coprimi con N	Es. 2→ 1 / 3→ 2 / 4→ 2 / 5→ 4 / 6→ 2 / 7→ 6 / 8→ 4
Funzione **τ**	**τ** (N) associa ad ogni N il numero dei suoi divisori, inclusi uno e N stesso	Es. 2→ 2 / 3→ 2 / 4→ 3 / 5→ 2 / 6→ 4 / 7→ 2 / 8→ 4
Ultimo teorema di Fermat	L'equazione $\mathbf{x^N+y^N = z^N}$ non ha soluzioni intere per N > 2	Dimostrato da Andrew Wiles negli anni '90
Piccolo teorema di Fermat	Se P è primo e A coprimo con P, allora $\mathbf{A^{P-1} = 1}$ **modulo P**	Teorema molto utile nella cifratura "trapdoor"
Teorema di Eulero	Se A è un numero coprimo con N, allora $\mathbf{A^{\varphi(N)} = 1}$ **modulo N** Generalizza il piccolo teorema di Fermat	**φ** (N) = Funzione di Eulero (vedi sopra)
Fattorizzazione	Teorema fondamentale dell'aritmetica	Per ogni numero naturale, esiste un'unica fattorizzazione in numeri primi
Teorema di Wilson	(N-1)!+1 è divisibile per N se e solo se N è primo	Es. 6!+1 = 721 è divisibile per 7

3 - FRAZIONI E NUMERI NON INTERI

Frazioni egizie	Frazioni unitarie (1/M+1/N etc.). Ogni frazione propria può essere espressa come somma di n frazioni egizie.	Es. 3/7 = 1/4+1/7+1/28 Fibonacci trovò un algoritmo per costruire queste somme
Frazioni di Galileo	Infinita serie di numeri equivalenti	1/3 = (1+3)/(5+7) = (1+3+5)/(7+9+11) = (1+3+5+7)/(9+11+13+15) …
Numeri "quasi" interi	Differiscono di pochissimo da un intero	Es. $\mathbf{e^{\pi}-\pi}$ = 19,9991
Numeri complessi	Moltiplicazione per **i**	Equivale a ruotare ogni volta di 90° il vettore sul diagramma cartesiano
	$\mathbf{i^i = e^{-\pi/2}}$ (stranamente, si tratta di un numero reale)	
	Formula di Eulero: $\mathbf{e^{ix} = \cos(x)+i\ sen(x)}$	Vale per ogni numero reale x

4 - SERIE NUMERICHE

Fattoriale	Prodotto dei primi N numeri interi consecutivi Formula approssimata (Stirling): $\mathbf{N! \approx N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}}$	1 - 2 - 6 - 24 - 120 - 720 - 5.040 - 40.320 - 362.880 - 3.628.800 etc.
	Prodotto di 2 fattoriali = fattoriale (M! x N! = P!)	Unica soluzione: 6! x 7! = 10!
Numeri di Fibonacci	Ogni numero è la somma dei due termini precedenti Compaiono in un'infinità di situazioni in natura	1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - 34 - 55 - 89 - 144 - 233 - 377 - 610 etc.
	Rapporto tra due numeri di Fibonacci consecutivi	Tende al numero aureo φ (è alternativamente < o > di φ)
	Formula: $\mathbf{F_n = 1/\sqrt{5}[(1+\sqrt{5}/2)^n-(1-\sqrt{5}/2)^n]}$ Formula più semplice: $\mathbf{F_n = (1+\sqrt{5}/2)^n / \sqrt{5}}$	
	Alcune proprietà numeriche: - $\mathbf{F_n^2 = (F_{n-1} x F_{n+1}) \pm 1}$ - $\mathbf{F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n-1}}$ - Per 4 numeri consecutivi A,B,C,D si ha **AxD = C^2-B^2**	Es. $8^2 = (5x13)-1$ $5^2+8^2 = F_{11} = 89$ $5x21 = 13^2-8^2 = 105$
Numeri di Lucas	Come i numeri di Fibonacci, ma con i primi termini 1 e 3 Formula: $\mathbf{L_n = (1+\sqrt{5}/2)^n+(1-\sqrt{5}/2)^n}$	1 - 3 - 4 - 7 - 11 - 18 - 29 - 47 - 76 - 123 - 199 - 322 etc.
	Relazioni tra numeri di Fibonacci e di Lucas: $\mathbf{F_{n-1}+F_{n+1} = L_n}$	Es. 8+21 = 29
Numeri "Tribonacci"	Si ottengono come i numeri di Fibonacci, ma sommando i 3 termini precedenti	1 - 1 - 2 - 4 - 7 - 13 - 24 - 44 - 81 - 149 - 274 - 504 etc.
Triangolo di Pascal (o di Tartaglia)	Triangolo di numeri tali che ognuno è la somma dei 2 che gli stanno sopra (a sinistra e a destra).	1 / 1-2-1 / 1-3-3-1 / 1-4-6-4-1 / 1-5-10-10-5-1 etc.
	Le linee "diagonali" del triangolo esprimono varie serie numeriche	1° diagonale = numeri naturali 2° diagonale = numeri triangolari 3° diagonale = numeri tetraedrici 4° diagonale = numeri tetraedrici a 4 dimensioni (1-5-15-35 etc.) Diagonali meno inclinate = numeri di Fibonacci
Numeri di Catalan	Numero di modi in cui un poligono può essere diviso in triangoli da diagonali che non si intersecano Formula: **2N! / N!(N+1)!**	(1) - 1 - 2 - 5 - 14 - 42 - 132 - 429 - 1.430 - 4.862 - 16.796 etc. Si possono ricavare sottraendo ai termini centrali del triangolo di Pascal (1-2-6-20 etc.) il numero adiacente

