

ELEMENTI DI MECCANICA DEI MATERIALI E METALLURGIA

di Matteo Puzzle
matematicare@hotmail.com
per il gruppo

<http://it.groups.yahoo.com/group/softwarestrumentitecnologici/>

***L'autore è grato a chiunque voglia segnalare eventuali imprecisioni, riportate in questo documento, inoltre sono graditi commenti, suggerimenti e giudizi critici.
Il presente documento può essere copiato, fotocopiato, riprodotto, a patto che non venga altera l'integrità, la proprietà dell'autore e il contenuto stesso.
L'autore non potrà essere ritenuto responsabile per il contenuto e l'utilizzo del presente documento, declinandone ogni responsabilità.***



PROPRIETA'	Matteo Puzzle
VERSIONE FILE	1.0
DATA DI CREAZIONE	23 Settembre 2005
ESTENSIONE FILE	.pdf
SITO	http://www.matematicamente.it/

PARTE I: generalità sui materiali duttili e fragili	3
Resistenza, duttilità ed energia di frattura	3
PARTE II: tensioni piane e tridimensionali (cerchi di mohr)	9
Sforzi combinati: introduzione	9
Cerchio di mohr per uno stato di sforzo piano	9
Cerchio di mohr per gli stati di deformazione piani	16
Cerchio di mohr per uno stato di sforzo tridimensionale	18
Sollecitazione locale e quadrica indicatrice	20
PARTE III: criteri di snervamento	22
Criterio del massimo sforzo di taglio (criterio di Tresca)	22
Criterio della massima energia di distorsione (criterio di Von Mises)	23
Confronto tra il criterio di Tresca e di Von mises	30
PARTE IV: introduzione ai processi di lavorazione meccanica	31
Determinazione dei carichi per la trafilatura e la fucinatura da considerazioni tensionali: introduzione	31
Lavoro per variare la lunghezza di un elemento rettilineo	31
Applicazione dell'equazione del lavoro: determinazione della massima possibile riduzione di una sezione in un unico passaggio	34
Estrusione di una sbarra	35
PARTE V: il processo di trafilatura	36
Processo di trafilatura: introduzione	36
Sbarra cilindrica trafilata con una matrice conica	37
Legami sforzo – deformazione nel processo di trafilatura	42
Determinazione della massima riduzione di un trefolo	46
Esempio di trafilatura	47
Osservazioni	50
Elaborazioni grafiche	51
Esempi di trafilatura di un filo	54
Trafilatura di un tubo	62
PARTE VI: micrografie e macrografie	65
PARTE VII: appendice	76
Il patentamento	76
Il microscopio	78
Microscopi ottici	78
I microscopi elettronici	81
BIBLIOGRAFIA	84

PARTE I: generalità sui materiali duttili e fragili

Resistenza, duttilità ed energia di frattura

I materiali strutturali vengono tradizionalmente catalogati, in base alle caratteristiche della curva tensione - deformazione $\sigma(\varepsilon)$, in due distinte categorie: materiali duttili e materiali fragili. Mentre i primi mostrano ampi tratti non lineari nel diagramma $\sigma(\varepsilon)$, prima di pervenire alla rottura, i secondi si rompono in modo improvviso, quando la risposta è ancora sostanzialmente elastica e lineare. Una seconda caratteristica che li distingue nettamente è il rapporto tra resistenza a trazione e resistenza a compressione.

Mentre per i materiali duttili tale rapporto è vicino all'unità, per i materiali fragili esso si presenta di molto inferiore (in alcuni casi, 10^{-1} e 10^{-2}). Le differenze di comportamento dipendono in gran parte dai meccanismi microscopici di danneggiamento e di frattura, che, nei vari materiali di impiego strutturale, si presentano notevolmente diversi. Nelle leghe metalliche, ad esempio, si verificano degli scorrimenti tra i piani atomici e cristallini, che danno luogo ad un comportamento di tipo plastico o duttile, con notevoli deformazioni permanenti. Nei calcestruzzi e nelle rocce, d'altra parte, le microfessure e gli scollamenti tra i componenti granulari e la matrice, possono estendersi e concorrere a formare una fessura macroscopica che separa improvvisamente in due parti l'elemento strutturale. Questo processo di fessurazione instabile produce un comportamento di tipo fragile.

Peraltro, non è sempre evidente quale sia l'ambito microscopico in cui avvengono i meccanismi di danneggiamento. Tale ambito può presentare dimensioni assai diverse, in funzione della natura dei meccanismi e della eterogeneità del materiale. Nei cristalli il danneggiamento avviene a livello atomico, con le vacanze e le dislocazioni; nelle leghe metalliche le cricche si propagano a livello intergranulare o transgranulare; nei calcestruzzi, infine, le fessure si enucleano all'interfaccia tra gli inerti granulari e la matrice cementizia. Si comprende quindi come la scala del danneggiamento venga a dipendere dalla regolarità del solido e quindi dalla dimensione delle eterogeneità in esso presenti.

Accanto ai materiali da costruzione tradizionali, si sono aggiunti oggi nuovi materiali, altamente eterogenei ed anisotropi, poiché rinforzati da fibre e composti da più lamine. Tali materiali, detti compositi, possono essere a matrice polimerica, metallica, ceramica o cementizia. In essi i meccanismi di danneggiamento sono essenzialmente due: lo sfilamento delle fibre e la delaminazione (cioè lo scollamento degli strati).

La distinzione tra materiali duttili e materiali fragili non è sempre così netta nella pratica, anche perché la duttilità del materiale dipende dalla temperatura ambientale e anche dalla dimensione dell'elemento strutturale.

Quest'ultima è la dipendenza concettualmente più ardua da intendere, poiché in questo modo la duttilità cessa di essere una proprietà del materiale per diventare una proprietà dell'intera struttura.

Si consideri una prova di trazione uniassiale eseguita su di un provino o campione di materiale duttile, ad esempio un acciaio (fig. 1.1). Il provino abbia l'usuale forma a clessidra, per evitare che la rottura avvenga nella zona terminale di ammorsamento alla macchina di prova.

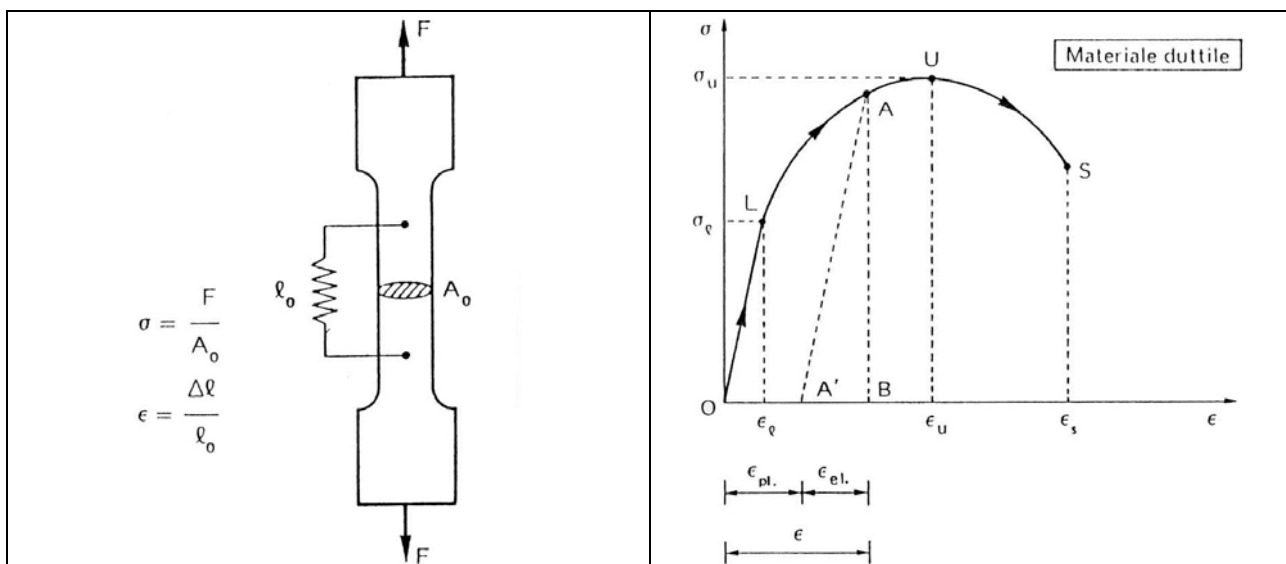


Figura 1.1

Figura 1.2

Sia A_0 l'area della sezione trasversale iniziale del provino nella zona mediana ed l_0 la distanza iniziale tra due sensori incollati in due punti distinti della zona mediana. Tale distanza venga misurata da un dispositivo elettrico che collega i due punti. Si definisca la *tensione nominale* σ , come il rapporto tra la forza F trasmessa dalla macchina di prova e l'area iniziale A_0 .

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

Si trascurano così le contrazioni laterali elastiche ed, eventualmente, plastiche.

Si definisca poi la dilatazione convenzionale ϵ , come il rapporto tra la variazione di distanza tra i due sensori Δl e la distanza iniziale l_0 :

$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Tale dilatazione è quella media, relativamente al tratto sotto controllo. È molto probabile che, durante la prova, e specialmente in regime non lineare, la dilatazione non sia uniforme e quindi non sia puntualmente coincidente con quella media.

Si riportino ora sul piano σ - ϵ tutte le coppie di punti registrati durante il processo di caricamento (figura 1.2). Tra i punti O e L il diagramma è lineare ed elastico. Da L in poi la risposta non è più lineare ed il materiale comincia a snervarsi. Scaricando il provino, si evidenziano delle deformazioni permanenti ϵ_p . In questo modo parte dell'energia di deformazione è restituita (triangolo ABA'), cioè quella relativa alla deformazione $\epsilon_{el.}$, mentre la restante è dissipata plasticamente (area $OLAA'$). Caricando nuovamente il provino, si ripercorre elasticamente il tratto AA' , parallelo al tratto OL . Giunti in A , il provino si snerva di nuovo ad una tensione $\sigma > \sigma_y$.

Il materiale vergine, quindi, si snerva a livelli di tensione più bassi di quanto non faccia il materiale già precedentemente snervato. Tale fenomeno è detto *incrudimento del materiale* (in inglese: "hardening").

Continuando ad aumentare la forza applicata F , si riprende a percorrere il tratto non lineare AU . In questa fase l'incremento di tensione per incremento unitario di dilatazione (ciò che si chiama solitamente *rigidezza tangenziale*) continua a diminuire, finché non si annulla nel punto U . Giunti nel punto U , se il processo di caricamento è pilotato dalla forza esterna F , il provino si rompe, poiché F non può ulteriormente aumentare.

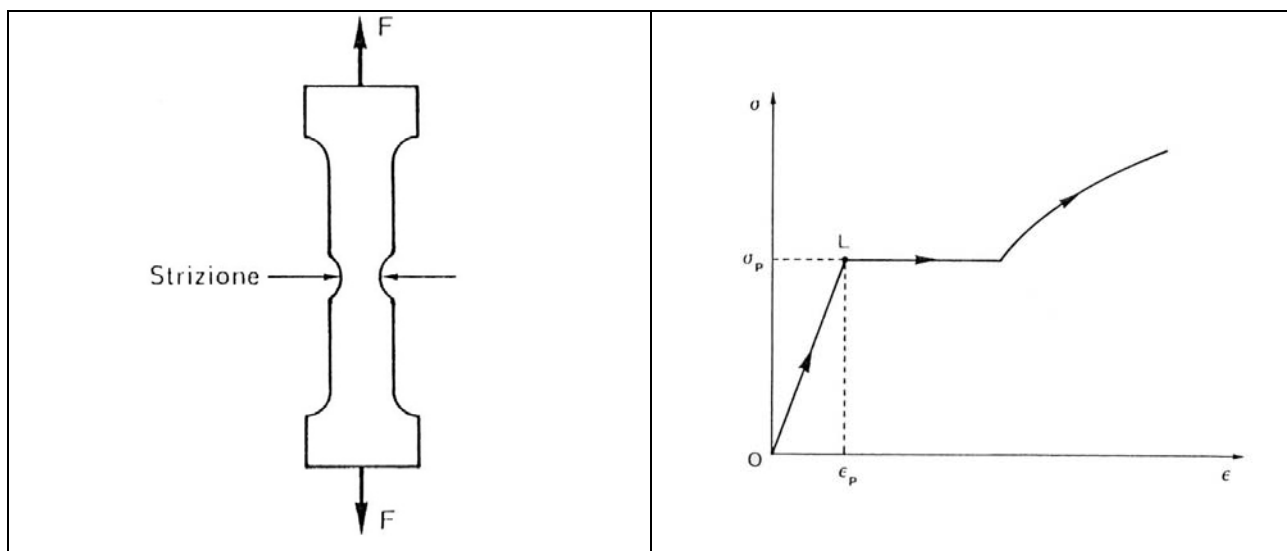


Figura 1.3

Figura 1.4

D'altra parte, se il processo di caricamento è pilotato dalla variazione di distanza Δl (cioè, elettronicamente si impone a tale grandezza una rampa nel tempo), è possibile indagare sul comportamento del materiale al di là del punto di resistenza ultima U . Oltre il punto U , infatti, la rigidità tangenziale diventa negativa e, ad incrementi positivi di spostamento Δl , corrispondono incrementi negativi della forza F . Ciò è dovuto al fenomeno della *contrazione trasversale plastica o strizione* (figura 1.3), per cui l'area A della sezione effettiva diventa notevolmente minore di A_0 , in una banda localizzata compresa tra i due sensori. Infine, raggiunto un punto S terminale, il provino cede di schianto, sebbene il processo di caricamento sia a deformazione controllata.

Nel caso di alcune leghe metalliche, come gli acciai a basso tenore di carbonio, al limite di proporzionalità L segue uno snervamento improvviso, così che la dilatazione aumenta di una quantità finita sotto carico costante (figura 1.4). In questi casi è quindi facile individuare il valore della *tensione di snervamento uniassiale* σ_p , essendo questa coincidente con il limite di proporzionalità σ_l . Quando invece al limite di proporzionalità segue il tratto incrudente, è più difficile definire σ_p . Si usa allora, per convenzione, quel valore della tensione la cui dilatazione permanente ϵ_p allo scarico è pari al 0,2%.

Mentre i materiali duttili presentano comportamenti simili a trazione e compressione, i materiali fragili mostrano comportamenti considerevolmente diversi. I calcestruzzi, ad esempio, sono duttili in compressione e fragili in trazione, e presentano una resistenza ultima a compressione che è circa di un ordine di grandezza maggiore di quella a trazione. Una prova di trazione su di un campione di calcestruzzo, se condotta pilotando il carico (come si suole dire, a carico controllato), mostra una risposta approssimativamente elastica e lineare e poi, all'improvviso, una brusca caduta del carico stesso, che corrisponde alla repentina formazione di una fessura. Tuttavia, le moderne tecniche elettroniche permettono oggi di pilotare la deformazione (input = deformazione ϵ , output = tensione σ).

Così facendo, si evidenzia la curva di risposta post - rottura del materiale cementizio (figura 1.5). Solo recentemente ci si è resi conto dell'esistenza di un esteso ramo di incrudimento negativo (in inglese: "softening") e della possibilità di dissipare, da parte del materiale, una notevole quantità di energia per unità di volume. Tale energia è rappresentata dall'area sottesa dalla curva $\sigma(\epsilon)$.

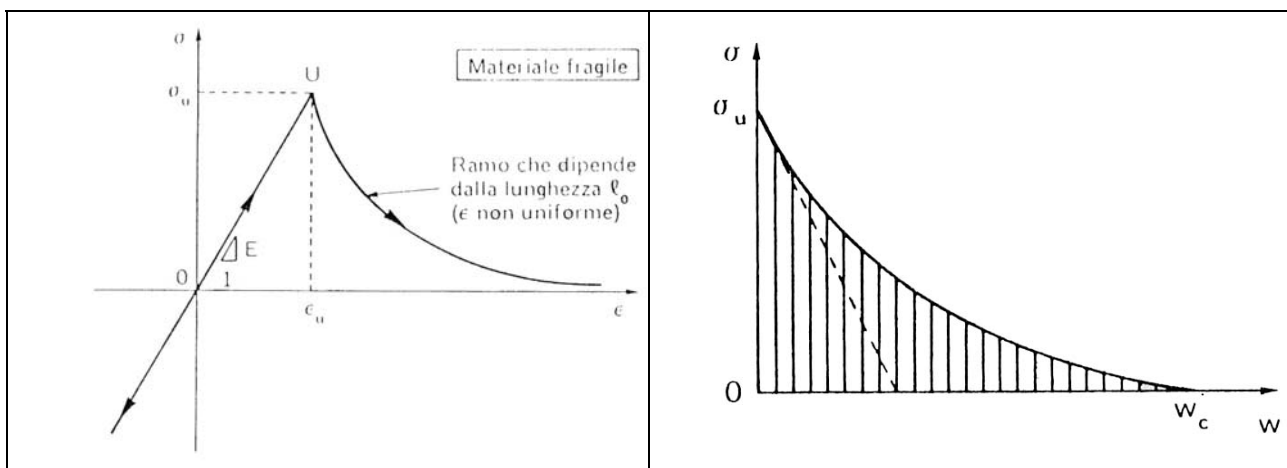


Figura 1.5

Figura 1.6

Ancora più recentemente si è potuto dimostrare che l'energia in realtà non è dissipata uniformemente nell'unità di volume, bensì è dissipata su una banda localizzata, la quale diventa in seguito una fessura (lo stesso fenomeno avviene nei materiali duttili con la strizione). In altre parole, la dilatazione puntuale tra i due sensori di figura 1.1, non è una funzione costante. Al contrario, essa mostra un notevole picco in corrispondenza della fessura in via di formazione. Idealmente si può immaginare che la funzione ε sia una δ di Dirac, essendo la dilatazione infinita ove si verifica una discontinuità della funzione *spostamento assiale*.

In conseguenza della localizzazione della deformazione ε , il ramo decrescente $\sigma(\varepsilon)$ viene a dipendere dalla lunghezza l_0 della base di misura. Ciò che invece risulta essere una vera caratteristica del materiale è il diagramma $\sigma(w)$, che rappresenta la tensione trasmessa attraverso la fessura, in funzione della apertura (o larghezza) della fessura stessa (figura 1.6). Tale legge di decadimento indica, naturalmente, un indebolimento dell'interazione all'aumentare della distanza w tra le facce (o superfici libere) della fessura. Quando w raggiunge il valore limite w_c , l'interazione si spegne totalmente e la fessura diventa una sconnessione completa che divide in due parti distinte il provino. L'area sottesa dalla curva $\sigma(w)$ rappresenta l'energia dissipata sulla superficie unitaria di frattura. Essendo la *legge coesiva* $\sigma(w)$ una caratteristica del materiale, che dipende dalla struttura intima e dai meccanismi di danneggiamento del materiale stesso, anche l'*energia di frattura* Σ risulta essere una proprietà intrinseca del materiale:

$$\Sigma = \int_0^{w_c} \sigma(w)dw$$

L'energia dissipata sulla superficie della fessura vale $\Sigma \cdot A_0$ essendo dimensionalmente Σ un lavoro per unità di superficie e quindi una forza per unità di lunghezza, $[F][L]^{-1}$.

Poiché, peraltro, si è supposto che la dissipazione energetica avvenga soltanto sulla superficie fessurata e non nel volume di materiale integro, l'energia dissipata globalmente nel volume $A_0 \cdot l_0$ è ancora pari a $\Sigma \cdot A_0$ (cioè rigorosamente valido in assenza di incrudimento positivo).

Se si riportano allora le curve di risposta sul piano $F - \Delta l$, all'aumentare della lunghezza l_0 del provino, si ottengono tratti elastici a rigidità calante e tratti "softening" a pendenza negativa crescente e, oltre un certo limite, a pendenza positiva (figura 1.7). L'area sottesa da ciascuna curva deve infatti essere costante e pari a $\Sigma \cdot A_0$.

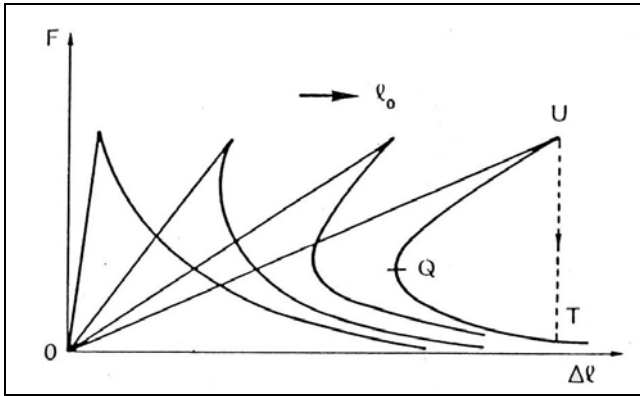


Figura 1.7

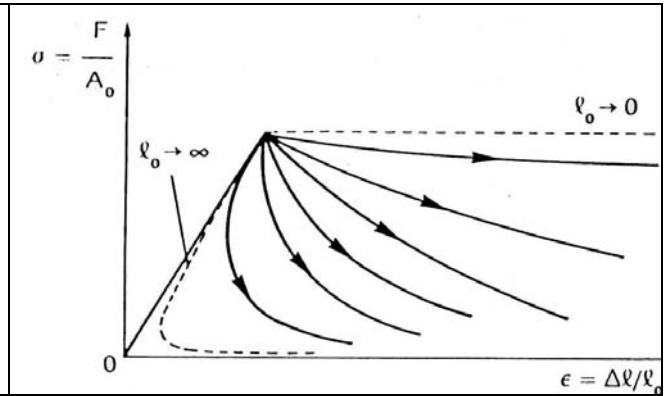


Figura 1.8

Sul piano $\sigma - \varepsilon$ (figura 1.8) la transizione appena descritta, è rappresentata da un unico tratto elastico lineare e da un ventaglio di rami "softening", al variare della lunghezza l_0 . L'area sottesa, infatti, in questo caso varia con l_0 , essendo pari a Σ/l_0 . Per $l_0 \rightarrow 0$ il ramo "softening" diventa orizzontale e rappresenta una risposta strutturale *perfettamente plastica*. D'altra parte, per $l_0 \rightarrow \infty$ l'area compresa tra la curva $\sigma(\varepsilon)$ e l'asse ε deve tendere a zero, e quindi il ramo "softening" tende a coincidere con il tratto elastico (figura 1.8).