5 - NUMERI FIGURATI

Numeri poligonali (generati a partire dal vertice di poligoni regolari)	Triangolari. Formula: **$(N^2+N) / 2$** Quadrati. Formula: **N^2** Pentagonali. Formula: **$(3N^2-N) / 2$** Esagonali. Formula: **$2N^2-N$** Formula generale per un poligono di S lati: **$(S-2)N^2-(S-4)N / 2$**	1 - 3 - 6 - 10 - 15 - 21 - 28 - 36 - 45 - 55 - 66 - 78 etc. 1 - 4 - 9 - 16 - 25 - 36 - 49 - 64 - 81 - 100 - 121 - 144 etc. 1 - 5 - 12 - 22 - 35 - 51 - 70 - 92 - 117 - 145 - 176 - 210 etc. 1 - 6 - 15 - 28 - 45 - 66 - 91 - 120 - 153 - 190 - 231 - 276 etc.
	Numeri sia triangolari sia quadrati Formula: **$y^2-2x^2 = 1$** (equazione di Pell con A = 2)	1 - 36 - 1.225 - 41.616 - 1.413.271 etc.
Numeri poligonali centrati (con un punto al centro)	Numeri triangolari centrati Formula: **$3N^2+3N+2 / 2$**	1 - 4 - 10 - 19 - 31 - 46 - 64 - 85 - 109 - 136 - 166 - 199 etc. Ognuno è somma di 3 numeri triangolari successivi. La somma dei primi N tri-centrati dà la costante di un quadrato magico di lato N
	Quadrati centrati Formula: **$N^2+(N-1)^2$**	1 - 5 - 13 - 25 - 41 - 61 - 85 - 113 - 145 - 181 - 221 - 265 etc. Ognuno è somma di 2 quadrati successivi. Sono tutti dispari e l'ultima cifra segue la serie 1, 5, 3, 5, 1
Numeri piramidali (generati da piramidi con basi regolari)	Tetraedrici. Formula: **$N(N+1)(N+2) / 6$** Piramidali quadrati. Formula: **$N(N+1)(2N+1) / 6$** Piramidali aventi come base un poligono di S lati. Formula: **$N(N+1)\ [(S-2)N+5-S] / 6$**	1 - 4 - 10 - 20 - 35 - 56 - 84 - 120 - 165 - 286 - 364 - 455 etc. 1 - 5 - 14 - 30 - 55 - 91 - 140 - 204 - 285 - 385 - 506 - 650 etc.
Numeri Esa (generati dal centro di un esagono)	Formula = **$3N(N-1)+1$** Somma dei primi M Esa = **M^3**	1 - 7 - 19 - 37 - 61 - 91 - 127 - 169 - 217 - 271 - 331 - 397 etc. Ogni Esa è la differenza tra due cubi consecutivi.
Numeri Stella (generati dal centro di una stella 6 punte)	Formano la struttura di una “dama cinese” Formula: **$6N(N-1)+1$**	1 - 13 - 37 - 73 - 121 - 181 - 253 - 337 - 433 - 541 - 661 - 793 - etc. (121 = normale dama cinese)
Numeri comuni a più gruppi	Triangolari-Esa	solo 1 - 91
	Quadrati-Esa. Formula: **$y^2 = 3x^2+1$**	1 - 169 - 32.761 etc.
	Triangolari-Stella	1 - 253 - 49.141 - 9.533.161 - 1.849.384.153 etc.
	Quadrati-Stella	1 - 121 - 11.881 - 1.164.241 - 114.083.761 etc.
	Esa-Stella Vale la relazione **2E-1 = St**	1 - 37 - 1.261 - 42.841 etc. Es. 37x2-1 = 73
	Tetraedrici-Piramidali quadrati Tetraedrici-Quadrati Tetraedrici-Triangolari Piramidali quadrati-Quadrati Piramidali quadrati-Triangolari	solo 1 solo 1 - 4 - 19.600 solo 1 - 10 - 120 - 1.540 - 7.140 solo 1 - 4.900 solo 1 - 55 - 91 - 208.335