La pendenza positiva del ramo "softening" si può giustificare, oltre che, come si è visto, considerando l'energia dissipata, anche per derivazione analitica della funzione $\varepsilon(\sigma)$.

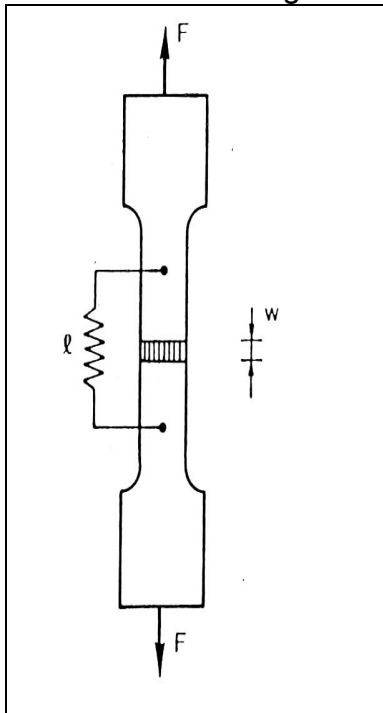


Figura 1.9

Nella fase post-rottura si ha infatti (figura 1.9):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\varepsilon_{el} \cdot l_0 + w}{l_0}$$

ove con ε_{el} si è indicata la dilatazione specifica longitudinale nella zona integra:

$$\varepsilon_{el} = \frac{\sigma}{E}$$

Quindi si trae:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{w(\sigma)}{l_0}$$

e derivando rispetto a σ :

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{1}{E} + \frac{1}{l_0} \cdot \frac{dw}{d\sigma}$$

Tale derivata, e quindi anche l'inversa $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$, è maggiore di zero per:

$$l_0 > E \cdot \left| \frac{dw}{d\sigma} \right|$$

Ne discende che si hanno tratti "softening" a pendenza positiva per:

$$l_0 > \frac{E}{\left| \frac{dw}{d\sigma} \right|_{\max}}$$

cioè, quando la lunghezza del provino, o meglio la distanza l_0 tra i punti di cui si stima lo spostamento relativo, è superiore al rapporto tra modulo elastico e massimo modulo tangente della legge coesiva. Ciò è dovuto al fatto che, durante la fase di incrudimento negativo, la tensione σ diminuisce e, mentre il punto rappresentativo della zona fessurata

scende lungo la curva $\sigma(w)$ (figura 1.6), il punto rappresentativo della zona integra scende lungo la retta $\sigma(\varepsilon)$ (figura 1.5) e descrive uno scaricamento elastico. Se la lunghezza l_0 è sufficientemente grande, la contrazione elastica prevale sulla dilatazione della zona fessurata, dando luogo al fenomeno precedentemente descritto.

Il "softening" a pendenza positiva rappresenta un fenomeno inquadabile nell'ambito della *Teoria delle Catastrofi*. Se infatti il processo di carico è pilotato dalla dilatazione convenzionale e , o dall'allungamento Δl , una volta raggiunto il punto U (figura 1.7), si ha una caduta verticale del carico, sino ad incontrare il tratto "softening" inferiore che è a pendenza negativa. Il tratto UQT viene così ignorato e diventa virtuale. Per rilevare sperimentalmente questo tratto, è necessario pilotare il processo di carico mediante l'apertura w della fessura, cosa che oggi la tecnica elettronica consente. L'instabilità sopra descritta, con termine anglosassone, è detta "snapback". Tutti i materiali relativamente fragili (come il calcestruzzo, la ghisa, il vetro, il plexiglass,...), che possiedono un basso valore della *energia di frattura* Σ , con le normali lunghezze l_0 dalla base di misura presentano una brusca caduta del carico quando il comportamento globale del campione è ancora elastico lineare.

Concludendo queste premesse, è opportuno osservare come resistenza ed energia di frattura siano proprietà intrinseche del materiale, mentre la duttilità dipenda da un fattore strutturale come la lunghezza del campione.

In figura 1.10 sono riportate provette proporzionali secondo il metodo di prova di trazione per i materiali metallici, a temperatura ambiente, norma UNI EN 10002/1. Secondo tale norma, la forma e la dimensione delle provette sono determinate dalla forma e dalle dimensioni dei prodotti da esaminare. La provetta si chiama proporzionale quando la lunghezza l_0 è uguale a $5,65 \cdot \sqrt{S_0}$ oppure quando $l_0 = 5 \cdot d$ se la sezione è tonda, di diametro d .

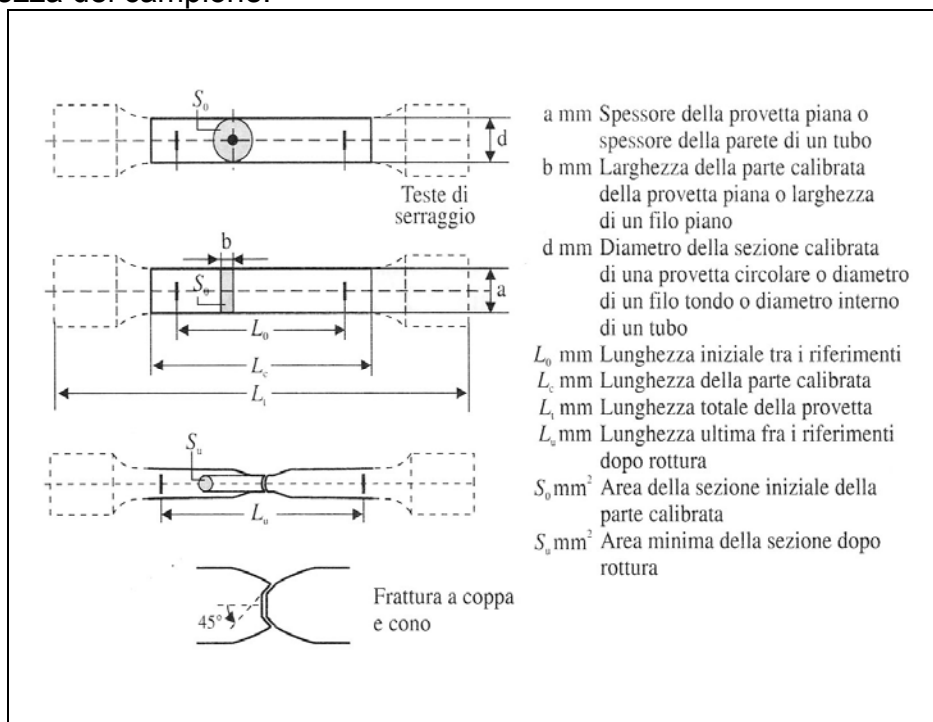


Figura 1.10

Inoltre, sono riportate in sezione due tipi di provette che si possono ricavare da fili, barre, profilati con diametro o lato $\geq 4\text{mm}$ oppure da lamiere con spessore $\geq 3\text{mm}$.

Inoltre, sulla superficie della provetta si delimita una lunghezza incidendo due tacche di riferimento distanti non meno di 20mm . Dopo aver determinato l'area della sezione iniziale e aver marcato la lunghezza iniziale, la provetta è posizionata con appropriati dispositivi nella macchina di prova in modo che il carico sia applicato il più assialmente possibile.

PARTE II: tensioni piane e tridimensionali (cerchi di mohr)

Sforzi combinati: introduzione

Le prove meccaniche (di trazione, compressione, flessione e torsione) possono essere usate per determinare in quali condizioni un metallo snerva sotto l'azione di un semplice sforzo di compressione o taglio.

Tutti i processi di lavorazione meccanica dei metalli (estrusione, laminazione, fucinatura e trafilatura) implicano l'applicazione di un sistema di sforzi che è più complesso rispetto alle metodologie utilizzate per l'analisi di queste stesse tensioni, ma, è possibile analizzare questi sforzi riferendoli ai criteri di snervamento, i quali indicano consentono di calcolare sotto quali livelli di sforzo si verifica scorrimento plastico.

Una rappresentazione introdotta da Otto Mohr è molto utile a tal fine, specialmente negli stati di sforzo piano bidimensionali.

Cerchio di mohr per uno stato di sforzo piano

Dato un elemento prismatico, consideriamo la direzione principale dello sforzo σ'_x , normale al piano inclinato ΔS (fig. 2.2 - superficie gialla), e lo sforzo di taglio τ'_{xy} parallelo alla superficie ΔS , come in figura:

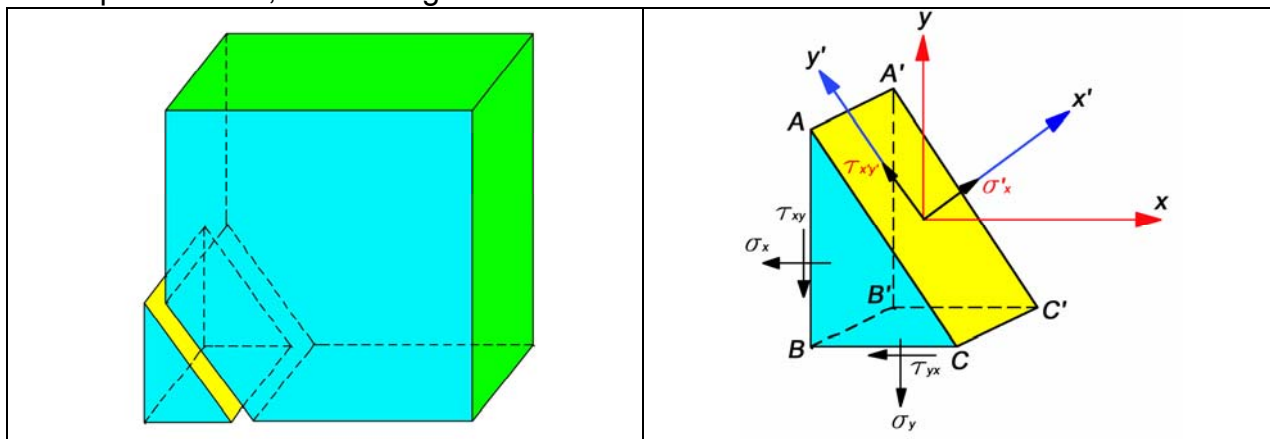


Figura 2.1

Figura 2.2

Le aree delle faccette dell'elementino misurano:

$$\Delta S = \overline{AA'} \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{AA'} \cdot \overline{AB} = \Delta S \cdot \cos \theta$$

$$\overline{BB'} \cdot \overline{BC} = \Delta S \cdot \sin \theta$$

L'angolo θ è compreso tra gli assi x e x' e, per costruzione, è anche l'angolo \widehat{BAC} .

Gli sforzi σ_x e $\tau_{x'y'}$ rappresentano le componenti associate allo stesso elemento dopo che questo è stato ruotato di un angolo θ attorno all'asse cartesiano z ; vedi figure 2.3 e 2.4:

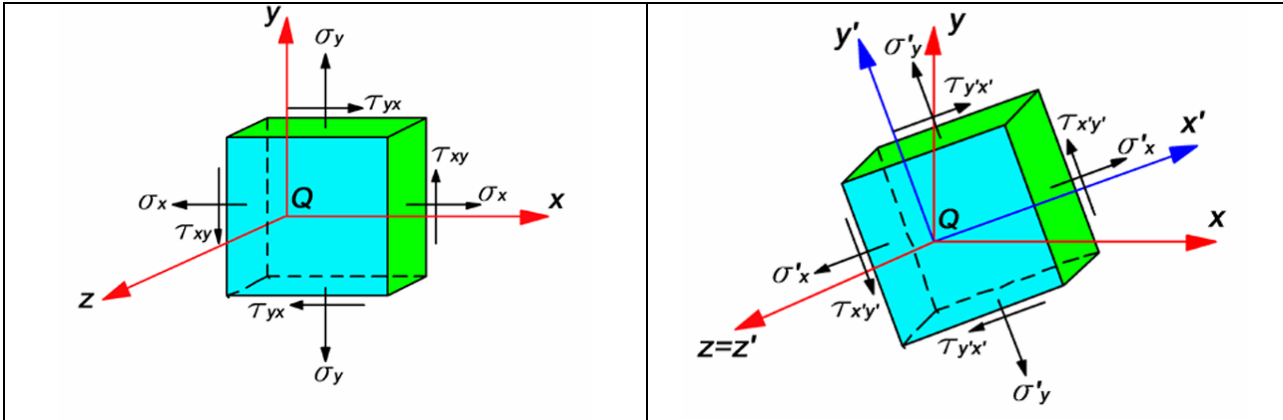


Figura 2.3

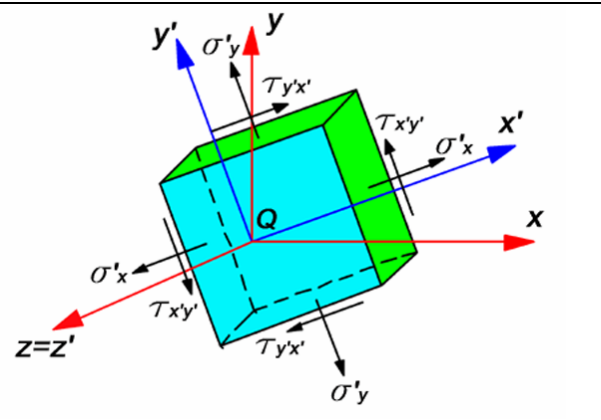


Figura 2.4

Trattandosi di sforzi piani, quindi bidimensionali, ne consegue che:

$$\begin{cases} \sigma_z = 0 \\ \tau_{zx} = 0 \\ \tau_{zy} = 0 \end{cases}$$

inoltre, è facilmente dimostrabile:

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{x'y'} = \tau_{y'x'} \end{cases}$$

Per calcolare lo sforzo normale σ_x e lo sforzo tangenziale τ_{xy} esercitati sul piano generico ΔS perpendicolare all'asse x' (inclinato arbitrariamente di un angolo θ rispetto agli assi x e y), si considera un elemento prismatico con le facce perpendicolari agli assi x e y e x' . Avendo indicato l'area obliqua con ΔS , le aree perpendicolari agli assi x e y , coerentemente all'angolo θ , si esprimono in funzione di quest'ultimo:

$\Delta S \cdot \cos \theta$ indica la faccia perpendicolare all'asse x

$\Delta S \cdot \sin \theta$ indica la faccia perpendicolare all'asse y

Poiché l'elemento prismatico è in equilibrio, utilizzando le componenti lungo gli assi x' e y' , si scrivono le seguenti equazioni di equilibrio [2.1.1]:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \sigma'_x \cdot \Delta S - \sigma_x \cdot (\Delta S \cdot \cos \theta) \cdot \cos \theta - \tau_{xy} \cdot (\Delta S \cdot \cos \theta) \sin \theta - \sigma_y \cdot (\Delta S \cdot \sin \theta) \cdot \sin \theta - \tau_{xy} \cdot (\Delta S \cdot \sin \theta) \cos \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \tau_{xy} \cdot \Delta S + \sigma_x \cdot (\Delta S \cdot \cos \theta) \cdot \sin \theta - \tau_{xy} \cdot (\Delta S \cdot \cos \theta) \cos \theta - \sigma_y \cdot (\Delta S \cdot \sin \theta) \cdot \cos \theta - \tau_{xy} \cdot (\Delta S \cdot \sin \theta) \sin \theta = 0$$

dividendo ambo i membri delle due equazioni di equilibrio con ΔS , ed esplicitando σ'_x dalla prima equazione e τ_{xy} dalla seconda equazione di equilibrio, si ottiene:

$$\sigma'_x = \sigma_x \cdot \cos^2 \theta + \sigma_y \cdot \sin^2 \theta + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\tau_{xy} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + \tau_{xy} \cdot (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

[2.1.2]

Ricordando le relazioni trigonometriche:

$$\begin{cases} \sin(2 \cdot \theta) = 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \cos(2 \cdot \theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos \theta}{2} \\ \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos \theta}{2} \end{cases}$$

l'espressione [2.1.2] di σ_x diventa:

$$\sigma_x = \sigma_x \cdot \frac{1 + \cos \theta}{2} + \sigma_y \cdot \frac{1 - \cos \theta}{2} + \tau_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \theta)$$

oppure:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \theta) \quad [2.1.3]$$

Sostituendo le relazioni trigonometriche nell'espressione [2.1.2] dello sforzo tangenziale τ_{xy} , si ottiene la relazione:

$$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \theta) \quad [2.1.4]$$

Se τ_{xy} si sceglie con il verso opposto a quanto indicato nella figura 2.2, la [2.1.4] diventa:

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \theta) - \tau_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \theta)$$

Per ottenere l'espressione dello sforzo normale σ_y è sufficiente sostituire $(\theta + \pi/2)$ all'angolo θ dell'equazione [2.1.3] di σ_x , quindi:

$$\sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta + \pi) + \tau_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \theta + \pi) \quad [2.1.5]$$

essendo:

$$\cos(2 \cdot \theta + \pi) = -\cos(2 \cdot \theta)$$

$$\sin(2 \cdot \theta + \pi) = -\sin(2 \cdot \theta)$$

l'equazione [2.1.5] di σ_y diventa:

$$\sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) - \tau_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \theta) \quad [2.1.6]$$

Si nota che, sommando membro a membro le equazioni [2.1.3] e [2.1.5] delle componenti degli sforzi normali σ_x e σ_y si ottiene:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_x + \sigma_y \quad [2.1.7]$$

Riassumendo, le espressioni delle componenti piane di sforzo sono:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \theta) \\ \sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) - \tau_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \theta) \\ \tau_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \theta) \end{cases} \quad [2.1.8]$$

Si nota che esse rappresentano le equazioni parametriche di un cerchio; questo significa che, se si sceglie un sistema di assi ortogonali e si riporta un punto di ascissa σ_x e di ordinata τ_{xy} per ogni determinato valore del parametro θ , tutti i punti ottenuti in questo modo giaceranno su un cerchio.

Nell'equazione [2.1.3] di σ_x si porta al primo membro $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$, quindi diventa:

$$\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \theta)$$

elevando al quadrato ambo i membri:

$$\left(\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \theta) \right)^2$$

elevando al quadrato ambo i membri anche nell'equazione dello sforzo tangenziale [2.1.4]:

$$\tau_{x'y'}^2 = \left(-\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \theta) \right)^2$$

Ora, sommando membro a membro si ottiene:

$$\left(\sigma_x' - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \theta) \right)^2 + \left(-\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \theta) \right)^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \theta) \right)^2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cdot \tau_{xy} \cdot \sin(4 \cdot \theta) + \left(\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 - \tau_{xy}^2 \right) \cdot \cos^2(2 \cdot \theta) + \tau_{xy}^2 \\ \left(-\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \theta) \right)^2 &= -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cdot \tau_{xy} \cdot \sin(4 \cdot \theta) - \left(\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 - \tau_{xy}^2 \right) \cdot \cos^2(2 \cdot \theta) + \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 \end{aligned} \right.$$

la somma del secondo membro dell'equazione, diventa:

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cdot \tau_{xy} \cdot \sin(4 \cdot \theta) + \left(\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 - \tau_{xy}^2 \right) \cdot \cos^2(2 \cdot \theta) + \tau_{xy}^2 - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cdot \tau_{xy} \cdot \sin(4 \cdot \theta) - \left(\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 - \tau_{xy}^2 \right) \cdot \cos^2(2 \cdot \theta) + \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2$$

in cui si elidono i termini contenenti il parametro θ :

~~$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cdot \tau_{xy} \cdot \sin(4 \cdot \theta) + \left(\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 - \tau_{xy}^2 \right) \cdot \cos^2(2 \cdot \theta) + \tau_{xy}^2 - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cdot \tau_{xy} \cdot \sin(4 \cdot \theta) - \left(\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 - \tau_{xy}^2 \right) \cdot \cos^2(2 \cdot \theta) + \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2$$~~

con i termini rimanenti si ottiene l'equazione:

$$\left(\sigma_x' - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 \quad [2.1.9]$$

Definendo:

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad [2.1.10]$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

l'equazione [2.1.9] si riscrive nella forma:

$$\left(\sigma_x' - \sigma_{med} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \quad [2.1.11]$$

la quale rappresenta l'equazione di un cerchio di raggio R centrato nel punto C di ascissa σ_{med} e ordinata 0 (fig. 2.5).

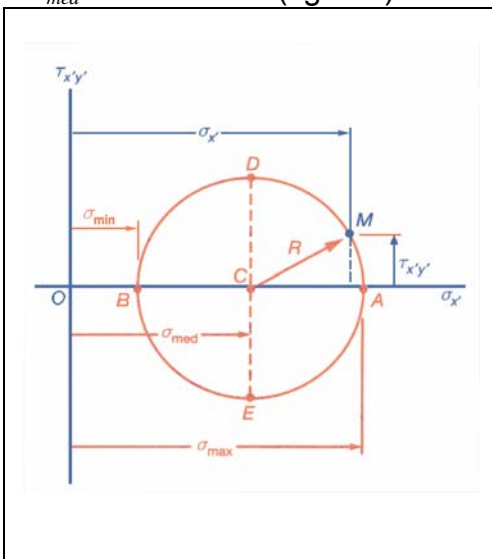


Figura 2.5

Nella figura 2.5, i due punti A e B in cui il *cerchio di Mohr* (dal nome dell'ingegnere tedesco Otto Mohr 1835-1918 che per primo lo scoprì) interseca l'asse orizzontale, sono di particolare interesse: il punto A corrisponde al massimo valore dello sforzo normale σ_x' , mentre il punto B corrisponde al suo valore minimo. Inoltre entrambi i punti corrispondono a un valore nullo dello sforzo tangenziale $\tau_{x'y'}$.

Così i valori θ_p del parametro θ che corrispondono ai punti A e B possono essere ottenuti imponendo $\tau_{x'y'} = 0$ nell'equazione [2.1.4], oppure differenziando σ_x' nell'equazione [2.1.3] e imponendo la derivata:

$$\frac{d\sigma_x'}{d\theta} = 0$$

Ora si svilupperanno entrambi i metodi per il calcolo di θ_p .

$$\begin{cases} \tau_{x'y'} = 0 \\ \tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \theta) \end{cases}$$

quindi:

$$-\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \theta) = 0 \Rightarrow \tan(2 \cdot \theta_p) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow \theta_p = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$

oppure:

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = 0 \Rightarrow -(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin(2 \cdot \theta) + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \theta) = 0 \Rightarrow \tan(2 \cdot \theta_p) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow \theta_p = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$

L'equazione:

$$\tan(2 \cdot \theta_p) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad [2.1.12]$$

definisce due valori $2 \cdot \theta_p$ che differiscono di π radianti e dunque due valori θ_p che differiscono di $\pi/2$ radianti.