6 - QUADRATI E ALTRE FIGURE MAGICHE

Quadrati magici	Quadrati in cui è costante la Σ di righe, colonne e diagonali Costante = **$(N^3+N) / 2$**	1 di ordine 3 - 880 di ordine 4 - 275.305.224 di ordine 5 Costanti magiche: 1-(5)-15-34-65-111-175-260-369-505
	Quadrati formati solo da numeri primi Quadrati formati da numeri primi consecutivi	67-1-43 / 13-37-61 / 31-73-7 - Costante = 111 (la minima possibile) Quadrato 3x3 con numeri di 10 cifre
	Quadrati formati dalle cifre di un numero ciclico	Solo 1, formato dalle 18 cifre del periodo di 1/19 (Costante = 81)
Quadrati diabolici	Quadrati magici in cui è costante anche la Σ sulle semidiagonali	- non ne esistono di ordine 3 - sono possibili per ogni ordine > 3 (esclusi i pari non divisibili per 4)
Quadrati magici particolari	Bimagici: è magico anche il quadrato costruito con i quadrati di ciascun numero	Il più piccolo ha ordine 8 e somme magiche rispettivamente 260 e 11.180
	Trimagici: è magico anche il quadrato costruito con i quadrati e con i cubi di ciascun numero	Il più piccolo ha ordine 12 e somme magiche rispettivamente 870, 83.810 e 9.082.800
	Eteromagici: le Σ di righe, colonne e diagonali sono tutte diverse	Ne esistono per ogni ordine > 2
	Antimagici: le Σ di righe, colonne e diagonali formano una sequenza di 2N+2 interi consecutivi	I più piccoli sono di ordine 4; non si sa se esistono quadrati antimagici per tutti gli ordini maggiori di 3
	Magici moltiplicativi	Quadrato 3x3 con questi numeri: 12-1-18 / 9-6-4 / 2-36-3 Costante moltiplicativa = 216 (la minima possibile)
	Magici additivi e moltiplicativi	Il più piccolo ha ordine 8, costante additiva è 600 e costante moltiplicativa 67.463.283.888.000
Quadrati latini	Quadrati NxN in cui nelle celle ci sono N simboli in modo che ognuno sta 1 volta in ogni riga e 1 in ogni colonna	Si possono usare in biologia o medicina per fare test su più variabili
Quadrati greco-latini	Si ottengono combinando 2 quadrati latini con simboli diversi	Sono possibili per ogni ordine a parte 2 e 6
Esagoni magici	Un solo esagono magico è possibile (per qualsiasi ordine)	Ordine = 3; numeri da 1 a 19; costante magica = 38
Stelle magiche	Numeri consecutivi collocati sugli incroci di una stella. Costante = **2(Σ 1÷N) / P** (N=nodi; P=punte)	Pentagramma: 1÷10; costante 22; nessuna soluzione Esagramma: 1÷12; costante 26; 80 soluzioni Ettagramma: 1÷14; costante 30; 72 soluzioni Ottagramma: 1÷16; costante 34; 112 soluzioni
Cubi magici	Σ costante su righe, colonne, diagonali piane e spaziali Costante = **$(N^4+N) / 2$**	Il più piccolo è di ordine 5, con costante magica 315