Poiché i due valori θ_p definiti dall'equazione [2.1.12] sono stati ottenuti imponendo $\tau_{x'y'} = 0$,

è chiaro che sui piani principali non vengono esercitati sforzi tangenziali.

Nella rappresentazione grafica del cerchio di Mohr (figura 2.5) si osserva:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{med}} + R$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{\text{med}} - R$$

[2.1.13]

Sostituendo le espressioni [2.1.10] nell'equazioni [2.1.13]:

$$\begin{cases} \sigma_{\text{med}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_{\max} = \sigma_{\text{med}} + R \\ \sigma_{\min} = \sigma_{\text{med}} - R \end{cases}$$

si ottiene:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad [2.1.14]$$

Il raggio del cerchio di Mohr (figura 2.5) essendo pari alla differenza tra σ_{\max} e σ_{\min} , si scrive:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \quad [2.1.15]$$

Ora, imponendo la condizione $\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = 0$, si ottiene:

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \theta) = 0 \Rightarrow \tan(2 \cdot \theta_s) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow \theta_s = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$

$$\tan(2 \cdot \theta_s) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad [2.1.16]$$

questo risultato, definisce due valori $2 \cdot \theta_s$ che differiscono di π radianti (180°) e dunque due valori θ_s che differiscono di $\pi/2$ radianti (90°).

Osservando dalla figura 2.5 che il massimo valore dello sforzo tangenziale è pari al raggio R del cerchio, e richiamando la seconda equazione della [2.1.10], si scrive:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad [2.1.17]$$

Paragonando θ_p della [2.1.12] e il valore di θ_s della [2.1.16] si nota che gli angoli $(2 \cdot \theta_p)$ e $(2 \cdot \theta_s)$ differiscono di 90° e quindi gli angoli θ_p e θ_s differiscono di 45° (fig. 2.7).

Si conclude dunque, che i piani di massimo sforzo tangenziale sono inclinati di 45° ($\pi/4$ radianti) rispetto ai piani principali.

Ora si possono ricavare gli sforzi normali, cioè σ_x e σ_y , e lo sforzo tangenziale τ_{xy} esercitati in corrispondenza del piano di massimo sforzo tangenziale inclinato di 45° rispetto ai piani principali (figura 2.6 e micrografia 6.30 della parte VI):

$$\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x'(\max) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \tau_{xy} \\ \sigma_y'(\max) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \tau_{xy} \\ \tau_{x'y'}(\max) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \end{cases}$$

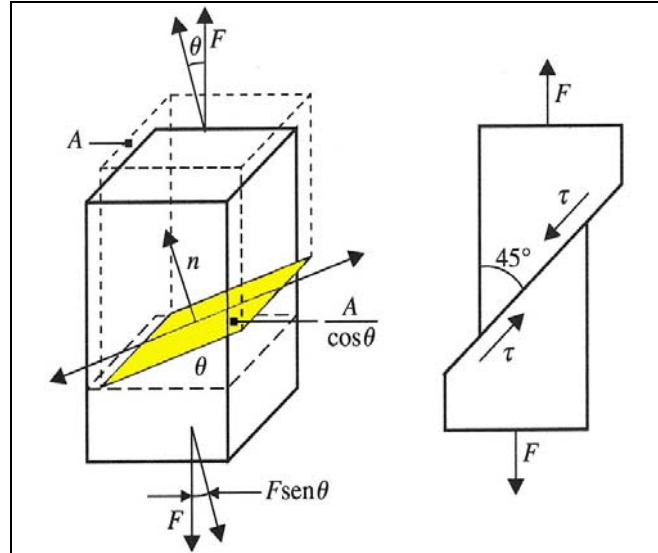


Figura 2.6

Nel caso di trazione semplice:

$$\begin{cases} \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x'(\max) = \frac{\sigma_x}{2} \\ \sigma_y'(\max) = \frac{\sigma_x}{2} \\ \tau_{x'y'}(\max) = -\frac{\sigma_x}{2} \end{cases}$$

Quindi, se in un provino di sezione A si applica una forza di trazione F , questa genera, su un piano cristallino inclinato di un angolo θ rispetto ad A , una componente di taglio $F \cdot \sin \theta$, che agisce sull'area $A / \cos \theta$, provocando uno sforzo di taglio:

$$\tau = \frac{F}{A} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = \sigma \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \quad [2.1.18]$$

Il cui valore massimo è raggiunto nel piano cristallino inclinato di 45° , per cui:

$$\tau = \frac{F}{A} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{F}{A} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sigma}{2} \quad [2.1.19]$$

Quindi, i piani che si muovono per primi sotto l'azione della forza F dovrebbero essere quelli orientati a 45° rispetto alla direzione dello sforzo. Dato però che le dislocazioni si muovono più facilmente sui piani e nelle direzioni di massima densità atomica, la deformazione inizierà su quelli, tra i piani favoriti cristallograficamente, il cui orientamento è più vicino ai 45° rispetto alla direzione dell'asse di sollecitazione. Lo scorrimento successivo di piani diversamente orientati provoca a livello microscopico una deformazione a zig zag, mediamente orientata intorno ai 45° rispetto allo sforzo, e spiega il progredire della deformazione con l'aumento del carico, evidenziata dalla curva σ/ε .

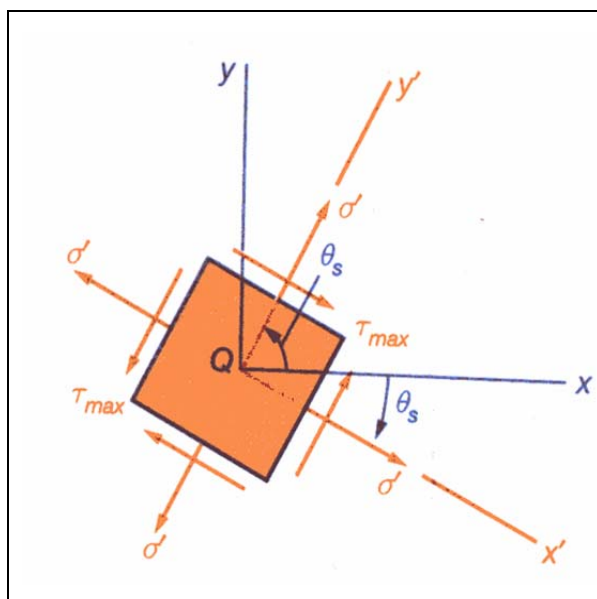


Figura 2.7

Qualunque sia la possibilità di movimento di una dislocazione (in campo elastico) essa non può superare il bordo del grano, per cui la deformabilità plastica e il carico di snervamento di un metallo sono condizionati anche dalle dimensioni del grano cristallino: a parità di altre condizioni i metalli a grano fine hanno pertanto carico di snervamento maggiore rispetto a quelli a grano grosso.

Il meccanismo sopra descritto è responsabile del diverso comportamento alla deformazione plastica dei materiali metallici, ceramici e polimerici. I metalli sono intrinsecamente malleabili in quanto la mancanza di direzionalità del legame metallico minimizza il disturbo alla configurazione elettronica del legame quando gli atomi si spostano lungo un piano di scorrimento. Ben diverso è invece il caso dei ceramici, in quanto questi materiali sono dotati di legami ionici e/o covalenti. Nel caso del legame covalente gli elettroni sono localizzati in corrispondenza del legame tra gli atomi rendendo particolarmente difficile l'allontanamento definitivo degli stessi. Nel caso invece di legame ionico la deformazione risulta fortemente ostacolata in certe direzioni, per l'azione di repulsione di ioni dello stesso segno che verrebbero ad affacciarsi gli uni agli altri per spostamento del reticolo, e favorita in quelle direzioni che mantengono la posizione relativa tra ioni di segno opposto. Ancora diverso è il caso di materiali polimerici, per i quali la deformazione non è legata al movimento di dislocazioni, ma è condizionata dalla presenza di lunghe catene, lineari e/o ramificate, dal modo in cui sono legate tra loro e dalla temperatura. In ogni caso la deformazione plastica comporta lo scorrimento e l'allineamento irreversibile di segmenti di catene.

Cerchio di Mohr per gli stati di deformazione piani

Riscrivendo le espressioni delle componenti piane di sforzo mostrate nella [2.1.8] rispetto alle deformazioni si ottiene:

$$\begin{cases} \varepsilon_x' = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \gamma_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \theta) \\ \varepsilon_y' = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) - \gamma_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \theta) \\ \gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \sin(2 \cdot \theta) + \gamma_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \theta) \end{cases} \quad [2.2.1]$$

Il cerchio di Mohr, per gli stati di deformazione, si esprime:

$$\left(\varepsilon_x' - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{x'y'}}{2} \right)^2 = \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 \quad [2.2.2]$$

Definendo:

$$\varepsilon_{med} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \quad [2.2.3]$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2}$$

l'equazione [2.2.2] si riscrive nella forma:

$$\left(\varepsilon_x' - \varepsilon_{med} \right)^2 + \frac{\gamma_{x'y'}^2}{4} = R^2 \quad [2.2.4]$$

In figura 2.8, i punti A e B in cui cerchio di Mohr interseca l'asse orizzontale corrispondono alle *deformazioni principali* ε_{max} e ε_{min} , da cui:

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_{med} + R \quad [2.2.5]$$

$$\varepsilon_{min} = \varepsilon_{med} - R$$

Si conclude:

$$\varepsilon_{max, min} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2} \quad [2.2.6]$$

Imponendo $\gamma_{x'y'} = 0$, cioè:

$$\begin{cases} \gamma_{x'y'} = 0 \\ \gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \sin(2 \cdot \theta) + \gamma_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \theta) \end{cases} \quad [2.2.7]$$

si ricava l'equazione:

$$(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \sin(2 \cdot \theta) - \gamma_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \theta) = 0 \quad [2.2.8]$$

che fornisce il valore dell'angolo ($2 \cdot \theta_p$):

$$\tan(2 \cdot \theta_p) = \frac{2 \cdot \gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad [2.2.9]$$

Il valore massimo dello scorrimento angolare nel piano è dato (richiamando il valore del raggio R della [2.2.2]):

$$\gamma_{max} = 2 \cdot R = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad [2.2.10]$$

Le deformazioni provocate in corrispondenza del piano di massimo sforzo tangenziale inclinato di 45° rispetto ai piani principali, si esprimono:

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x' = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \gamma_{xy} \\ \varepsilon_y' = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \gamma_{xy} \\ \gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \end{cases}$$

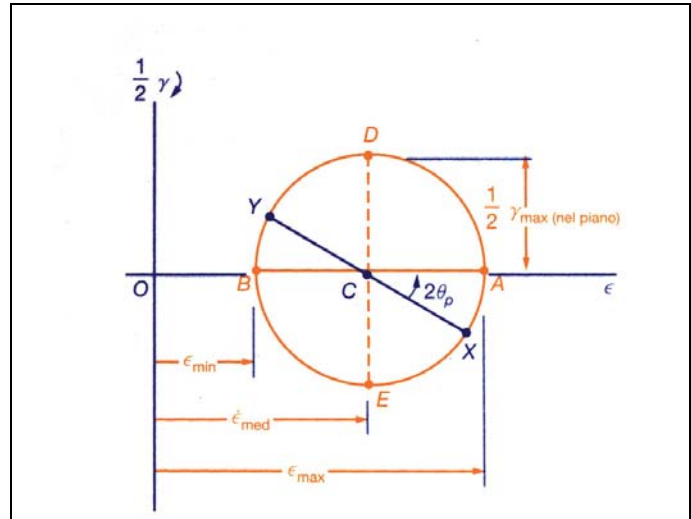


Figura 2.8

Cerchio di mohr per uno stato di sforzo tridimensionale

In un sistema tridimensionale ci sono tre facce di un elementino perpendicolari tra loro e gli sforzi tangenziali sono nulli.

Gli sforzi principali sono σ_1 , σ_2 e σ_3 in cui sussiste la relazione:

$$|\sigma_1| > |\sigma_2| > |\sigma_3|$$

Considerando il generico elementino tetraedico (fig. 2.9) e imponendo che la risultante delle forze sia nulla, in quanto l'elementino è in equilibrio, si ottiene l'equazione:

$$\sum F_n = 0$$

quindi:

$$\sigma_n \cdot \Delta A - (\sigma_x \cdot \Delta A \cdot n_x) \cdot n_x - (\tau_{xy} \cdot \Delta A \cdot n_x) \cdot n_y - (\tau_{xz} \cdot \Delta A \cdot n_x) \cdot n_z - (\tau_{yx} \cdot \Delta A \cdot n_y) \cdot n_x - (\sigma_y \cdot \Delta A \cdot n_y) \cdot n_y - (\tau_{yx} \cdot \Delta A \cdot n_y) \cdot n_z - (\tau_{zx} \cdot \Delta A \cdot n_z) \cdot n_x - (\tau_{zy} \cdot \Delta A \cdot n_z) \cdot n_y - (\sigma_z \cdot \Delta A \cdot n_z) \cdot n_z = 0$$

dividendo per l'area ΔA :

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot n_x^2 + \sigma_y \cdot n_y^2 + \sigma_z \cdot n_z^2 + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot n_x \cdot n_y + 2 \cdot \tau_{yz} \cdot n_y \cdot n_z + 2 \cdot \tau_{zx} \cdot n_z \cdot n_x$$

Si noti che l'espressione ottenuta per lo sforzo normale σ_n è una forma quadratica in n_x , n_y e n_z . Ne consegue che si potrebbero scegliere gli assi coordinati in modo che il secondo membro dell'equazione di sopra, si riduca alla somma di tre termini contenenti i quadrati dei coseni direttori. Indicando gli sforzi normali, degli assi coordinati corrispondenti, con σ_1 , σ_2 e σ_3 , e i coseni direttori con n_1 , n_2 e n_3 , si scrive:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cdot n_1^2 + \sigma_2 \cdot n_2^2 + \sigma_3 \cdot n_3^2$$

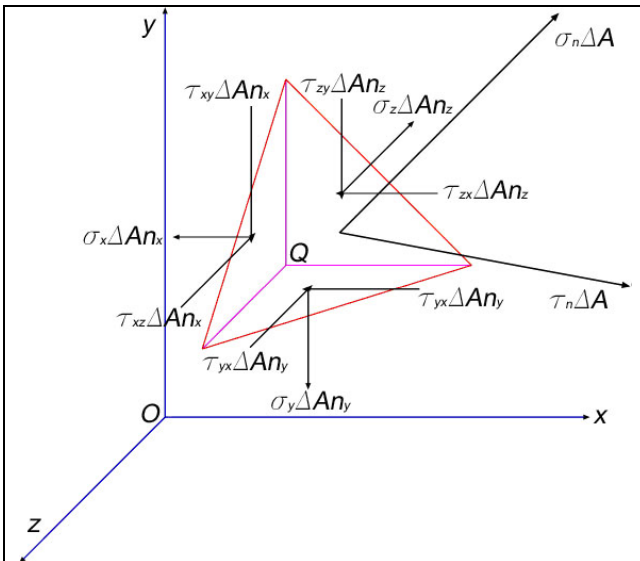


Figura 2.9

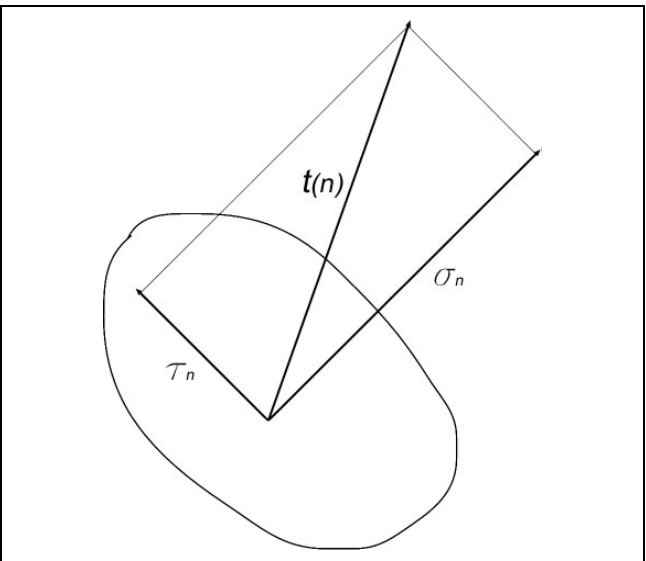


Figura 2.10

Da ciò che si evince in fig. 2.10, si può scrivere:

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2 \cdot n_1^2 + \sigma_2^2 \cdot n_2^2 + \sigma_3^2 \cdot n_3^2$$

Ricordando dalla trigonometria che:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

Risolvendo rispetto ai coseni direttori si ottiene:

$$\begin{cases} n_1^2 = \frac{(\sigma_n - \sigma_2) \cdot (\sigma_n - \sigma_3) \cdot \tau_n^2}{(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)} \\ n_2^2 = \frac{(\sigma_n - \sigma_1) \cdot (\sigma_n - \sigma_3) \cdot \tau_n^2}{(\sigma_2 - \sigma_1) \cdot (\sigma_2 - \sigma_3)} \\ n_3^2 = \frac{(\sigma_n - \sigma_2) \cdot (\sigma_n - \sigma_1) \cdot \tau_n^2}{(\sigma_3 - \sigma_1) \cdot (\sigma_3 - \sigma_2)} \end{cases}$$

Concludendo, ci sono di conseguenza tre cerchi nel diagramma σ_n e τ_n riferiti ai tre sforzi principali (fig. 2.11), di equazione:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

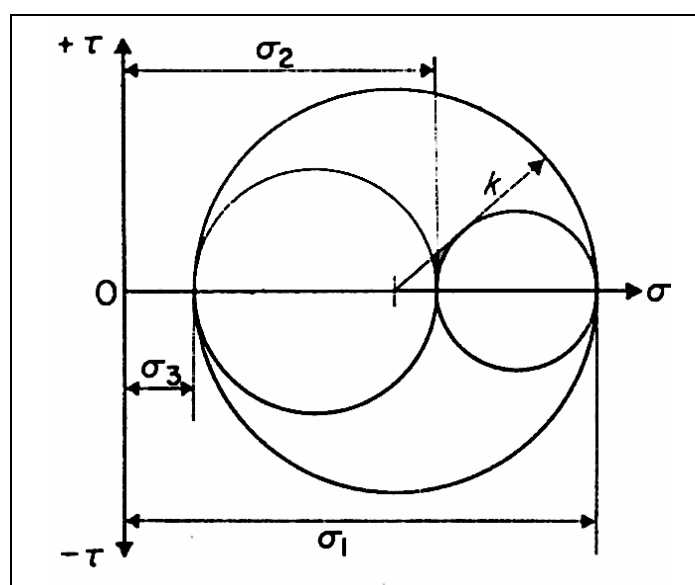


Figura 2.11

Sollecitazione locale e quadrica indicatrice

Scrivendo l'espressione dello sforzo nelle tre direzioni principali di un elemento sollecitato tridimensionalmente, si osserva che esiste in P una faccetta in cui il suo sforzo è $p_n = \sigma \cdot n$ (fig. 2.12), da cui per l'equilibrio di Cauchy si ottiene:

$$\begin{cases} \sigma \cdot n_x = \sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z \\ \sigma \cdot n_y = \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{zy} \cdot n_z \\ \sigma \cdot n_z = \tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{zy} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z \end{cases}$$

Le direzioni principali n_x , n_y e n_z acquistano il significato di autovettori del sistema lineare omogeneo con i corrispondenti autovalori σ :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

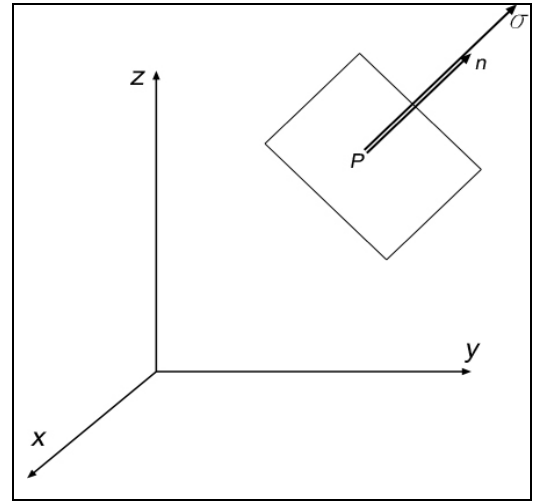


Figura 2.12

Per determinare l'equazione caratteristica dello stato di sforzo si impone nullo il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Posto:

$$T_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$T_{II} = \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x + \sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2$$

$$T_{III} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{zx}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 + 2 \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} \cdot \tau_{yx}$$

in cui T_I rappresenta l'invariante lineare di primo ordine (raccolge tutti i termini di primo grado), T_{II} rappresenta l'invariante quadratico di secondo ordine (raccolge tutti i termini di secondo grado) ed infine T_{III} rappresenta l'invariante cubico di terzo ordine (raccolge tutti i termini di terzo grado). Dal calcolo del determinante si ottiene:

$$\sigma^3 - T_I \cdot \sigma^2 + T_{II} \cdot \sigma - T_{III} = 0$$

che esprime l'equazione caratteristica dello stato di sforzo. L'interpretazione geometrica dello sforzo locale è una quadrica denominata ellissoide di Lamé (fig. 2.13).

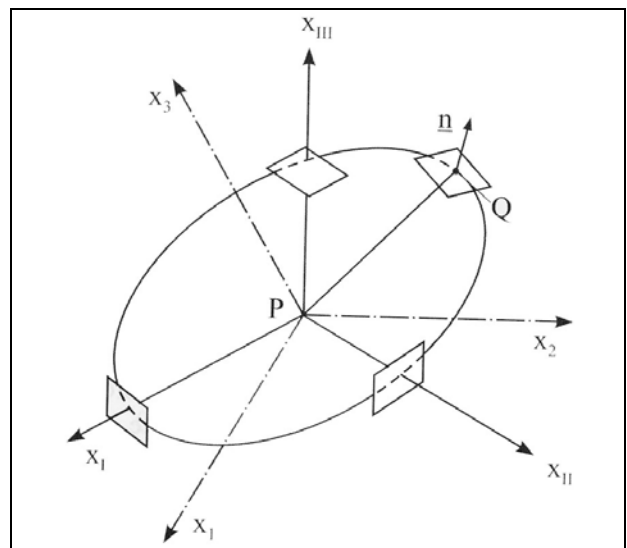


Figura 2.13

Le tre radici σ_I , σ_{II} e σ_{III} della equazione caratteristica dello stato di sforzo, sono indipendenti dal riferimento adottato e sono peraltro completamente determinate quando si conoscono i tre coefficienti; anche questi sono dunque indipendenti dal riferimento. Prendono il nome di *invarianti fondamentali* dello stato di sforzo.