7 - CALCOLO COMBINATORIO E PROBABILITA'

Permutazioni	Permutazioni semplici (senza ripetizioni). Formula: **N!**	Es. anagrammi di ROSA: 4! = 24
	Permutazioni con ripetizioni. Formula: ***N! / A! B! ...***	Es. anagrammi di ATTENTA (3 T, 2 A): 7! / 3!x2! = 5.040 / 12 = 420
	Permutazioni di R elementi presi da un totale di N Formula: **N! / R!(N - R)!**	Es. probabilità di avere 13 cuori in una mano di bridge: 1 su 52! / 13! x 39!
	Dismutazioni (permutazioni in cui nessun elemento resta al suo posto). Formula: **Σ $(-1)^i$ N! / i! ≈ N! / e**	Es. dismutazioni di 3 elementi ABC: 2 (BCA, CAB) 4 elementi → 9 / 5 elementi → 44
Disposizioni (insieme ordinato di elementi)	Disposizioni semplici (K elementi presi da un insieme di N). Formula: **N! / (N-K)!**	Es. 2 elementi diversi presi da un insieme di 4 = 12 (24/2) 12-13-14-21-23-24-31-32-34-41-42-43
	Disposizioni con ripetizione (K elementi presi da un insieme di N). Formula: **N^K** Es.: modi di disporre K oggetti in N piatti	Es. 2 elementi presi da un insieme di 4 = 16 (4^2) 11-12-13-14-21-22-23-24-31-32-33-34-41-42-43-44
Combinazioni (insieme non ordinato)	Combinazioni semplici. K elementi presi da un insieme di N (K<N). Formula: **N! / K! (N-K)!**	Es. 2 elementi diversi presi da un insieme di 5 = 10 (120/12) 12-13-14-15-23-24-25-34-35-45
	Combinazioni con ripetizione. K elementi presi da un insieme di N (K<N). Formula: **(N+K-1)! / K! (N-1)!**	Es. 2 elementi da un insieme di 5 = 15 (720/48) 11-12- 13-14-15-22-23-24-25-33-34-35-44-45-55
Partizioni di N	Numero di possibili partizioni diverse di un insieme di elementi	Es. partizioni di 4 elementi = 5 (4; 3-1; 2-2; 2-1-1; 1-1-1-1) La serie è: (1) - 1 - 2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 15 - 22 - 30 - 42 etc.
Numero di ricorrenze	Modi diversi di scegliere N elementi in un insieme di M	Triangolo di Pascal, incrocio tra diagonale N e riga M (es. 3 elementi su 7 = 35 modi)
Tagli di una torta	N° massimo di pezzi dividendo una torta con N tagli ciascuno dei quali interseca tutti gli altri - Formula: **$1/2N^2+1/2N+1$**	1 taglio = 2 pezzi - 2 tagli = 4 pezzi - 3 tagli = 7 pezzi 4 tagli = 11 pezzi - 5 tagli = 16 pezzi - 6 tagli = 22 pezzi
Lancio monete	Probabilità di N teste su M lanci: sul triangolo di Pascal incrocio diagonale N e riga M diviso Σ riga M (2^M)	Es. 5 teste su 10 lanci = 252 / 2^{10} = 252 / 1.024 = 63 / 256 ≈ 1/4
Scelta del numero più alto	Come massimizzare la probabilità di scegliere il numero più alto tra N (non si conoscono i valori e non si può tornare indietro)	Scartare **N/e** numeri e scegliere, tra i successivi, quello che supera i primi 3. Es: su 10 numeri scartarne 3 e prendere poi il maggiore
Cappelli giusti	N uomini prendono a caso i loro cappelli; qual è la probabilità che almeno uno prenda il suo?	Tende a **1-1/e** ≈ 0,63. Resta praticamente identica da 5 casi in poi
Compleanni coincidenti	Prese 23 persone a caso, qual è la probabilità che almeno 2 date di compleanno coincidano (giorno-mese)?	Si direbbe molto bassa, invece è superiore a ½. Con 30 persone è all'incirca 0,73 e oltre 60 persone è praticamente equivalente a 1
Duello "triangolare" (si tira a turno)	Duello tra 3 persone, una infallibile, una che colpisce all'80%, una al 50%. Chi ha più probabilità di sopravvivere?	Il tiratore più scarso. E la sua miglior tattica è tirare in aria lasciando che gli altri si sparino tra loro
Carte dello stesso colore	Sul tavolo 2 carte rosse e 2 nere a faccia coperta. Prendendone 2 a caso, qual è la probabilità che siano dello stesso colore?	Si direbbe ½, invece è ⅓
Paradosso delle 3 carte	3 carte: 1 rossa su ambo i lati, 1 bianca su ambo i lati, 1 bianco-rossa. Poso una carta e vedo il lato rosso. Qual è la probabilità che sia rossa anche dall'altro?	Si direbbe ½, invece è ⅔

8 - FIGURE GEOMETRICHE

Triangoli in genere	Le mediane dividono un triangolo in 6 parti uguali	Il punto d'incontro (baricentro o centroide) è il centro di gravità del triangolo
	Linee ceviane (dal matematico Ceva): vanno dal vertice a un punto del lato opposto	Lati divisi in 3 parti: le ceviane formano un triangolo di area **1/7** dell'originale Lati divisi in N parti: le ceviane formano un triangolo di area $\mathbf{(N-2)^2 / N^2-N+1}$
	Teorema di Morley	Le linee di trisezione degli angoli di un triangolo si incontrano in punti che sono vertici di un triangolo equilatero
	E' possibile che due triangoli con 5 elementi (lati o angoli) uguali siano diversi?	Sì, con 3 angoli e 2 lati uguali vi sono triangoli simili, ma non uguali. I più piccoli hanno lati 8-12-18 e 12-18-27
Triangoli rettangoli	Formula per generare tutte le terne pitagoriche: $\mathbf{A = m^2-n^2;\ B = 2mn;\ C = m^2+n^2}$	Descritta da Euclide, ma già nota ai babilonesi. La terna è primitiva se e solo se m e n sono coprimi e sono uno pari, l'altro dispari
	Le 5 più piccole terne pitagoriche primitive	3-4-5 / 5-12-13 / 7-24-25 / 8-15-17 / 9-40-41
	Esistono terne primitive con lo stesso intero minore	Il più piccolo intero minore di 2 terne primitive è 20: terne 20-21-29 e 20-99-101
	Triangoli "zoppi" = i cateti differiscono di un'unità	Es. 20-21-29, l'unico caso (a parte 3-4-5) con A, B, C < 100
Teorema di Napoleone	Costruendo all'esterno dei lati di un triangolo 3 triangoli equilateri, i 3 baricentri formano un triangolo equilatero	Si ritiene sia veramente di Napoleone; fu dimostrato da Lagrange
Costruzione poligoni	Si possono costruire con solo riga e compasso poligoni di N lati con N = numero primo di Fermat	Poligoni con 3-5-17-257-65.537 lati (esiste un manoscritto che spiega come costruire l'ultimo di questi)
Cerchi tangenti	E' sempre possibile disegnare 4 cerchi mutuamente tangenti. Che relazione c'è tra i 4 raggi?	$\mathbf{A^2+B^2+C^2+D^2 = \tfrac{1}{2}(A+B+C+D)^2}$
Ovali	Luogo dei punti per cui è costante la somma tra M volte la distanza da A e N volte quella da B (A,B = fuochi)	Il più semplice è l'ovale cartesiano (M=1; N=2)
Poliedri e politopi	Poliedri regolari (solidi platonici): sono solo 5	Tetraedro: 4 triangoli - Cubo o Esaedro: 6 quadrati - Ottaedro: 8 triangoli Dodecaedro: 12 pentagoni - Icosaedro: 20 triangoli
	Poligoni, poliedri, politopi regolari	spazio a 2 dimensioni: **infiniti** spazio a 3 dimensioni: **5** (con 4, 6, 8, 12 e 20 facce) spazio a 4 dimensioni: **6** (con 5, 8, 16, 24, 120 e 600 "facce") spazio a N (N > 4) dimensioni: **3** (con N+1, 2N e 2^N "facce")
Formula di Eulero (solidi)	**F+V-L = 2** (F=facce; V=vertici; L=Lati)	Vale per tutti i solidi, anche non convessi
Geometrie non euclidee	Geometria **iperbolica**: per un punto esterno a una retta r passano infinite parallele a r	Curvatura del piano iperbolico < 0 (Piano euclideo = 0) Somma angoli interni di un triangolo < 180° (decresce al crescere del triangolo) Circonferenza > π volte il diametro Tutti i poligoni simili sono uguali
	Geometria **ellittica**: per un punto esterno a una retta r non passa alcuna parallela a r	Somma degli angoli interni di un triangolo > 180° Circonferenza < π volte il diametro Le linee rette diventano cerchi