Ponendo ciascun autovalore σ_I , σ_{II} e σ_{III} nel sistema lineare omogeneo, si ottiene ogni volta una autosoluzione per quel sistema: i tre autovettori n_I , n_{II} e n_{III} così ottenuti, definiscono le tre direzioni principali in \mathbf{P} , ovvero le tre faccette principali del fascio in \mathbf{P} sulle quali lo sforzo tangenziale τ è nullo (fig. 2.14).

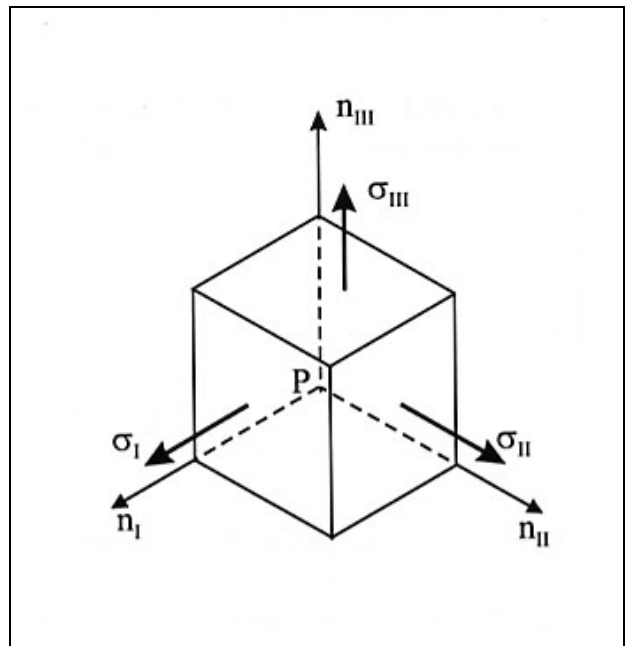


Figura 2.14

La matrice del tensore degli sforzi si riduce alla forma diagonale:

$$\begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

PARTE III: criteri di snervamento

Criterio del massimo sforzo di taglio (criterio di Tresca)

Il criterio di Tresca (Henri Edouard Tresca 1814-1885) si basa sull’osservazione in cui lo snervamento dei materiali duttili è provocato da slittamenti del materiale lungo superfici oblique (scorrimento plastico) ed è dovuto principalmente a sforzi tangenziali. Per cui, secondo questo criterio, un dato elemento strutturale è sicuro fino a che il massimo valore τ_{\max} dello sforzo tangenziale, in quel componente, rimane minore del corrispondente valore dello sforzo tangenziale in un provino dello stesso materiale, sottoposto a trazione, quando il provino stesso comincia a snervarsi.

Ricordando che il massimo valore dello sforzo tangenziale sotto carico assiale centrato è pari alla metà del valore del corrispondente sforzo assiale normale, si conclude che il massimo sforzo tangenziale in un provino sottoposto a trazione vale:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_Y$$

quando il provino comincia a snervarsi.

Per uno stato di sforzo piano, il massimo valore τ_{\max} dello sforzo tangenziale, con $\sigma_{\max} = \sigma_1$ e $\sigma_{\min} = \sigma_2$, è pari a:

$$\tau_{\max} = \left| \frac{1}{2} \cdot \sigma_{\max} \right|$$

se gli sforzi principali sono entrambi positivi o entrambi negativi, mentre, assume il valore:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = Kost$$

se lo sforzo massimo è positivo e quello minimo è negativo. Così, se gli sforzi principali σ_1 e σ_2 hanno lo stesso segno, il criterio del massimo sforzo tangenziale porta a:

$$|\sigma_1| < \sigma_Y \text{ e } |\sigma_2| < \sigma_Y$$

Se gli sforzi principali σ_1 e σ_2 hanno segno opposto, il criterio del massimo sforzo tangenziale richiede $|\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_Y$

Le relazioni ottenute sono rappresentate graficamente in figura 3.1.

Ogni stato di sforzo assegnato è rappresentato in tale figura da un punto di coordinate σ_1 e σ_2 , dove σ_1 e σ_2 sono i due sforzi principali. Se questo punto cade all’interno dell’area mostrata, il componente strutturale è sicuro. Se cade al di fuori di quest’area, il componente cederà per snervamento del materiale. L’esagono associato all’inizio dello snervamento nel materiale è noto come *esagono di Tresca*, la cui area è uguale a:

$$\Lambda_T = 3 \cdot \sigma_Y^2$$

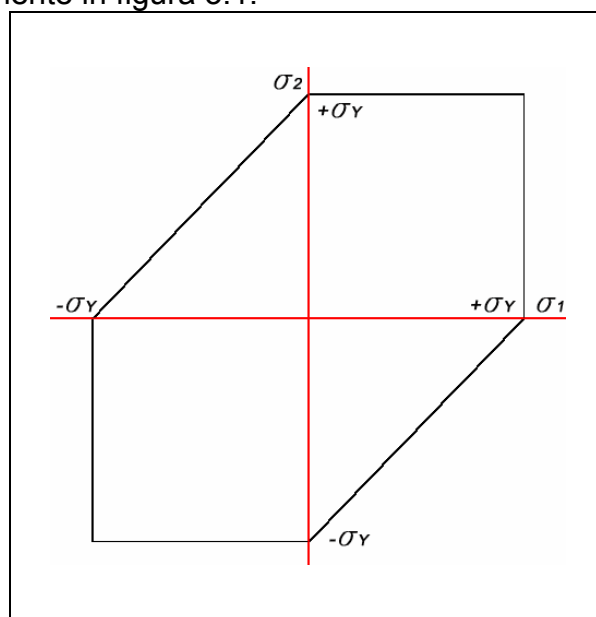


Figura 3.1

Criterio della massima energia di distorsione (criterio di Von Mises)

Nel campo elastico, questo criterio si basa sulla determinazione dell'energia di distorsione di un dato materiale, cioè dell'energia associata alle variazioni di forma del materiale. Secondo questo criterio, noto anche come *criterio di Von Mises* (Richard Von Mises 1883-1953), un dato componente strutturale è sicuro fino a che il massimo valore dell'energia di distorsione per unità di volume in quel materiale rimane al di sotto dell'energia di distorsione per unità di volume che provoca lo snervamento in un provino del materiale sottoposto a trazione.

Nel caso di un corpo generico soggetto allo sforzo delle sei componenti $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ e τ_{yz} , la densità di energia volumica di deformazione può essere espressa come :

$$u = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz}) \quad \text{dimensionalmente: } \frac{J}{m^3} \quad [3.2.1]$$

ricordando dalla *teoria dell'elasticità* la legge costitutiva del materiale (figura 3.2):

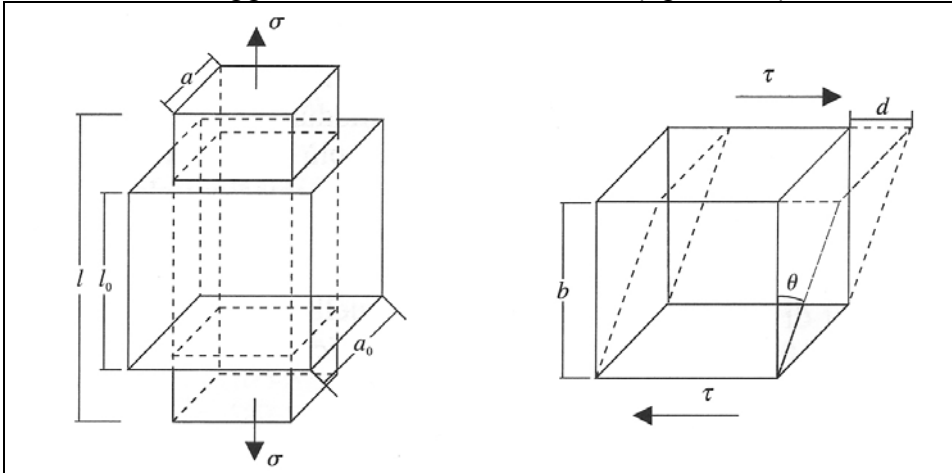
$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_y}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y = -\frac{\nu \cdot \sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu \cdot \sigma_x}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{array} \right.$$


Figura 3.2

modulo elastico trasversale:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

E Modulo elastico longitudinale (di Young)
 ν Coefficiente di contrazione trasversale (di Poisson)

deformazione:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

scorrimento angolare:

$$\gamma = \frac{d}{b} = \tan \theta \approx \theta$$

Il tensore di deformazione simmetrico si esprime:

$$[S] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Nel caso di trazione semplice:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_y = -\frac{\nu \cdot \sigma_x}{E} \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu \cdot \sigma_x}{E} \end{array} \right.$$

con la conseguente dilatazione volumetrica:

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{(1 - 2 \cdot \nu) \cdot \sigma_x}{E}$$

Sostituendo i valori delle deformazioni (ε_x , ε_y e ε_z) e degli scorrimenti angolari (γ_{xy} , γ_{xz} e γ_{yz}) nella espressione [3.2.1]:

$$u = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2 \cdot \nu \cdot (\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x)) + \frac{1}{G} \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad [3.2.2]$$

Se come assi coordinati si utilizzano gli assi principali relativi al punto considerato, gli sforzi tangenziali si annullano, quindi:

$$u = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \nu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)) \quad [3.2.3]$$

La densità di energia u è uguale alla somma dell'energia associata alla variazione di volume nel punto considerato u_v (dovuta agli sforzi normali di compressione), e all'energia associata alla distorsione u_d (dovuta agli sforzi di taglio) sempre nello stesso punto:

$$u = u_v + u_d \quad [3.2.4]$$

Al fine di calcolare u_v e u_d , si introduce il *valor medio degli sforzi principali* nel punto considerato:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad [3.2.5]$$

e si pone:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \bar{\sigma} + \sigma_1' \\ \sigma_2 &= \bar{\sigma} + \sigma_2' \\ \sigma_3 &= \bar{\sigma} + \sigma_3' \end{aligned} \quad [3.2.6]$$

Nel caso di soli sforzi di taglio, σ_1 , σ_2 e σ_3 sono nulli.

Dalla [3.2.5] e [3.2.6] si evince:

$$\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0 \quad [3.2.7]$$

ne consegue che la parte u_v della densità di energia di deformazione che corrisponde ad una variazione di volume dell'elementino può essere ottenuta sostituendo $\bar{\sigma}$ a ognuno degli sforzi principali della [3.2.3].

$$u_v = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \left(3 \cdot \bar{\sigma}^2 - 2 \cdot \nu \cdot (3 \cdot \bar{\sigma}^2) \right) = \frac{3 \cdot \bar{\sigma}^2 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{2 \cdot E} \quad [3.2.8]$$

Sostituendo l'equazione [3.2.5] del valor medio:

$$u_v = \frac{1 - 2 \cdot \nu}{6 \cdot E} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) \quad [3.2.9]$$

Quindi, l'energia di deformazione u_d è espressa da:

$$u_d = u - u_v = \frac{1}{6 \cdot E} \cdot \left(3 \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 6 \cdot \nu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) - (1 - 2 \cdot \nu) \cdot (\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)^2 \right) \quad [3.2.10]$$

Elevando il quadrato della [3.2.10] e riordinando i termini:

$$u_d = \frac{1 + \nu}{6 \cdot E} \cdot \left((\sigma_1^2 - 2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2) + (\sigma_2^2 - 2 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3^2) + (\sigma_3^2 - 2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_1 + \sigma_1^2) \right) \quad [3.2.11]$$

Ciascuna delle espressioni in parentesi nella [3.2.11] rappresenta un quadrato perfetto ed essendo:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \Rightarrow 1 + \nu = \frac{E}{2 \cdot G}$$

l'espressione [3.2.10] dell'energia di deformazione diventa:

$$u_d = \frac{1}{12 \cdot G} \cdot \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right) \quad [3.2.12]$$

Nel caso di sforzo piano, e supponendo che l'asse 3 (parallelo allo sforzo σ_3) sia perpendicolare al piano di sforzo, si ha $\sigma_3 = 0$ e l'equazione [3.2.12] si riduce a:

$$u_d = \frac{1}{6 \cdot G} \cdot (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2) \quad [3.2.13]$$

Considerando il caso particolare di un provino sottoposto a trazione, si nota che, allo snervamento, si ha $\sigma_1 = \sigma_Y$, $\sigma_2 = 0$ e quindi

$$(u_d)_Y = \frac{\sigma_Y^2}{6 \cdot G} \quad [3.2.14]$$

Il criterio della massima energia di distorsione per lo sforzo piano indica che uno stato di sforzo assegnato è sicuro fino a che $u_d < (u_d)_Y$, ovvero, sostituendo a u_d l'espressione data dall'equazione [3.2.13], finchè:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 < \sigma_Y^2 \quad [3.2.15]$$

Oppure, esplicitando la tensione di snervamento si ottiene:

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}$$

La [3.2.15] rappresenta una conica, e per capire di quale conica si tratta, è necessario calcolare gli invarianti.

Data una *conica a centro* di equazione:

$$a \cdot \sigma_1^2 + b \cdot \sigma_2^2 + c \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + d \cdot \sigma_1 + e \cdot \sigma_2 + f = 0$$

con a, b, c, d, e, f costanti.

l'invariante lineare è dato dalla somma:

$$I_1 = a + b = 2$$

per cui $I_1 \neq 0$.

L'invariante quadratico è dato dal determinante:

$$I_q = \begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix} \Rightarrow I_q = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}$$

si deduce che $I_q > 0$.

L'invariante cubico è dato dal determinante:

$$I_c = \begin{vmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \Rightarrow I_c = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_Y^2 \end{vmatrix} = -\frac{3}{4} \sigma_Y^2$$

da cui si evince $I_c \neq 0$

I valori dei tre invarianti indicano che si tratta di una ellisse ruotata e con centro di simmetria nell'origine del sistema di riferimento.

Quindi, la [3.2.15] indica i punti interni di una ellisse ruotata rispetto agli assi coordinati (fig. 3.3) in cui la tensione di snervamento $\sigma_Y = 250$ MPa ed è ruotata, rispetto agli assi cartesiani, di un angolo α :

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{c}{a-b}\right)$$

Ne consegue che la [3.2.15] è ruotata di un angolo α :

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{-1}{1-1}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Perciò l'ellisse, rappresentata in figura 3.3, è inclinata di 45° (indipendentemente dal valore dello snervamento σ_Y), e sulle bisettrici, dei quattro quadranti del piano cartesiano, di equazione $\sigma_2 = \sigma_1$ e $\sigma_2 = -\sigma_1$ giacciono gli assi principali dell'ellisse \overline{AB} e \overline{CD} , e i semiassi misurano:

$$\overline{OA} = \sqrt{2} \cdot \sigma_Y \quad \overline{OC} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sigma_Y$$

con il valore dei semiassi è possibile calcolare l'area dell'ellisse:

$$\Lambda_v = \pi \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OC} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}}{3} \sigma_Y^2$$

l'eccentricità dell'ellisse è data, indipendentemente dalla tensione di snervamento σ_Y :

$$\xi = \frac{\sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2}}{\overline{OA}} \Rightarrow \xi = \frac{\sqrt{(\sqrt{2} \cdot \sigma_Y)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sigma_Y\right)^2}}{\sqrt{2} \cdot \sigma_Y} \Rightarrow \xi = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0,816$$

con la distanza focale ζ :

$$F_1 \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sigma_Y; \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sigma_Y \right)$$

$$F_2 \left(-\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sigma_Y; -\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sigma_Y \right)$$

$$\overline{OF_1} = \overline{OF_2} = \xi \cdot \overline{OA} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \sigma_Y$$

$$\zeta = 2 \cdot \overline{OF_1} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \sigma_Y$$

Alla tensione di snervamento $\sigma_Y = 250$ MPa si ottiene (fig. 3.3):

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 < 250^2 \Rightarrow \sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 < 62500$$

$$\overline{OA} = \sqrt{2} \cdot 250 = 353,5$$

$$\overline{OC} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot 250 \approx 204,1$$

$$\Lambda_v = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot 250^2 \approx 226724,9$$

$$F_1 \left(\frac{250 \cdot \sqrt{6}}{3}; \frac{250 \cdot \sqrt{6}}{3} \right) \approx F_1(204,12; 204,12)$$

$$F_2 \left(-\frac{250 \cdot \sqrt{6}}{3}; -\frac{250 \cdot \sqrt{6}}{3} \right) \approx F_2(-204,12; -204,12)$$

$$\overline{OF_1} = \overline{OF_2} = \frac{500 \cdot \sqrt{3}}{3} \approx 288,68$$

$$\zeta = 2 \cdot \overline{OF_1} = \frac{1000 \cdot \sqrt{3}}{3} \approx 577,35$$

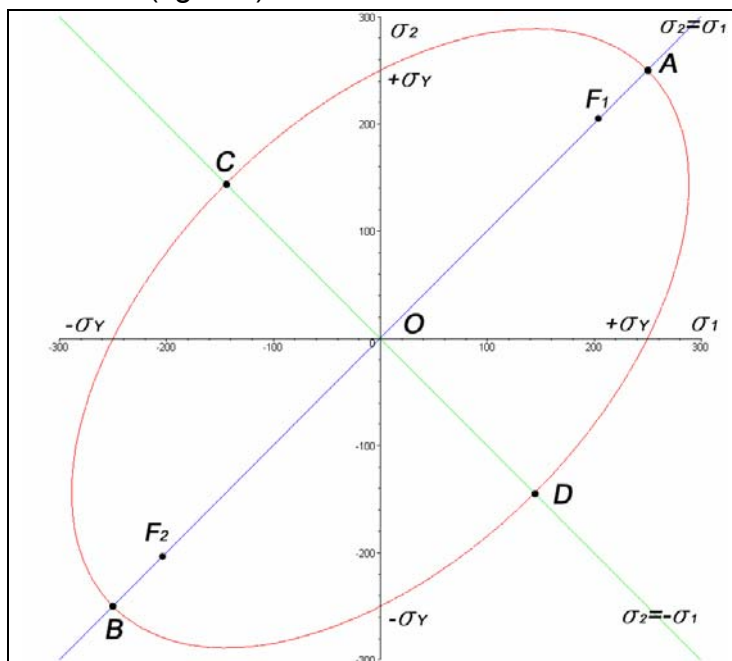


Figura 3.3

Nel caso di uno stato di sforzo generico, si deve utilizzare per u_d l'espressione [3.2.12].

Il criterio della massima energia di distorsione è allora espresso dalla condizione:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 < 2 \cdot \sigma_Y^2 \quad [3.2.16]$$

indicante che uno stato di sforzo assegnato è sicuro se il punto di coordinate σ_1, σ_2 e σ_3 si trova all'interno della superficie definita dall'equazione:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \cdot \sigma_Y^2 \quad [3.2.17]$$

Che può scriversi nella forma equivalente:

$$2 \cdot \sigma_1^2 + 2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot \sigma_3^2 - 2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 - 2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3 - 2 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 - 2 \cdot \sigma_Y^2 = 0 \quad [3.2.18]$$

Oppure, si può esplicitare lo snervamento e scriversi:

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}$$

La [3.2.18] rappresenta la superficie di una *quadrica*, e per individuare di quale tipo di *quadrica* si tratta, è indispensabile ricorrere alla matrice associata e all'*invariante*.

Data l'equazione generale di una *quadrica*:

$$a_{11} \cdot \sigma_1^2 + a_{22} \cdot \sigma_2^2 + a_{33} \cdot \sigma_3^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + 2 \cdot a_{13} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3 + 2 \cdot a_{23} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 + 2 \cdot a_{14} \cdot \sigma_1 + 2 \cdot a_{24} \cdot \sigma_2 + 2 \cdot a_{34} \cdot \sigma_3 + a_{44} = 0$$

il determinante della matrice simmetrica, associata all'equazione della *quadrica*, è rappresentato:

$$|M| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \cdot \sigma_Y^2 \end{vmatrix} = 0$$

Il valore di questo determinante è nullo, ciò implica che si tratta di una *quadrica degenera*; quindi, l'equazione [3.2.18] può essere un cilindro (ellittico, parabolico o iperbolico) o un cono quadratico.

Ora si verifica se ha è una *quadrica a centro*, cioè dotata di un centro di simmetria:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Essendo nullo, ciò implica che la *quadrica* non ha centro di simmetria, per cui si esclude la possibilità che sia un cono, quindi la [3.2.18] è l'equazione di un cilindro.

Per determinare di quale tipo di cono si tratta è necessario stabilire il rango della matrice A ; poiché il determinante è nullo, il rango $r_A \leq 2$. Se un minore, di dimensione 2, della matrice A è diverso da zero, il rango $r_A = 2$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

il valore di questo determinante è diverso da zero, per cui il rango è 2; quindi il cilindro può essere ellittico (o a sezione circolare) o iperbolico.

Se l'*invariante quadratico* è strettamente maggiore di zero, la [3.2.18] è un cilindro ellittico, altrimenti iperbolico:

$$I_q = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow I_q = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow I_q > 0$$

la [3.2.18] rappresenta un cilindro ellittico.

Per stabilire se le generatrici del cilindro ellittico sono inclinate rispetto al sistema di riferimento, è sufficiente adoperare almeno due sezioni, al cilindro, con un piano perpendicolare all'asse σ_3 e osservare come sono posizionati i centri delle ellissi, ottenute con le sezioni.

Prima sezione:

$$\begin{cases} 2 \cdot \sigma_1^2 + 2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot \sigma_3^2 - 2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 - 2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3 - 2 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 - 2 \cdot \sigma_Y^2 = 0 \\ \sigma_3 = 0 \end{cases}$$

si ottiene l'ellisse di equazione:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_Y^2 = 0$$

analoga alla [3.2.15] e di centro $C_1(0,0,0)$

Seconda sezione:

$$\begin{cases} 2 \cdot \sigma_1^2 + 2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot \sigma_3^2 - 2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 - 2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3 - 2 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 - 2 \cdot \sigma_Y^2 = 0 \\ \sigma_3 = K \end{cases}$$

con la costante $K \in \mathbb{R}$ si ottiene il fascio di ellissi di equazione:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - K \cdot \sigma_1 - K \cdot \sigma_2 - \sigma_Y^2 + K^2 = 0$$

rappresentato in figura 3.4, in cui si sono disegnate venti ellissi per:

$K = -10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$ con $\sigma_Y = 250$ MPa .

Il centro $C_2(\sigma_{10}, \sigma_{20}, K)$:

$$\sigma_{10} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{c}{2} & \frac{d}{2} \\ b & \frac{e}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{K}{2} \\ 1 & -\frac{K}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}} = K$$

$$\sigma_{20} = -\frac{\begin{vmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{c}{2} & \frac{e}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{K}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{K}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}} = K$$

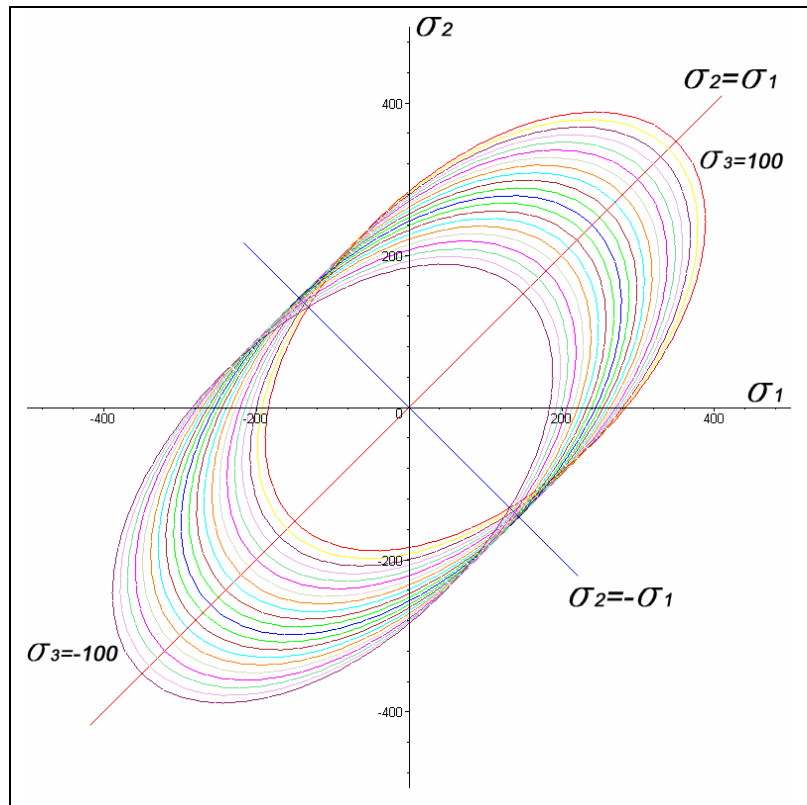


Figura 3.4

Quindi, questa seconda ellisse ha il centro $C_2(K, K, K)$; ciò significa che i centri C_1 e C_2 è come se fossero disposti sulle due estremità della diagonale di un cubo, per cui, i centri delle infinite ellissi che si possono ottenere sezionando il cilindro con i piani $\sigma_3 = K$ (fig. 3.10), sono disposti lungo una retta passante per l'origine del sistema di riferimento e individuata dall'intersezione dei due piani:

$$\begin{cases} \sigma_2 = \sigma_1 \\ \sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_2 \end{cases}$$

I coseni direttori lungo i tre assi di riferimento σ_1 , σ_2 e σ_3 :

$$\begin{cases} \cos \omega_1 = \frac{K}{\rho} \Rightarrow \cos \omega_1 = \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot K} \\ \cos \omega_2 = \frac{K}{\rho} \Rightarrow \cos \omega_2 = \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot K} \\ \cos \omega_3 = \frac{K}{\rho} \Rightarrow \cos \omega_3 = \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot K} \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{K^2 + K^2 + K^2} = K^2 \cdot \sqrt{3}$$

Si conclude che le generatrici del cilindro sono inclinate di 45° rispetto al piano $\sigma_3 = 0$, e quindi l'asse di simmetria forma angoli uguali (di 45°) con i tre assi principali di sforzo σ_1 , σ_2 e σ_3 .

La sezione normale al cilindro è una circonferenza con il raggio coincidente con il semiasse minore \overline{OC} dell'ellisse (ottenuta con la sezione del cilindro con il piano $\sigma_3 = 0$) che misura $\sqrt{6}/3 \cdot \sigma_y$ (fig. 3.5).

L'equazione della circonferenza, della sezione circolare del cilindro, è data (fig. 3.6):

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sigma_y \right)^2 \Rightarrow \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \frac{2}{3} \cdot \sigma_y^2$$

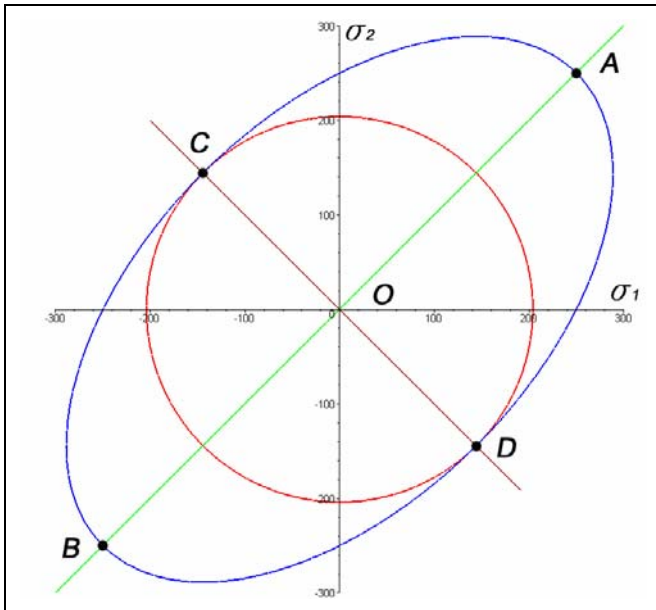


Figura 3.5

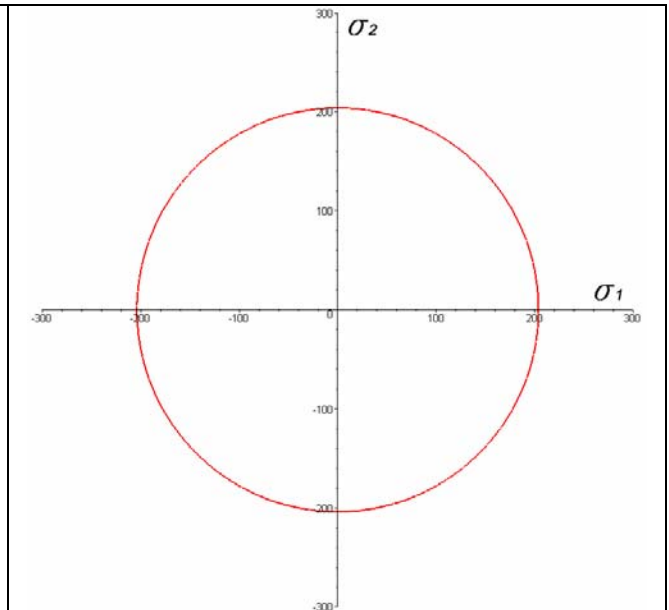


Figura 3.6

La [3.2.17] rappresenta una superficie di un cilindro di sezione trasversale circolare (fig. 3.7 e 3.8) con l'asse di simmetria w che forma angoli di 45° con gli assi principali σ_1 , σ_2 e σ_3 (fig.3.7).

La [3.2.16] indica i punti del volume interno al cilindro.

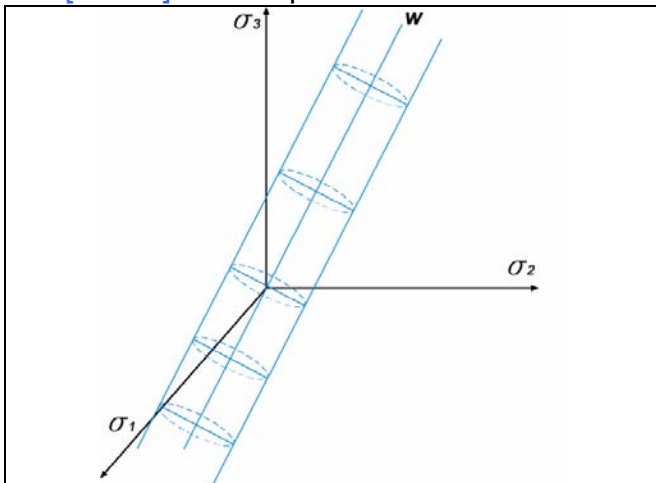


Figura 3.7

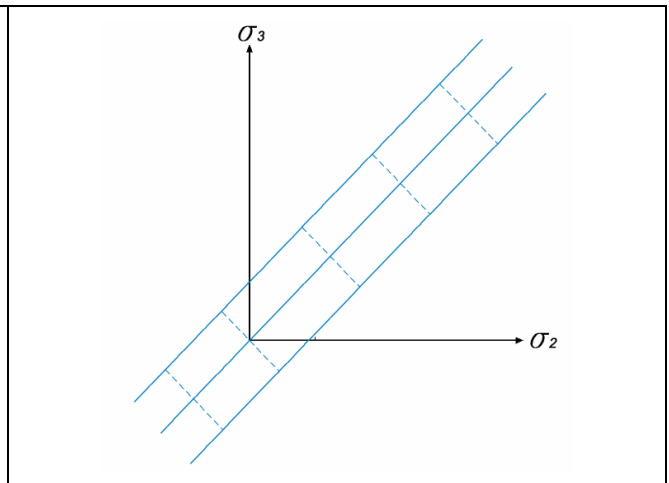


Figura 3.8

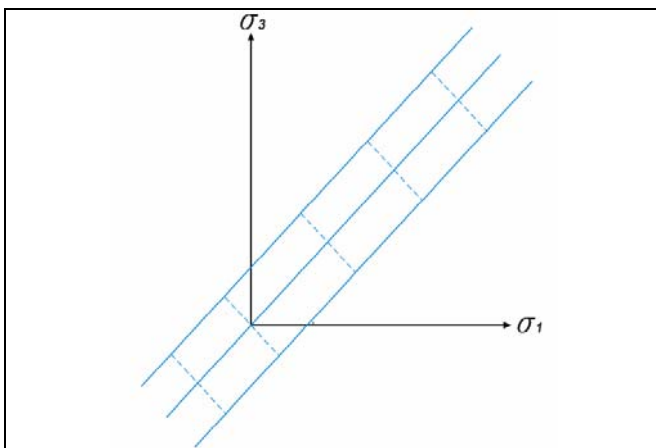


Figura 3.9

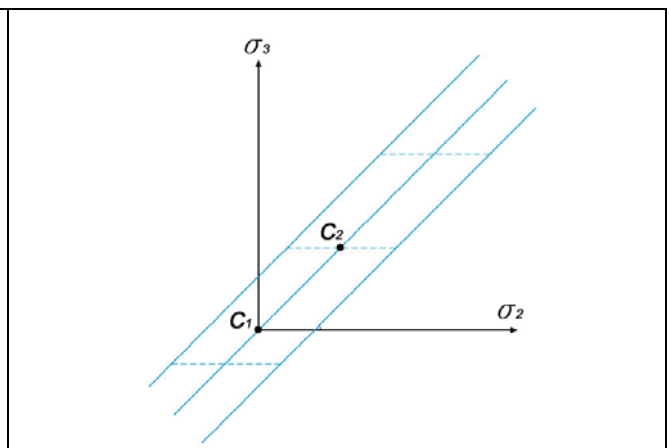


Figura 3.10

Confronto tra il criterio di Tresca e di Von mises

Il criterio del massimo sforzo tangenziale e il criterio della massima energia di distorsione sono confrontati in figura 3.11.

Si nota che l'ellisse passa per i vertici dell'esagono. Quindi, per gli stati di sforzo rappresentati da questi sei punti, i due criteri forniscono lo stesso risultato.

Il rapporto tra le due aree, quella dell'ellisse e del esagono, evidenzia come il criterio di Von Mises sia più "tollerante" del criterio di Tresca, in quanto

$$\frac{\Lambda_V}{\Lambda_T} = \frac{\frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \sigma_Y^2}{3 \cdot \sigma_Y^2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}}{9} \approx 1,209$$

L'ellisse di Von Mises ricopre una superficie maggiore del 20% circa, rispetto all'esagono di Tresca; il criterio di Tresca, quindi, si mostra più "severo" nel determinare se un materiale è sicuro, e quindi se ricade o meno all'interno dell'area dell'esagono.

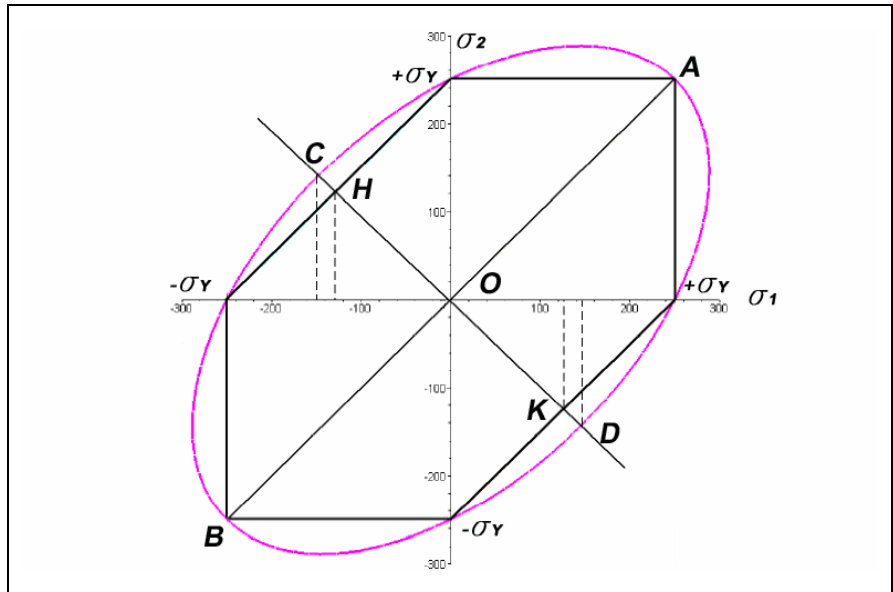


Figura 3.11

PARTE IV: introduzione ai processi di lavorazione meccanica

Determinazione dei carichi per la trafilatura e la fucinatura da considerazioni tensionali: introduzione

Il significato della teoria dei processi di lavorazione meccanica dei metalli è di poter prevedere la deformazione di un metallo e la forza richiesta per produrre tale deformazione.

In aggiunta, una conoscenza degli sforzi locali (prova a trazione) e della deformazione plastica aiutano a predire le cause del cedimento del prodotto finito. Questi fattori controllano il tipo processo di lavorazione designato e la dimensione e forma delle matrici. I carichi per i processi di lavorazione e l'energia consumata sono notevolmente influenzati dalla combinazione appropriata dei parametri di processo che includono: i livelli di passaggio (durante una lavorazione metallurgica), lubrificazione, temperatura, velocità e la sezione dello stampo della matrice.

La maggioranza dei sistemi di lavorazione sono troppo complessi per una completa trattazione teorica, così con l'ausilio di regole empiriche, le formule analitiche sono efficacemente più utilizzate con la conoscenza dei dati sperimentali. Per gran parte dei processi metallurgici di laminazione, forgiatura, estrusione e trafilatura è possibile prevedere i carichi di lavoro con buona precisione.

In questa relazione saranno discussi i due metodi di stima dei carichi da applicare nei processi di lavorazione, dall'analisi degli sforzi.

Lavoro per variare la lunghezza di un elemento rettilineo

Un generale approccio, applicabile alla semplice tensione o compressione, e anche a più complessi processi di lavorazione come il filo metallico della trafilatura, è valutato nel lavoro compiuto dalla deformazione plastica di un piccolo elemento del pezzo da lavorare, e quindi dall'integrare del tutto l'intera curva di deformazione.

Per una tensione monoassiale σ_y (trazione o compressione) gli sforzi principali sono così determinati:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_y \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = 0 \end{cases}$$

Sotto questo sforzo assiale (in tensione o compressione) la lunghezza di un elemento monodimensionale, in cui una dimensione è predominante sulle altre due, è variata da L a $L + dL$; il lavoro infinitesimo δW è quindi esprimibile come:

$$\delta W = F dL \tag{4.1.1}$$

in cui F è il carico totale assiale agente sull'elemento.

Poiché:

$$F = \sigma_y \cdot A$$

indicando con A la sezione trasversale dell'elemento, l'espressione del lavoro diventa:

$$\delta W = (\sigma_y \cdot A) dL \tag{4.1.2}$$

Inoltre, essendo:

$$dL = L d\varepsilon$$

sostituendola nella [4.1.2] l'espressione del lavoro è data dall'equazione:

$$\delta W = (\sigma_y \cdot A) L d\varepsilon \tag{4.1.3}$$

Dove il prodotto tra l'area e la lunghezza esprime il volume:

$$V = A \cdot L$$

Quindi, sostituita nella [4.1.3] l'espressione del lavoro diviene:

$$\delta W = (\sigma_Y \cdot V) d\varepsilon \quad [4.1.4]$$

Per una variazione finita della deformazione si ha:

$$W = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} (\sigma_Y \cdot V) d\varepsilon \quad [4.1.5]$$

E con il volume costante, si ottiene l'energia per unità di volume, cioè $[J/m^3]$:

$$\frac{W}{V} = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} \sigma_Y d\varepsilon \quad [4.1.6]$$

Da notarsi l'uso del *differenziale non esatto* δ , in quanto la quantità infinitesima di lavoro non è il differenziale di una funzione (ad esempio di coordinate termodinamiche PVT), bensì un differenziale non esatto; infatti nel campo plastico un provino sottoposto a trazione, una volta scaricato, non ritornerà alla configurazione iniziale (vi è una deformazione permanente), ed anche in campo elastico vi è sempre una piccolissima deformazione residua.

Se il carico esterno viene applicato lentamente, la trasformazione è essenzialmente quasi statica; si può quindi utilizzare un'equazione di stato per esprimere σ_Y in funzione di ε , così da poter eseguire l'integrazione. La figura 4.1 mostra una tipica curva sforzo – deformazione per un metallo in tensione. Il lavoro per unità di volume dell'elemento considerato a volume costante deformato per la tensione da ε_0 a ε_1 è rappresentato dall'area sotto il tratto di curva compreso tra i punti σ_0 e σ_1 . L'andamento rettilineo del diagramma rappresenta la *legge di Hooke*.

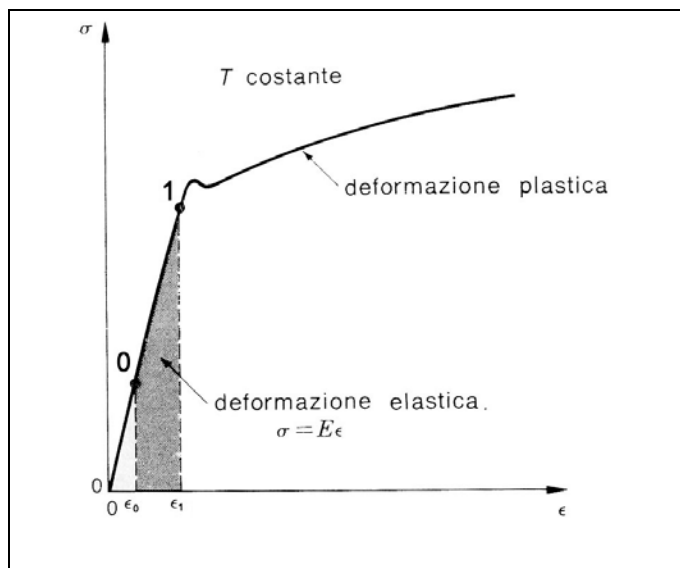


Figura 4.1

Considerando ε reale, quindi ε_{reale} , cioè la deformazione riferita alla effettiva variazione della lunghezza e della sezione dell'elemento sottoposto allo sforzo σ_Y , si ottiene:

$$\varepsilon_{reale} = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} d\varepsilon = \int_{L_0}^{L_1} \frac{dL}{L} = \ln \frac{L_1}{L_0} = \ln(1 + \varepsilon) \quad [4.1.7]$$

L'espressione [4.1.6] può scriversi come:

$$\frac{W}{V} = \int_{L_0}^{L_1} \sigma_Y \cdot \frac{dL}{L} \quad [4.1.8]$$

Sviluppando:

$$\frac{W}{V} = \overline{\sigma_Y} \cdot \int_{L_0}^{L_1} \frac{dL}{L} = \overline{\sigma_Y} \cdot \ln \frac{L_1}{L_0} = \overline{\sigma_Y} \cdot \ln(1 + \varepsilon) \quad [4.1.9]$$

Quest'ultima equazione, spesso nota come *l'espressione del lavoro*, fornisce una ragionevole approssimazione per un metallo il quale è stato lavorato duramente prima dell'allungamento a trazione, così che $\overline{\sigma_Y}$ (tensione di snervamento) non varia eccessivamente nel processo. Ciò è meno attendibile per un materiale ricotto, in cui il rapido incremento con la tensione (per cui è preferibile usare l'espressione [4.1.6] o [4.1.8]) integra la curva sforzo – deformazione graficamente o numericamente (infatti il

tratto dopo lo snervamento è praticamente orizzontale). Questo metodo può essere applicato ad alcune operazioni pratiche.