9 – RIEMPIMENTI, ALLINEAMENTI, COLORAZIONI

Polimini e Poliamanti	Polimini: figure ottenute unendo quadrati lungo un lato	Vi sono: 5 Tetramini; 12 Pentamini; 35 Esamini; 108 Eptamini
	Poliamanti: figure ottenute unendo triangoli lungo un lato	Vi sono: 3 Tetramanti; 4 Pentamanti; 12 Esamanti; 24 Eptamanti
Quadrati perfetti	Quadrati contenenti quadratini tutti diversi	Minimo numero di quadratini = 21 / Lato quadrato grande = 112
Rettangoli perfetti	Rettangoli con dentro altri aventi lati tutti diversi Rettangolo grande = quadrato	Minimo numero di rettangoli = 5 Soluzione con 5 rettangoli di lato da 1 a 10. Lato quadrato = 11
Riempimenti del piano	Figure piane che possono riempire il piano senza “buchi”	- Poligoni regolari → solo triangolo, quadrato, esagono - Poligoni non regolari → triangoli e quadrilateri: tutti / pentagoni: molti tipi; esagoni: solo tre tipi / oltre 6 lati: nessuno
Colorazione di mappe	Teorema dei 4 colori: ogni mappa si può colorare con soli 4 colori in modo che regioni confinanti abbiano colori diversi	E’ stato dimostrato nel 1976 con l’ausilio di elaboratori elettronici
Triangoli equilateri	Triangoli divisi in 3 triangolini colorati Formula: $\mathbf{C^3+2C / 3}$ (C = colori)	3 colori: 11 triangoli 4 colori: 24 triangoli (formano un esagono di lato 2) 5 colori: 45 triangoli
Cubi colorati	In quanti modi si può colorare un cubo con 6 colori diversi? Formula: **F! / 2L** (F=facce; L=lati)	6! / 2x12 = 720 / 24 = 30
Trucchi su rettangoli sezionati	Si può sezionare un rettangolo 13x8 (104) e ricomporlo in uno 21x5 (105)	Trucco: i pezzi non sono esattamente accostabili, lasciano uno spazio minimo. La stessa cosa vale per qualsiasi quaterna di numeri di Fibonacci consecutivi

10 - GRAFI-ALBERI

Alberi	Alberi strutturalmente diversi costruiti su N nodi	4 nodi: 2 / 5 nodi: 3 / 6 nodi: 6 / 7 nodi: 11 8 nodi: 23 / 9 nodi: 47 / 10 nodi: 106 / 11 nodi: 235
	Alberi completi che connettono N nodi in tutti i modi possibili	Formula: $\mathbf{N^{N-2}}$ **-** Es.: 5 nodi = 125 alberi
Tipi di grafi	4 tipologie principali di grafi	Cammini / Cicli / Stelle / Ruote
Grafi completi	Grafi in cui ogni punto è connesso con ogni altro punto	
	Numero minimo di incroci necessari per collegare tutti i punti (numeri Crossing)	4 nodi: 0 incroci (grafo planare) / 5 nodi: 1 incrocio 6 nodi: 3 incroci / 7 nodi: 9 incroci Non si conosce una formula generale per ogni N
Grafi orientati (Digrafi)	Per ogni digrafo completo esiste sempre un cammino hamiltoniano (percorso che visita tutti i nodi di un digrafo una sola volta)	Può essere chiuso (circuito hamiltoniano) o aperto
Attraversamento di un fiume	Opportuni digrafi possono risolvere i giochi di attraversamento di un fiume con varie limitazioni tipo “Pastore, lupo e pecora” oppure “Missionari e cannibali”	Procedura: si costruisce una matrice (N+1xN+1) con tutti i possibili stati, si elencano quelli accettabili e si cerca un percorso da un angolo (N,N) a quello opposto (0,0) in base alle regole date