Dopo la strizione, non essendoci variazione di volume durante la deformazione plastica:

$$A_0 \cdot L_0 = A_1 \cdot L_1$$

si ha, sostituendolo nella [4.1.7]:

$$\varepsilon_{reale} = \ln\left(\frac{A_0}{A_1}\right) \quad [4.1.10]$$

Dalla [4.1.9] esplicitando w si ottiene:

$$W = V \cdot \overline{\sigma}_Y \cdot \ln \frac{L_1}{L_0} \quad [4.1.11]$$

E osservando che il lavoro svolto dalla forza del processo di trafilatura in movimento dalla posizione iniziale, adiacente alla matrice, alla lunghezza completa L_1 del filo d'uscita, è dato da:

$$W_1 = F \cdot L_1 \quad [4.1.12]$$

Esplicitando dalla [4.1.12] la forza F sostituendo al lavoro w_1 l'espressione [4.1.11]:

$$F = \frac{V}{L_1} \cdot \overline{\sigma}_Y \cdot \ln \frac{L_1}{L_0} \quad [4.1.13]$$

Come già detto prima, nel campo plastico non vi è variazione di volume, quindi:

$$V = A_0 \cdot L_0 = A_1 \cdot L_1 \quad [4.1.14]$$

Il quale sostituito nella [4.1.13]:

$$F = A_1 \cdot \overline{\sigma}_Y \cdot \ln \frac{L_1}{L_0} \quad [4.1.15]$$

Dalla [4.1.7] e [4.1.10] la deformazione reale ε_{reale} è:

$$\varepsilon_{reale} = \ln \frac{L_1}{L_0} = \ln\left(\frac{A_0}{A_1}\right) \quad [4.1.16]$$

Quindi la [4.1.15] può esprimersi come:

$$F = A_1 \cdot \overline{\sigma}_Y \cdot \ln\left(\frac{A_0}{A_1}\right) \quad [4.1.17]$$

Ora, introducendo il fattore di riduzione r dell'area della sezione:

$$r = \frac{A_0 - A_1}{A_0} = 1 - \frac{A_1}{A_0} \quad [4.1.18]$$

L'espressione della forza [4.1.17] diventa:

$$F = A_1 \cdot \overline{\sigma}_Y \cdot \ln\left(\frac{1}{1-r}\right) \quad [4.1.19]$$

Lo sforzo principale σ_1 è conseguentemente:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} = \overline{\sigma}_Y \cdot \ln\left(\frac{1}{1-r}\right) \quad [4.1.20]$$

Questo risultato costituisce la base del calcolo nel processo della trafilatura, correzioni da applicare per prendere ragione dell'influenze dei vincoli meccanici e delle frizioni della macchina di lavorazione.

Applicazione dell'equazione del lavoro: determinazione della massima possibile riduzione di una sezione in un unico passaggio

La trafilatura di un filo metallico è limitata eventualmente dal cedimento (microfessurazioni) in trazione del filo trafilato. Durante un passaggio nella lavorazione metallurgica, così gravosa, il massimo sforzo di trazione sarà più vicino all'uguagliare la sua tensione di snervamento, a causa dell'incrudimento che il filo trafilato ha subito. Così, al limite di riduzione:

$$\sigma_1 = \sigma_y$$

l'andamento dell'incrudimento sarà piccolo, così che lo sforzo medio di snervamento $\overline{\sigma_y}$ sarà anche vicino all'uguagliare σ_y . La massima riduzione r_m è così data dalle condizioni:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_y} = 1$$

$$\sigma_1 = \overline{\sigma_y} \cdot \ln \frac{1}{1-r_m} = \sigma_y \ln \frac{1}{1-r_m}$$

affinché $\sigma_1 = \sigma_y$:

$$\ln \frac{1}{1-r_m} = 1 \Rightarrow \frac{1}{1-r_m} = e$$

così:

$$\frac{1}{1-r_m} = e \approx 2,7182818284\dots$$

$$r_m = 1 - \frac{1}{e} \approx 0,6321205588\dots$$

La massima riduzione possibile, con una perfetta lubrificazione, è del 63% o leggermente maggiore se l'andamento dell'incrudimento è ancora considerevole.

Estrusione di una sbarra

L'equazione del lavoro [4.1.11] può anche essere usata per ottenere il più basso limite alla pressione di estrusione, assumendo la deformazione omogenea e l'attrito nullo. Nell'estrusione, la forza è applicata alla billetta iniziale, di area A_0 , non al prodotto di cui l'area è A_1 come era nella trafilatura dell'esempio di sopra. Questa forza spinge attraverso una distanza L_0 pari alla lunghezza della billetta e così il lavoro è:

$$W_0 = (p \cdot A_0) \cdot L_0$$

il quale è uguagliato al lavoro della deformazione omogenea:

$$W = V \cdot \overline{\sigma}_y \cdot \ln \frac{L_1}{L_0} = V \cdot \overline{\sigma}_y \cdot \ln \frac{A_0}{A_1}$$

in cui:

$$p = \overline{\sigma}_y \cdot \ln \frac{A_0}{A_1}$$

Si vedrà in seguito che il limite più basso è una insufficiente approssimazione per l'estrusione perché il fattore di costrizione è alto per tutte le utili estrusioni di rapporto A_0 / A_1 .

E' possibile calcolare la massima riduzione dell'area, come per la trafilatura, basata sul limite $p = \overline{\sigma}_y$, che implica una compressione nella superficie della matrice.

Ciò è importante nella estrusione a stampo aperto, usata per giunti imbullonati e altri elementi di fissaggio, ma nella maggior parte delle estrusioni $p = \overline{\sigma}_y$ non è più sufficiente a garantire l'estrusione.

PARTE V: il processo di trafilatura

Processo di trafilatura: introduzione

Il processo di trafilatura (vedi figura 5) è attuato mediante un motore elettrico, che fornendo una coppia al blocco-motore, avvolge il filo trafilato, il quale passa attraverso uno stampo (o matrice) riducendosi di sezione a causa della forza di trazione provocata dalla rotazione del blocco-motore; il filo da trafilare è avvolto su un tamburo in cui non è applicata alcuna coppia motore, e durante il processo di trafilatura si srotola sotto l'effetto dell'avvolgimento del secondo tamburo collegato al motore.

Il processo di trafilatura si realizza di norma a temperatura ambiente (circa 20° C) e più raramente a alta temperatura. Qui sarà trattato il caso di lavorazione a temperatura ambiente.

E' bene precisare che la velocità di uscita del filo trafilato dalla matrice è costante, e normalmente assume i valori compresi tra 1 e 10 m/s (a seconda del valore di B e della temperatura a cui si sta lavorando), per cui:

$$v = Kost \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \sum F = 0$$

quindi il sistema è in equilibrio.

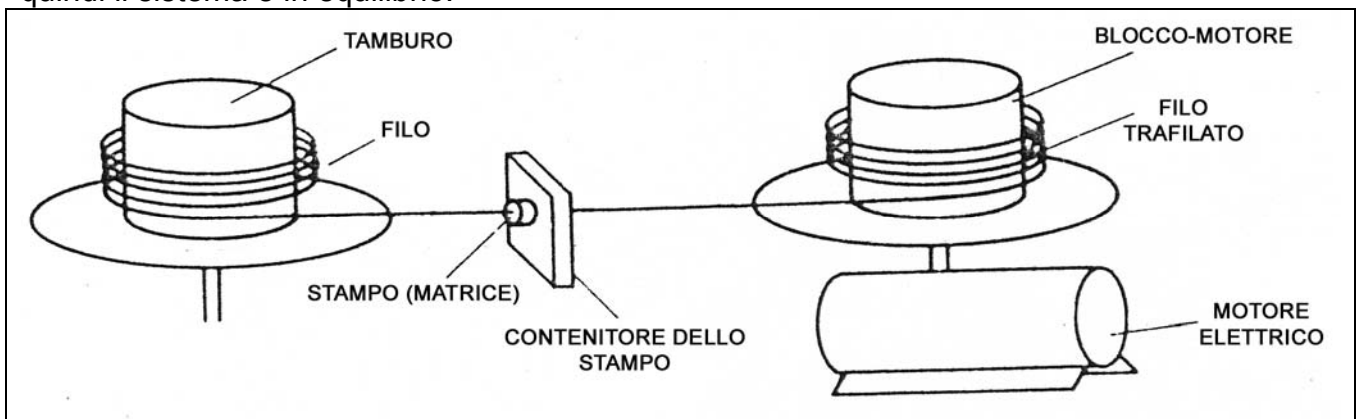


Figura 5

Sbarra cilindrica trafilata con una matrice conica

La figura 5.1 mostra gli sforzi agenti su un sottile tronco (a simmetria cilindrica), ad una distanza x dalla apertura della matrice conica (con α, μ, σ_y costanti).

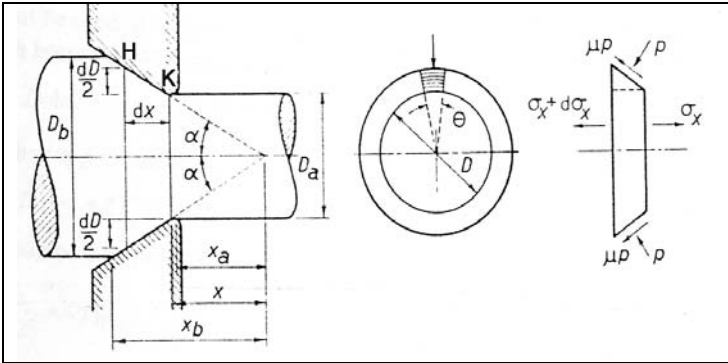


Figura 5.1

Ci sono tre componenti di sforzo agenti nella direzione assiale:

- 1) dovute al cambiamento dello sforzo longitudinale
- 2) dovute direttamente alla pressione della matrice sulla circonferenza della sezione della sbarra
- 3) dovute all'attrito della trazione alla circonferenza

Da prime considerazioni geometriche si ha:

$$\begin{cases} x_a = \frac{D_a \cdot \cot \alpha}{2} \\ x_b = \frac{D_b \cdot \cot \alpha}{2} \\ x_b - x_a = \frac{(D_b - D_a) \cdot \cot \alpha}{2} \end{cases}$$

Per quanto riguarda il primo punto, lo sforzo agente lungo la direzione assiale, è esprimibile mediante la relazione (da notare che $D_a < D < D_b$):

$$(\sigma_x + d\sigma_x) \cdot \left(\frac{D + dD}{2}\right)^2 \cdot \pi - \sigma_x \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \pi \Rightarrow (\sigma_x + d\sigma_x) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (D + dD)^2 - \frac{\pi}{4} \cdot \sigma_x \cdot D^2 \quad [5.1.1]$$

Il secondo punto è espresso dalla relazione:

$$p \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \left(\frac{dx}{\cos \alpha} \cdot \left(\frac{D}{2}\right) \cdot 2 \cdot \pi\right) \Rightarrow p \cdot \left(\pi \cdot D \cdot \frac{dx}{\cos \alpha}\right) \cdot \sin \alpha \quad [5.1.2]$$

in cui la grandezza $dx/\cos \alpha$ è il segmento \overline{HK} .

Ed ancora, il terzo punto (riferito all'attrito μ):

$$\mu \cdot p \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \left(\frac{dx}{\cos \alpha} \cdot \left(\frac{D}{2}\right) \cdot 2 \cdot \pi\right) \Rightarrow \mu \cdot p \cdot \left(\pi \cdot D \cdot \frac{dx}{\cos \alpha}\right) \cdot \cos \alpha \quad [5.1.3]$$

Le condizioni, sotto trafilatura costante, devono essere in equilibrio.

Così, a meno del prodotto degli infinitesimi (si trascura l'infinitesimo dD elevato al quadrato), si ottiene, sommando la [5.1.1], [5.1.2] e la [5.1.3] l'equazione di equilibrio dello sforzo assiale:

$$\frac{\sigma_x \cdot D \cdot dD}{2} + \frac{D^2 \cdot d\sigma_x}{4} + p \cdot D \cdot \tan \alpha \cdot dx + \mu \cdot p \cdot D \cdot dx = 0 \quad [5.1.4]$$

Poiché $dD = 2 \cdot dx \cdot \tan \alpha$, la [5.1.4] può riscriversi come:

$$2 \cdot \sigma_x \cdot dD + D \cdot d\sigma_x + 2 \cdot p \cdot dD + 2 \cdot \mu \cdot p \cdot dD \cdot \cot \alpha = 0 \quad [5.1.5]$$

E raggruppandone i termini:

$$D \cdot d\sigma_x + 2 \cdot (\sigma_x + p \cdot (1 + \mu \cdot \cot \alpha)) \cdot dD = 0 \quad [5.1.6]$$

Dall'equilibrio radiale:

$$\sigma_r \cdot (\pi \cdot D \cdot dx) = -p \cdot \left(\frac{\pi \cdot D \cdot dx}{\cos \alpha}\right) \cdot \cos \alpha + \mu \cdot p \cdot \left(\frac{\pi \cdot D \cdot dx}{\cos \alpha}\right) \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sigma_r = -p \cdot (1 - \mu \cdot \tan \alpha) \quad [5.1.7]$$

Dato il valore molto piccolo di $\mu \cdot \tan \alpha$ è possibile trascurare tale termine; i valori comunemente assunti da μ e α sono:

$$\begin{cases} \mu \approx 0,05 \\ \alpha \approx 6^\circ \end{cases} \Rightarrow \mu \cdot \tan \alpha \approx 0,005$$

Relazioni di grandezza per le misure di fig. 17:

$$\begin{cases} 0 < B \leq 0,5 \\ 0 \ll \sigma_y \leq \sigma_x \\ D_b > D > D_a > 0 \end{cases} \quad \text{con } B = \mu \cdot \cot \alpha \quad \text{e in virtù del valore che può assumere l'angolo } \alpha \text{ (normalmente } 5^\circ < \alpha < 15^\circ \text{), e il coefficiente di attrito } \mu \text{ che oscilla tra } 0,1 \text{ e } 1,5 \text{ si stima l'intervallo in cui } B \text{ può assumere tutti i possibili valori. Di norma } B \text{ non supera quasi mai il valore di } 0,5 \text{ ; per cui si può affermare } 0 < B < 0,5 \text{ .}$$

Inoltre lo stato degli sforzi è cilindrico, e gli assi principali sono: $\sigma_1 = \sigma_x$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_r = -p$. E' opportuno ricordare che quando due sforzi principali sono uguali, il sistema (delle tensioni) è equivalente a uno sforzo monoassiale combinato con uno sforzo idrostatico (uguale per tutti i punti dell'elemento considerato), così che lo snervamento si verifica al valore di σ_y .

Tutti i criteri di snervamento devono fornire questo risultato:

Von Mises: $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \cdot \sigma_y^2$

Tresca: $\tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) = Kost = \frac{1}{2} \sigma_y$

E poiché $\sigma_2 = \sigma_3$ i due criteri coincidono.

Conseguentemente nella sbarra trafilata $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y$, così:

$$\sigma_x + p = \sigma_y \Rightarrow p = \sigma_y - \sigma_x \quad [5.1.8]$$

Combinando questa condizione di snervamento [5.1.8] con la [5.1.6] si ottiene:

$$D \cdot d\sigma_x + 2 \cdot (\sigma_y + P \cdot B) \cdot dD = 0 \quad [5.1.9]$$

La quale rappresenta una equazione differenziale a variabili separabili, che sviluppata:

$$\frac{d\sigma_x}{B \cdot \sigma_x - \sigma_y \cdot (1+B)} = 2 \cdot \frac{dD}{D} \quad [5.1.10]$$

L'impostazione della soluzione di tale equazione è:

$$\int \frac{1}{B \cdot \sigma_x - \sigma_y \cdot (1+B)} d\sigma_x = 2 \cdot \int \frac{1}{D} dD \quad [5.1.11]$$

Risolti i due integrali, la soluzione generale di questa equazione differenziale è:

$$\frac{1}{B} \cdot \ln(B \cdot \sigma_x - \sigma_y \cdot (1+B)) = 2 \cdot \ln(D) + Kost \quad [5.1.12]$$

Determinazione della costante ($Kost$) imponendo la trafilatura senza variazione di sezione all'interno della matrice dello stampo:

$$D = D_b \Rightarrow \sigma_x = 0 \Rightarrow -\sigma_y \cdot (1+B) = D_b^{2B} \cdot Kost \Rightarrow Kost = -\frac{\sigma_y \cdot (1+B)}{D_b^{2B}} \quad [5.1.13]$$

Sostituendo il valore della costante nell'equazione [5.1.12]:

$$\frac{1}{B} \cdot \ln(B \cdot \sigma_x - \sigma_y \cdot (1+B)) = 2 \cdot \ln(D) - \frac{\sigma_y \cdot (1+B)}{D_b^{2B}} \quad [5.1.14]$$

Esplicitando lo sforzo σ_x (normale alla sezione trasversale del trefolo):

$$\sigma_x = \sigma_y \cdot \frac{1+B}{B} \cdot \left(1 - \left(\frac{D}{D_b} \right)^{2B} \right) \quad [5.1.15]$$

Quindi lo sforzo σ_x varia al variare del diametro all'interno della matrice della trafilatura; spostandosi dall'ingresso verso la fine della matrice, σ_x cresce al decrescere di D , ovvero, all'aumentare della riduzione del diametro della matrice.

Lo sforzo σ_x è uguale alla tensione di snervamento σ_Y quando il generico diametro D , della sezione circolare della matrice conica (fig. 5.1), assume il valore:

$$\sigma_x = \sigma_Y \Rightarrow \frac{1+B}{B} \cdot \left(1 - \left(\frac{D}{D_b} \right)^{2B} \right) = 1 \Rightarrow D = D_b \cdot (B+1)^{-\frac{1}{2B}} \quad [5.1.16]$$

Si noti come nel caso limite, in cui la generica sezione di diametro D coincide con la sezione di ingresso della matrice di diametro D_b , si ottiene lo sforzo applicato nullo:

$$\lim_{D \rightarrow D_b} \left(\sigma_Y \cdot \frac{1+B}{B} \cdot \left(1 - \left(\frac{D}{D_b} \right)^{2B} \right) \right) = 0$$

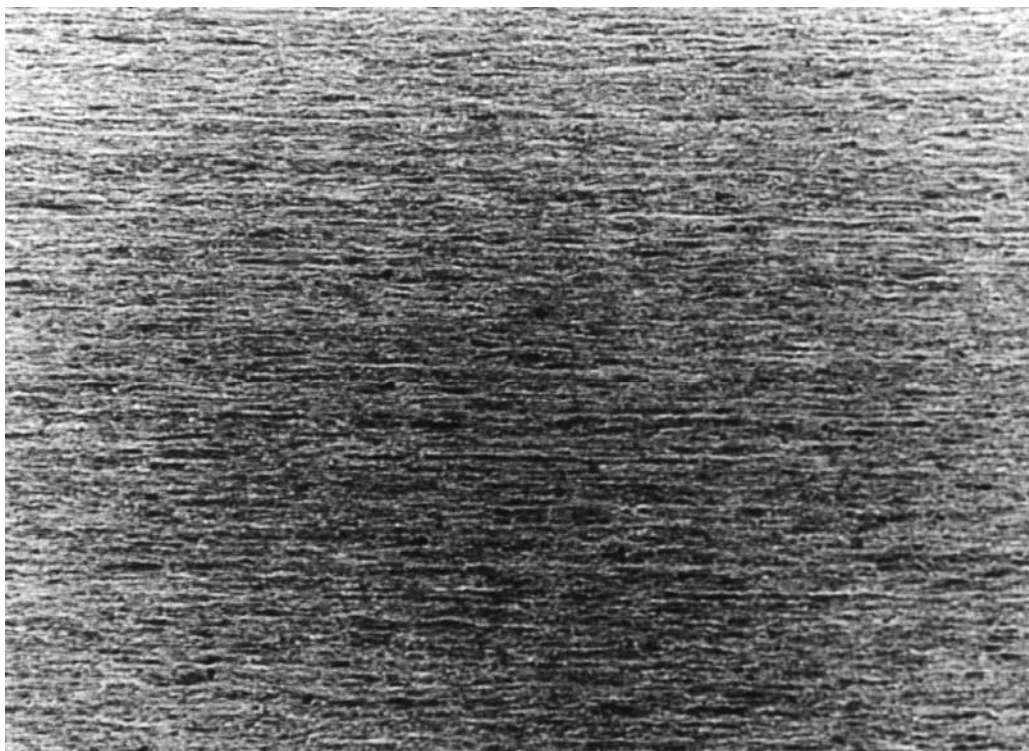


Figura 5.2

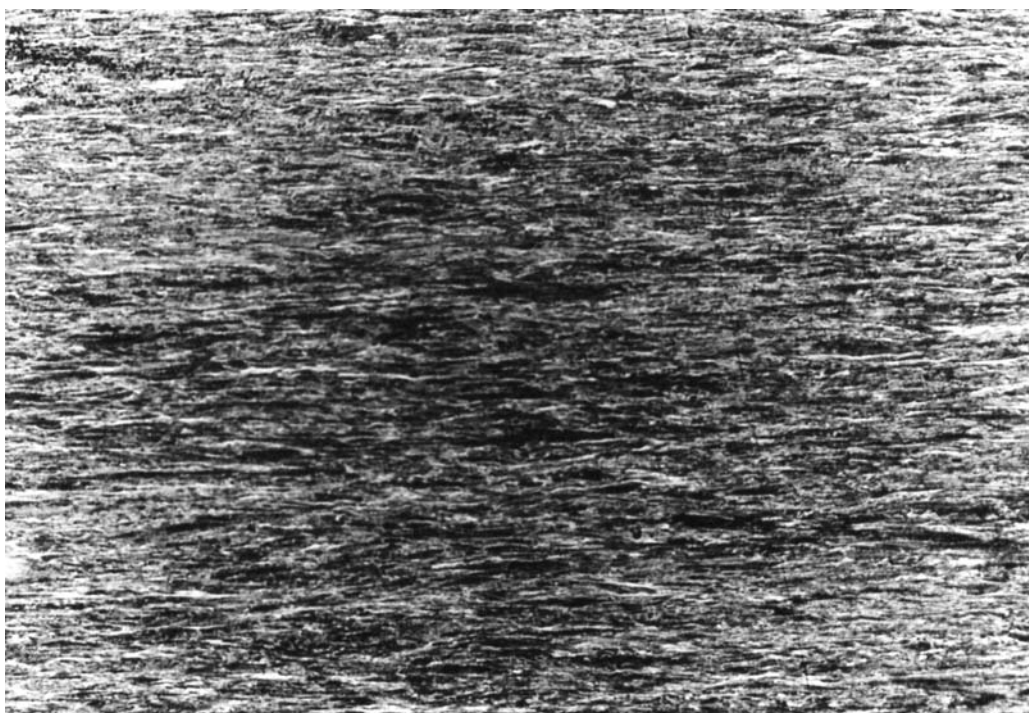


Figura 5.3

In figura 5.2 e 5.3 sono riportate due micrografie di un acciaio che ha subito un processo di trafilatura; da notarsi i grani molto allungati e orientati verso la direzione dello sforzo di trazione applicato dalla motore elettrico. In entrambi i casi si è usato un attacco Nital, e nella prima micrografia (fig. 5.2) l'ingrandimento è di 200X mentre nella seconda (fig. 5.3) è di 400X.

In termini di riduzione di area (r):

$$r = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot (D_b^2 - D_a^2)}{\frac{\pi}{4} \cdot D_b^2} \Rightarrow r = 1 - \left(\frac{D_a}{D_b} \right)^2 \quad [5.1.17]$$

La [5.1.15] diventa:

$$\frac{\sigma_{xa}}{\sigma_Y} = \frac{1+B}{B} \cdot (1 - (1-r)^B) \quad [5.1.18]$$

Esplicitandola riduzione di area r :

$$r = 1 - \left(\frac{\sigma_Y \cdot (B+1) - B \cdot \sigma_{xa}}{\sigma_Y \cdot (B+1)} \right)^{\frac{1}{B}} \quad [5.1.19]$$

Anche in questo caso, per la [5.1.18], se nel caso limite di $D_b = D_a$ e quindi le sezioni di ingresso e di uscita sono uguali, si avrà lo sforzo applicato σ_{xa} nullo:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\sigma_Y \cdot \frac{1+B}{B} \cdot (1 - (1-r)^B) \right) = 0$$

Lo sforzo σ_{xa} è uguale alla tensione di snervamento σ_Y quando la riduzione di area r assume il valore:

$$\sigma_{xa} = \sigma_Y \Rightarrow \frac{1+B}{B} \cdot (1 - (1-r)^B) = 1 \Rightarrow r = 1 - (B+1)^{-\frac{1}{B}} \quad [5.1.20]$$

Sostituendo la [5.1.17] nella [5.1.20] si ricava l'uguaglianza $\sigma_{xa} = \sigma_Y$ in funzione dei diametri di ingresso e di uscita, dalla matrice, del filo trafilato:

$$1 - \left(\frac{D_a}{D_b} \right)^2 = 1 - (B+1)^{-\frac{1}{B}} \Rightarrow \begin{cases} D_a = D_b \cdot \sqrt{(B+1)^{-\frac{1}{B}}} \Rightarrow D_a = D_b \cdot (B+1)^{-\frac{1}{2B}} \\ D_b = \frac{D_a}{\sqrt{(B+1)^{-\frac{1}{B}}}} \Rightarrow D_b = D_a \cdot (B+1)^{\frac{1}{2B}} \end{cases} \quad [5.1.21]$$

In funzione dello snervamento σ_Y e del generico diametro D , si può calcolare, per la [5.1.15], in quale direzione la funzione $\sigma_x = f(\sigma_Y, D)$ aumenta più rapidamente in un generico punto $P(\sigma_{Y0}, D_0)$.

Calcolo del gradiente $\nabla f(\sigma_Y, D)$ della funzione $\sigma_x = \sigma_Y \cdot \frac{1+B}{B} \cdot \left(1 - \left(\frac{D}{D_b} \right)^{2B} \right)$:

$$\nabla f(\sigma_Y, D) = \frac{\partial f(\sigma_Y, D)}{\partial \sigma_Y} \mathbf{i} + \frac{\partial f(\sigma_Y, D)}{\partial D} \mathbf{j} = \frac{(B+1)}{B} \cdot \left(1 - \left(\frac{D}{D_b} \right)^{2B} \right) \mathbf{i} - \frac{2 \cdot \sigma_Y \cdot (B+1)}{D} \cdot \left(\frac{D}{D_b} \right)^{2B} \mathbf{j} \quad [5.1.22]$$

Per il generico punto $P(\sigma_{Y0}, D_0)$ il gradiente è equivalente a:

$$\nabla f(\sigma_{Y0}, D_0) = \frac{(B+1)}{B} \cdot \left(1 - \left(\frac{D_0}{D_b} \right)^{2B} \right) \mathbf{i} - \frac{2 \cdot \sigma_{Y0} \cdot (B+1)}{D_0} \cdot \left(\frac{D_0}{D_b} \right)^{2B} \mathbf{j} \quad [5.1.23]$$

Ora si può calcolare la rapidità di variazione di $\sigma_x = f(\sigma_Y, D)$ nel generico punto $P(\sigma_{Y0}, D_0)$:

$$|\nabla f(\sigma_{Y0}, D_0)| \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{(B+1)}{B} \cdot \left(1 - \left(\frac{D_0}{D_b} \right)^{2B} \right) \right)^2 + \left(-\frac{2 \cdot \sigma_{Y0} \cdot (B+1)}{D_0} \cdot \left(\frac{D_0}{D_b} \right)^{2B} \right)^2} \quad [5.1.24]$$

che si verifica nella direzione (derivata direzionale):

$$\mathbf{D}_u f(\sigma_{Y0}, D_0) = \frac{1}{B} \cdot \left(1 - \left(\frac{D_0}{D_b} \right)^{2B} \right) \mathbf{i} - \frac{2 \cdot \sigma_{Y0}}{D_0} \cdot \left(\frac{D_0}{D_b} \right)^{2B} \mathbf{j} \quad [5.1.25]$$

Legami sforzo – deformazione nel processo di trafilatura

Poiché il volume del filo trafilato varia pochissimo dopo lavorazione (in quanto dopo lo snervamento le variazioni di volume sono trascurabili), si può imporre:

$$V_i = V_u$$

cioè, il volume di ingresso e di uscita dalla matrice è lo stesso, per cui:

$$V_i = \left(\frac{D_b}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot l$$

$$V_u = \left(\frac{D_a}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot l_x$$

quindi:

$$\left(\frac{D_b}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot l = \left(\frac{D_a}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot l_x$$

la lunghezza incognita l_x è:

$$l_x = \frac{D_b^2 \cdot l}{D_a^2}$$

Per il calcolo della deformazione ε si suppone $l = 1 \text{ mm}$:

$$\varepsilon = \frac{l_x - l}{l} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\frac{D_b^2}{D_a^2} - 1}{1} \Rightarrow \varepsilon = \frac{D_b^2 - D_a^2}{D_a^2}$$

per una generica sezione di diametro D interna alla matrice (stampo):

$$\varepsilon = \frac{D_b^2 - D^2}{D^2} \quad [5.2.1]$$

esplicitando il diametro D :

$$D = \frac{D_b \cdot \sqrt{\varepsilon + 1}}{\varepsilon + 1} \quad [5.2.2]$$

sostituita alla [5.1.15]:

$$\sigma_x = \sigma_Y \cdot \frac{1+B}{B} \cdot \left(1 - \left(\frac{\sqrt{\varepsilon+1}}{\varepsilon+1}\right)^{2B}\right)$$

oppure può esprimersi:

$$\sigma_x = \sigma_Y \cdot \frac{1+B}{B} \cdot (1 - (\varepsilon+1)^{-B}) \quad [5.2.3]$$

Esprimendo la deformazione ε in funzione della tensione di snervamento σ_Y e dello sforzo σ_x applicato dal processo di trafilatura:

$$\varepsilon = \left(\frac{\sigma_Y \cdot (1+B) - B \cdot \sigma_x}{\sigma_Y \cdot (1+B)}\right)^{\frac{1}{B}} - 1 \quad [5.2.4]$$

Ricordando che:

$$B = \mu \cdot \cot \alpha = \mu \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Analizzando i casi limite del coefficiente B in funzione dell'angolo α (fig. 5.1) e con l'attrito μ costante, per un angolo infinitamente piccolo si ottiene:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mu \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = +\infty$$

per un angolo α massimo possibile, di 90° , si ottiene:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \mu \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 0$$

Applicando questi due casi limite alla deformazione ε , si avrà:

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sigma_Y \cdot (1+B) - B \cdot \sigma_x}{\sigma_Y \cdot (1+B)} \right)^{\frac{1}{B}} - 1 = 0$$

cioè:

$\varepsilon_{\min} = 0$ nel caso di un angolo α infinitamente piccolo; in pratica il diametro del filo di ingresso è uguale al diametro del filo di uscita (trafilato).

Invece per un angolo α massimo, e cioè di 90° , si ottiene:

$$\lim_{B \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma_Y \cdot (1+B) - B \cdot \sigma_x}{\sigma_Y \cdot (1+B)} \right)^{\frac{1}{B}} - 1 = e^{\frac{\sigma_x}{\sigma_Y}} - 1$$

quindi, la deformazione massima in funzione dello sforzo applicato e della tensione di snervamento si esprime:

$$\varepsilon_{\max} = e^{\frac{\sigma_{xa}}{\sigma_Y}} - 1 \quad [5.2.5]$$

con e indicante il numero di nepero (2,71828182845....).

Quindi, la deformazione (nel processo di trafilatura) risulta sempre compresa tra i valori:

$$0 < \varepsilon \ll e^{\frac{\sigma_{xa}}{\sigma_Y}} - 1$$

Supponendo che lo sforzo σ_{xa} applicato dal processo di trafilatura sia uguale alla tensione di snervamento σ_Y del filo, si avrà:

$$\lim_{\sigma_{xa} \rightarrow \sigma_Y} \left(\frac{\sigma_Y \cdot (1+B) - B \cdot \sigma_{xa}}{\sigma_Y \cdot (1+B)} \right)^{\frac{1}{B}} - 1 = (B+1)^{\frac{1}{B}} - 1$$

per cui la deformazione nel caso di uguaglianza tra lo sforzo applicato e la tensione di snervamento si esprime:

$$\varepsilon = (B+1)^{\frac{1}{B}} - 1 \quad [5.2.6]$$

Applicando un esempio numerico, con i seguenti valori dei coefficienti:

$$\begin{cases} \mu = 0,05 \\ \alpha = 6^\circ \\ B = \mu \cdot \cot \alpha = 0,476 \\ \sigma_Y = 250 \text{ MPa} \\ \sigma_{xa} = 325 \text{ MPa} \\ \sigma_R = 400 \text{ MPa} \end{cases}$$

si ottiene la deformazione dalla [5.2.4]:

$$\varepsilon \approx 2,13 \text{ mm/mm}$$

e la deformazione massima teorica dalla [5.2.5]:

$$\varepsilon_{\max} \approx 2,67 \text{ mm/mm}$$

Analizzando geometricamente la [5.2.3] si ottiene l'equazione in due variabili:

$$\sigma_{xa} = \sigma_Y \cdot 3,1008 \cdot (1 - (\varepsilon + 1)^{-0,476}) \quad [5.2.7]$$

con il grafico che segue:

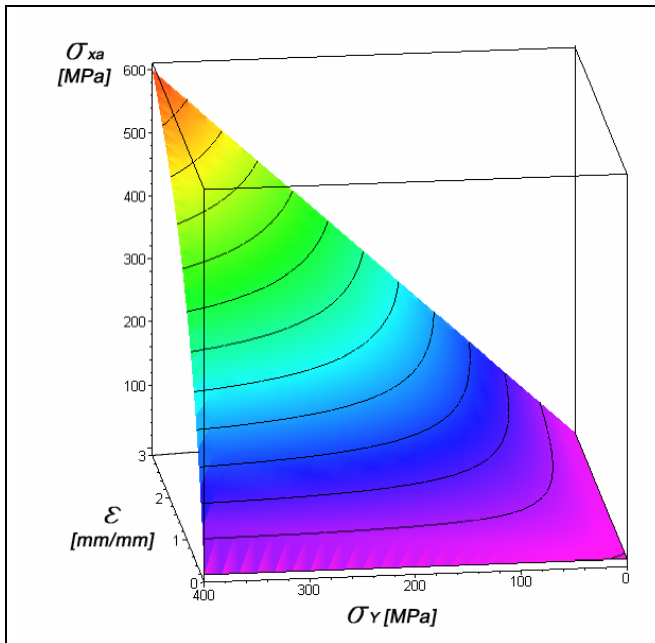


Figura 5.4

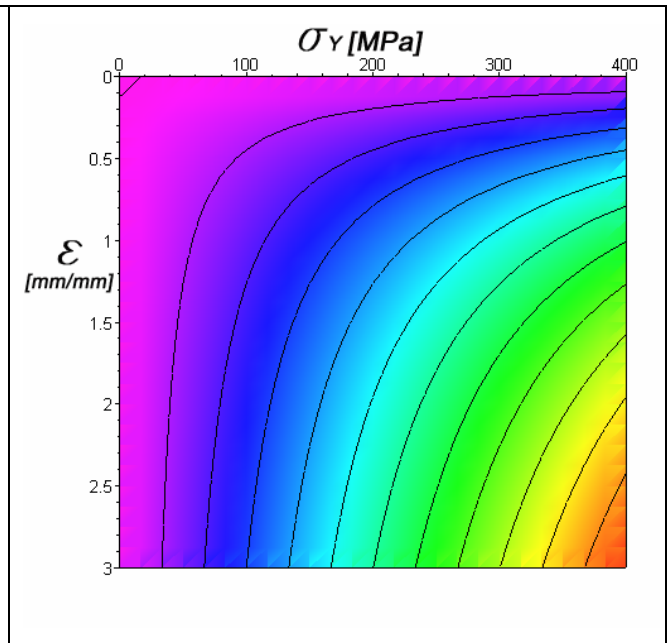


Figura 5.5

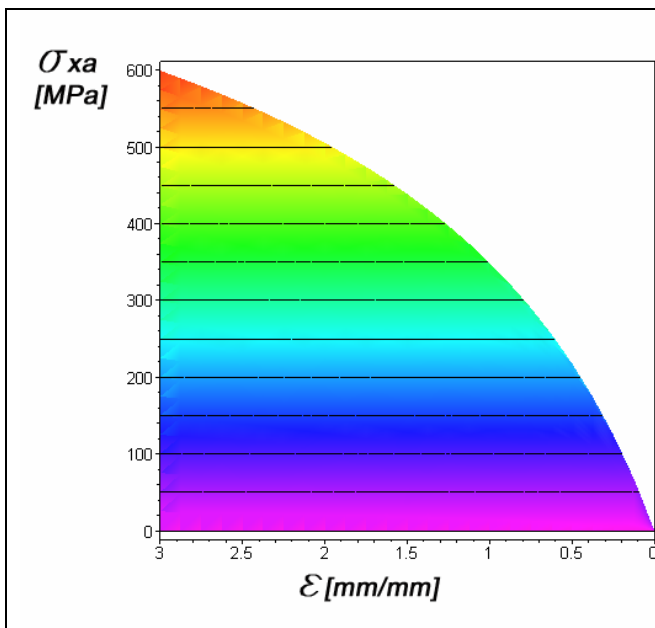


Figura 5.6

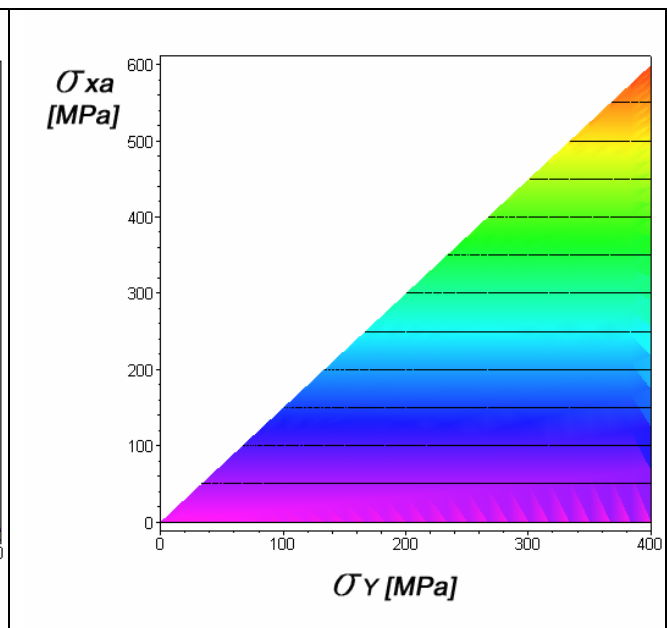


Figura 5.7

Con la tensione di snervamento costante, ad esempio di 250 MPa, la [5.2.7] diventa:

$$\sigma_{sa} = 775,2 \cdot (1 - (\varepsilon + 1)^{-0,476})$$

il cui grafico è rappresentato:

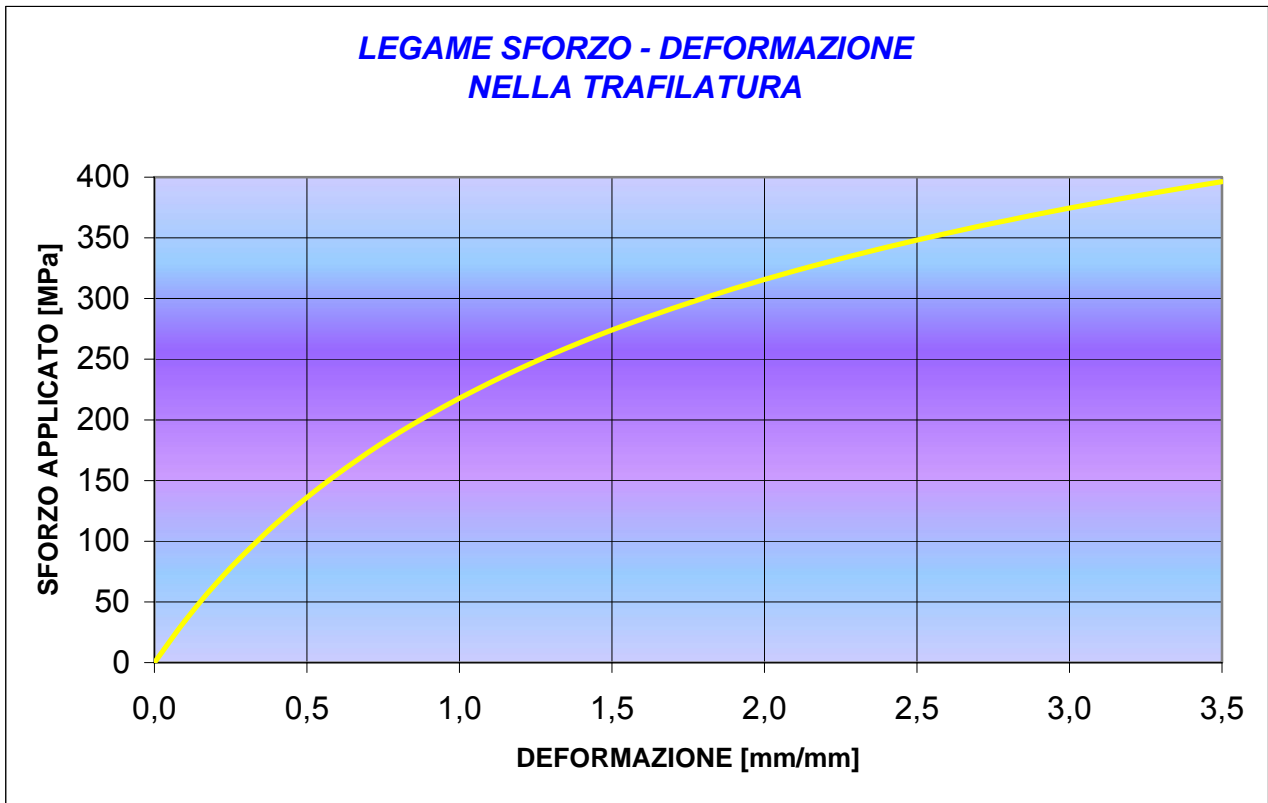


Figura 5.8

N.B.: sino a 1,3 mm/mm il comportamento di questo acciaio è elastico, successivamente, superando con lo sforzo applicato il limite di snervamento di 250 MPa (andando oltre la deformazione di 1,3 mm/mm) il comportamento è plastico e a 400 MPa vi è la rottura.

Determinazione della massima riduzione di un trefolo

Riduzione della sezione di ingresso nel caso di un generico sforzo applicato:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{xa}}{\sigma_Y} = \frac{1+B}{B} \cdot (1-(1-r)^B) \\ r = 1 - \left(\frac{\sigma_Y \cdot (B+1) - B \cdot \sigma_{xa}}{\sigma_Y \cdot (B+1)} \right)^{\frac{1}{B}} \end{cases}$$

quindi:

$$r\% = \left(1 - \left(\frac{\sigma_Y \cdot (B+1) - B \cdot \sigma_{xa}}{\sigma_Y \cdot (B+1)} \right)^{\frac{1}{B}} \right) \cdot 100$$

Riduzione della sezione di ingresso nel caso di sforzo applicato calcolato come media aritmetica tra la tensione di snervamento e la tensione di rottura:

$$\begin{cases} \sigma_{xa} = \frac{\sigma_R + \sigma_Y}{2} \\ \frac{\sigma_R + \sigma_Y}{2} = \frac{1+B}{B} \cdot (1-(1-r)^B) \Rightarrow \frac{\sigma_R + \sigma_Y}{2 \cdot \sigma_Y} = \frac{1+B}{B} \cdot (1-(1-r)^B) \Rightarrow r = 1 - \left(\frac{\sigma_Y \cdot (B+2) - B \cdot \sigma_R}{2 \cdot \sigma_Y \cdot (B+1)} \right)^{\frac{1}{B}} \end{cases}$$

quindi:

$$r\% = \left(1 - \left(\frac{\sigma_Y \cdot (B+2) - B \cdot \sigma_R}{2 \cdot \sigma_Y \cdot (B+1)} \right)^{\frac{1}{B}} \right) \cdot 100$$

Riduzione della sezione di ingresso nel caso che lo sforzo applicato coincida con la tensione di snervamento:

$$\begin{cases} \sigma_{xa} = \sigma_Y \\ \frac{1+B}{B} \cdot (1-(1-r)^B) = 1 \Rightarrow r = 1 - (B+1)^{-\frac{1}{B}} \end{cases}$$

quindi:

$$r\% = \left(1 - (B+1)^{-\frac{1}{B}} \right) \cdot 100$$

Esempio di trafilatura

Acciaio strutturale ASTM-A36

Densità	ρ	7860	$\frac{Kg}{m^3}$		
Sforzo di rottura	σ_R	400	$MPa = \frac{N}{mm^2}$	4079	$\frac{Kg}{cm^2}$
Snervamento a trazione	σ_Y	250	$MPa = \frac{N}{mm^2}$	2549	$\frac{Kg}{cm^2}$
Snervamento a taglio	σ_{YG}	145	$MPa = \frac{N}{mm^2}$	1479	$\frac{Kg}{cm^2}$
Modulo di elasticità normale	E	200	$GPa = 10^3 \cdot \frac{N}{mm^2}$	$2,03 \cdot 10^6$	$\frac{Kg}{cm^2}$
Modulo di elasticità tangenziale	G	77	$GPa = 10^3 \cdot \frac{N}{mm^2}$	$0,78 \cdot 10^6$	$\frac{Kg}{cm^2}$
Coefficiente di espansione termica	χ	11,7	$\frac{10^{-6}}{^\circ C}$		
Duttilità, percentuale di elongazione in 50 mm	δ	23%			

Utilizzando parte dei dati dell'esempio precedente:

$$\begin{cases} \mu = 0,05 \\ \alpha = 6^\circ \\ B = \mu \cdot \cot \alpha = 0,476 \\ D_b = 3 \text{ mm} \end{cases}$$

Ora, al variare di del diametro D (interno alla matrice), otteniamo lo sforzo σ_x applicato nel processo di trafilatura (vedi [5.1.15]):

$$\sigma_x = \sigma_Y \cdot \frac{1+0,476}{0,476} \cdot \left(1 - \left(\frac{D}{3}\right)^{2 \cdot 0,476}\right) \Rightarrow \sigma_x = 3,1009 \cdot \sigma_Y \cdot (1 - 0,3514 \cdot D^{0,952}) \quad [5.4.1]$$

Si imposta lo sforzo di trazione σ_{xa} , applicato dal blocco motore del processo di trafilatura, pari alla media aritmetica tra la tensione di rottura e la tensione di snervamento:

$$\sigma_{xa} = \frac{\sigma_R + \sigma_Y}{2} \Rightarrow \sigma_{xa} = \frac{400 + 250}{2} = 325$$

Applicando la [5.1.17] e [5.1.18], quindi sostituendo i dati dell'acciaio da trafilare, si ottiene in funzione dello sforzo applicato σ_{xa} il diametro D_a di uscita della matrice conica:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{xa}}{\sigma_Y} = \frac{1+B}{B} \cdot (1-(1-r)^B) \\ r = 1 - \left(\frac{D_a}{D_b}\right)^2 \\ D_b = 3 \\ \sigma_Y = 250 \\ \sigma_{xa} = 325 \\ B = 0,476 \end{cases}$$

quindi:

$$\frac{\sigma_{xa}}{\sigma_Y} = \frac{1+B}{B} \cdot \left(1 - \left(1 - \left(1 - \left(\frac{D_a}{D_b}\right)^2\right)^B\right)\right) \Rightarrow D_a = D_b \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_Y \cdot (B+1) - B \cdot \sigma_{xa}}{\sigma_Y \cdot (B+1)}\right)^{\frac{1}{B}}} \Rightarrow D_a = D_b \cdot \left(\frac{\sigma_Y \cdot (B+1) - B \cdot \sigma_{xa}}{\sigma_Y \cdot (B+1)}\right)^{\frac{1}{2 \cdot B}}$$

sostituendo i valori numerici:

$$D_a \approx 1,695 \text{ mm}$$

approssimando, il diametro di uscita della matrice, in funzione della tensione applicata dal processo di trafilatura e della costante B , è pari a:

$$D_a \approx 1,7 \text{ mm}$$

con una riduzione percentuale del diametro del trefolo iniziale del 43,5 %.

Fissata la tensione di snervamento σ_Y pari a 250 MPa, è possibile tracciare il grafico $\sigma_x = f(D)$; il quale, rappresenta la variazione dello sforzo applicato σ_x in funzione del solo generico diametro D . Dalla [5.4.1] si ottiene:

$$\begin{cases} \sigma_{xa} = 775,23 \cdot (1 - 0,3514 \cdot D^{0,952}) \Rightarrow \sigma_{xa} = 775,23 - 272,42 \cdot D^{0,952} & 1,4 \leq D \leq 2 \\ \sigma_{xa} = 250 & 2 < D < 3 \end{cases}$$

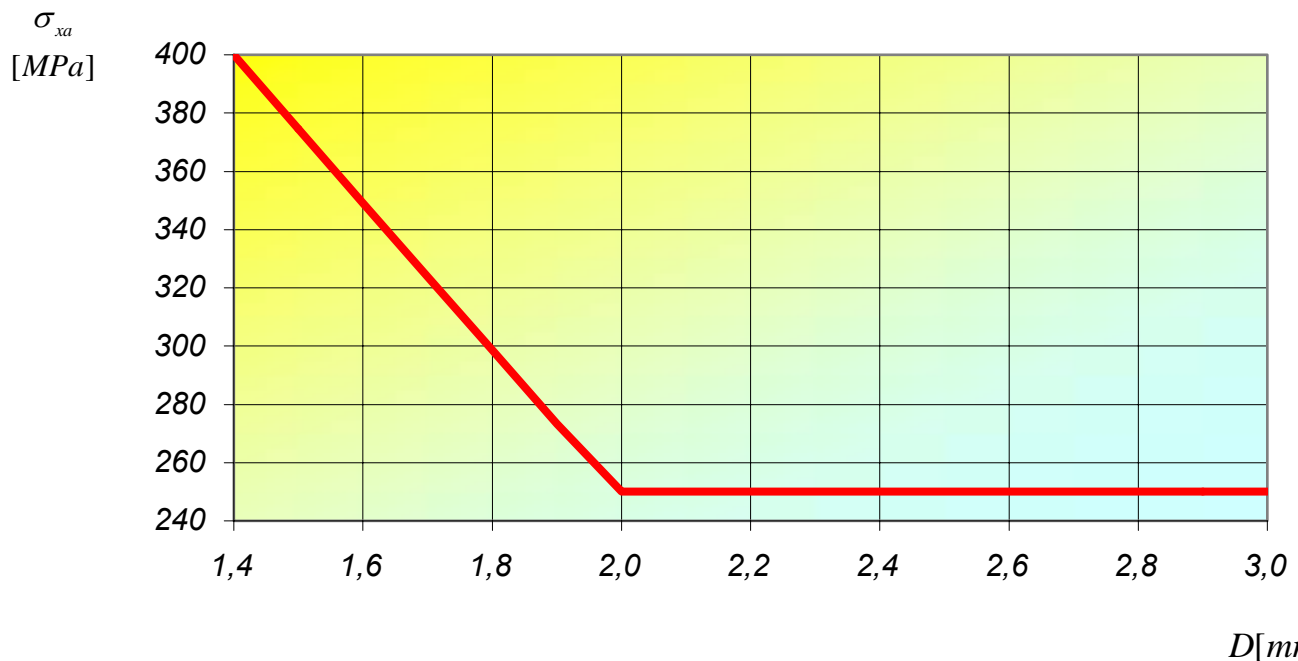


Figura 5.8

Poiché, l'esponente della variabile D è molto vicino all'unità ($0,952 \approx 1$), il grafico della funzione $\sigma_x = f(D)$, compreso tra 1,4 e 2 mm (fig. 5.8), tende a una retta con una forte pendenza negativa.

Nella tabella di sotto, sono stati calcolati gli sforzi σ_x al variare del diametro della generica sezione circolare interna alla matrice (stampo) tronco-conica (fig. 5.1). Il diametro della sezione di ingresso, del filo da trafilare, è di 3 mm.

Diametro di uscita D [mm]	Sforzo applicato σ_x [MPa]	Area del filo trafilato [mm ²]	Riduzione diametro %	Riduzione sezione %
1,4	400,0	1,54	53,3	78,2
1,5	374,5	1,77	50,0	75,0
1,6	349,1	2,01	46,7	71,6
1,7	323,8	2,27	43,3	67,9
1,8	298,5	2,54	40,0	64,0
1,9	273,3	2,84	36,7	59,9
2,0	250,0	3,14	33,3	55,6
2,1	250,0	3,46	30,0	51,0
2,2	250,0	3,80	26,7	46,2
2,3	250,0	4,15	23,3	41,2
2,4	250,0	4,52	20,0	36,0
2,5	250,0	4,91	16,7	30,6
2,6	250,0	5,31	13,3	24,9
2,7	250,0	5,73	10,0	19,0
2,8	250,0	6,16	6,7	12,9
2,9	250,0	6,61	3,3	6,6

Si conclude che lo sforzo massimo teorico, si verifica quando:

$$\sigma_x(\max) = \lim_{D \rightarrow 0} \left(\sigma_Y \cdot \frac{1+B}{B} \cdot \left(1 - \left(\frac{D}{D_b} \right)^{2 \cdot B} \right) \right) = \sigma_Y \cdot \frac{1+B}{B}$$

ed in questo caso:

$$\sigma_x(\max) \approx 775 \frac{N}{mm^2}$$

mentre lo sforzo più piccolo (teorico):

$$\sigma_x(\min) = \lim_{D \rightarrow D_b} \left(\sigma_Y \cdot \frac{1+B}{B} \cdot \left(1 - \left(\frac{D}{D_b} \right)^{2 \cdot B} \right) \right) = 0$$

Nel caso specifico della trafilatura di un acciaio strutturale ASTM-A36, lo sforzo di trazione applicato dal processo di lavorazione meccanica, qui trattato, è:

$$\sigma_{xa} = \lim_{D \rightarrow D_a=1,6} \left(\sigma_Y \cdot \frac{1+B}{B} \cdot \left(1 - \left(\frac{D}{D_b} \right)^{2 \cdot B} \right) \right) \approx 350 \frac{N}{mm^2}$$

che conferma la correttezza dei valori ottenuti applicando la [\[5.1.15\]](#) e la [\[5.1.18\]](#).

Osservazioni

Dato che la tensione di rottura σ_R , per questo tipo di acciaio, è di 400 MPa (come riportato nella tabella di pagina 35), ne consegue che per evitare la rottura del filo da trafilare in fase di lavorazione, non è possibile scendere al di sotto del valore di 1,4 mm per il diametro D_a della sezione di uscita dello stampo (valori in rosso della tabella di sopra); quindi, per ottenere una sezione di uscita con diametro inferiore a 1,4 mm saranno consigliabili più passate di lavorazione.

Il diametro della sezione del filo che ha subito il processo di lavorazione è, come già evidenziato, $D_a = 1,7$ mm, questo perché è opportuno non utilizzare valori prossimi alla tensione di rottura (valori in rosso della tabella di sopra) in cui inizia la strizione, dotarsi, quindi, di un cosiddetto margine di sicurezza; per cui, per avere una riduzione del diametro D_a inferiore a 1,7 mm saranno necessari ulteriori passaggi di trafilatura.

Per ottenere diametri delle sezioni di uscita del filo superiori a 1,7 mm, ma inferiori a 2 mm, è sufficiente applicare la rispettiva tensione σ_{xa} calcolata nella tabella (pag. 52).

Se si vuole ottenere il filo trafilato con un diametro superiore a 2 mm è sufficiente applicare la tensione σ_{xa} uguale alla tensione di snervamento σ_Y ; in caso contrario, se $\sigma_{xa} < \sigma_Y$, il metallo da trafilare si trova nelle campo elastico (fig. 4.1), per cui le deformazioni non sono permanenti e non può avvenire la riduzione del diametro del filo richiesta dal processo di lavorazione.

Elaborazioni grafiche

Rappresentando graficamente la $\sigma_x = f(\sigma_y, D)$ (equazione [5.1.15]) nello spazio cartesiano:

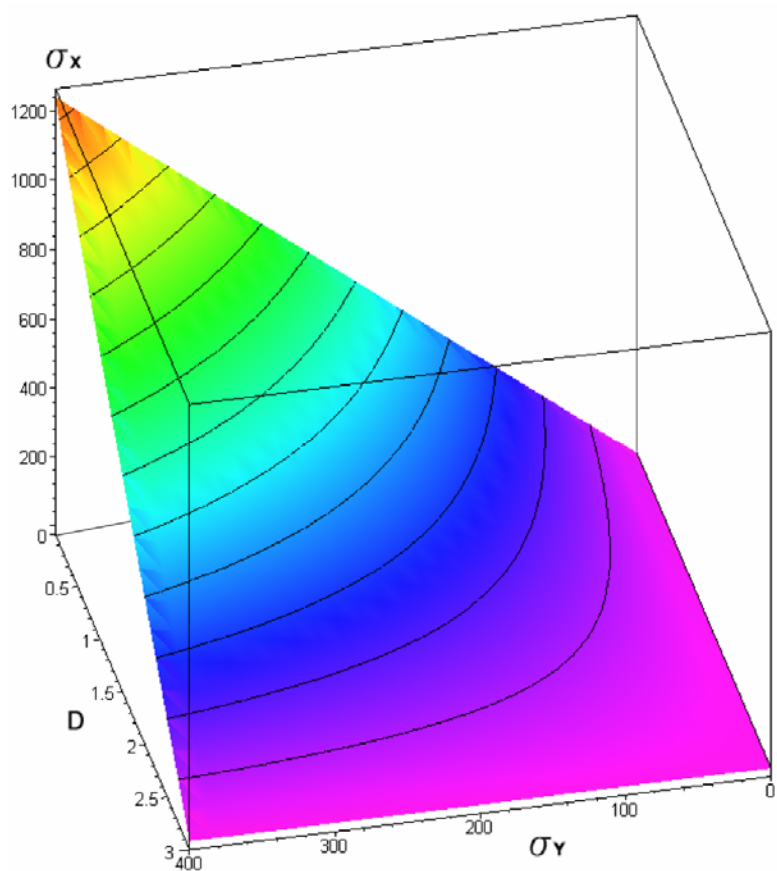


Figura 5.9

Vista in prospettiva:

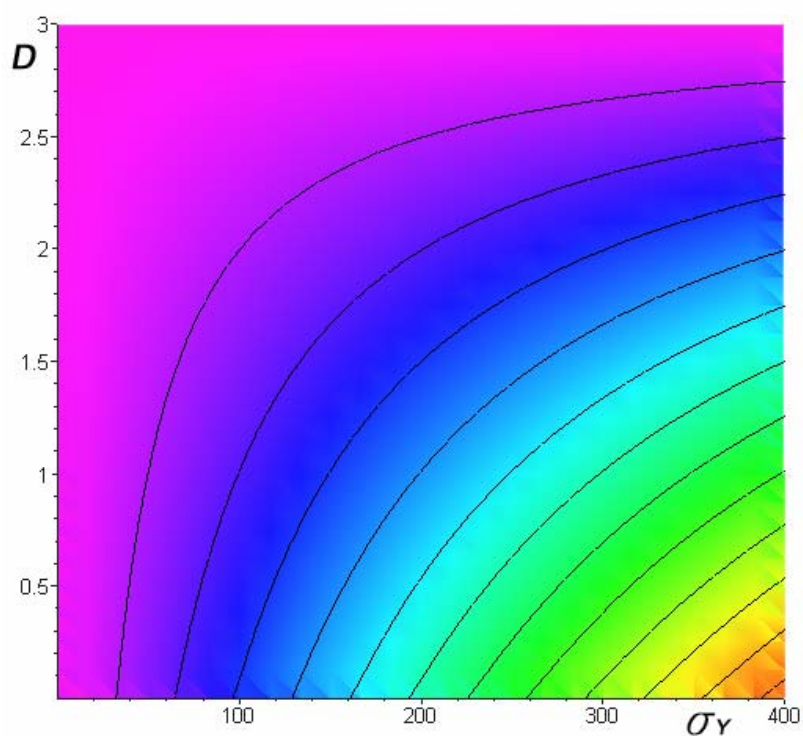


Figura 5.10

Ed ancora:

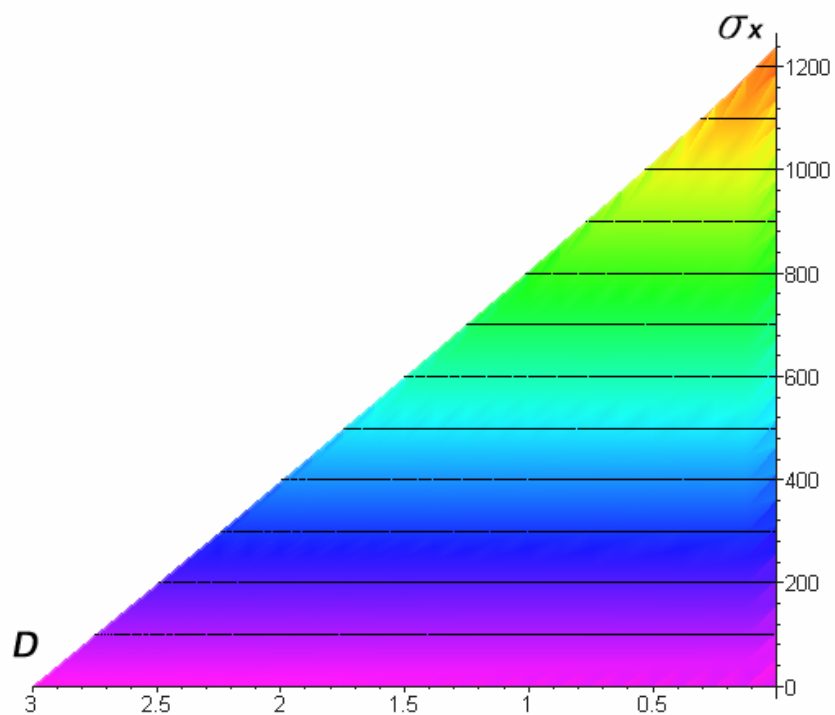


Figura 5.11

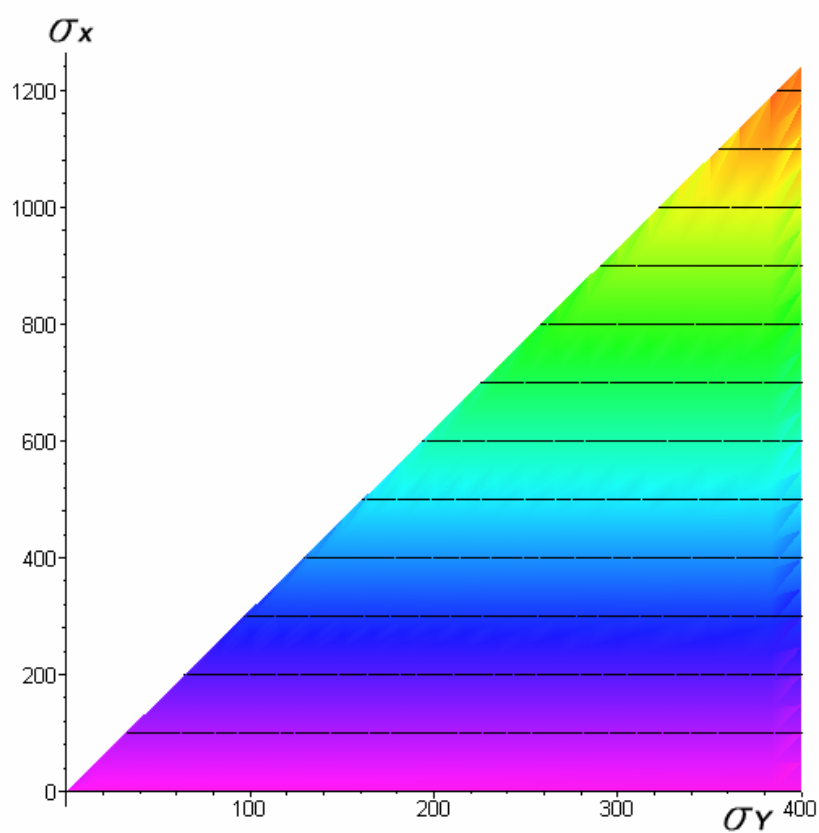


Figura 5.12

In base alla [5.1.24] è possibile calcolare la rapidità di variazione di $\sigma_x = f(\sigma_y, D)$ nel punto $P(250;1,7)$ della equazione [5.1.26] (fig. 5.13):

$$|\nabla f(250;1,7)| \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{(0,476+1)}{0,476} \cdot \left(1 - \left(\frac{1,6}{3}\right)^{2 \cdot 0,476}\right)\right)^2 + \left(-\frac{2 \cdot 250 \cdot (0,476+1)}{1,6} \cdot \left(\frac{1,6}{3}\right)^{2 \cdot 0,476}\right)^2} \approx 252,82 \quad [5.4.2]$$

ciò, aumenta più rapidamente nella direzione [5.1.27] (fig. 5.14):

$$\mathbf{D}_u f(250;1,7) = \frac{1}{0,476} \cdot \left(1 - \left(\frac{1,7}{3}\right)^{2 \cdot 0,476}\right) \mathbf{i} - \frac{2 \cdot 250}{1,6} \cdot \left(\frac{1,7}{3}\right)^{2 \cdot 0,476} \mathbf{j} \approx \mathbf{i} - 195,2 \mathbf{j} \quad [5.4.2]$$

Per avere un incremento della σ_x , in funzione dello snervamento σ_y e del generico diametro D , è necessario spostarsi sulla superficie $\sigma_x = f(\sigma_y, D)$ seguendo la direzione $\mathbf{i} - 195,2 \mathbf{j}$; la quale, rappresenta un vettore applicato sul punto $P(250;1,7)$, nella superficie $\sigma_x = f(\sigma_y, D)$, e inclinato di $89,7^\circ$ rispetto all'asse σ_y (fig. 5.14); praticamente la direzione è parallela all'asse della variabile del diametro D .

Da ciò si deduce che l'aumento dello sforzo σ_x si ha principalmente con il diminuire del diametro della generica sezione del tronco di cono della matrice (stampo).

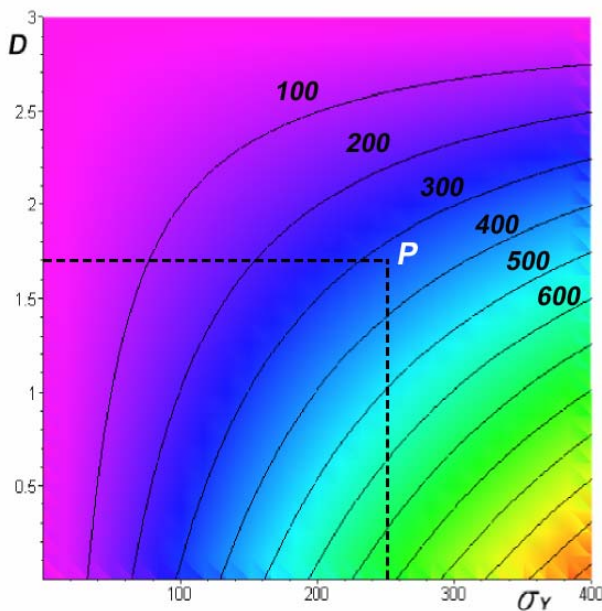


Figura 5.13

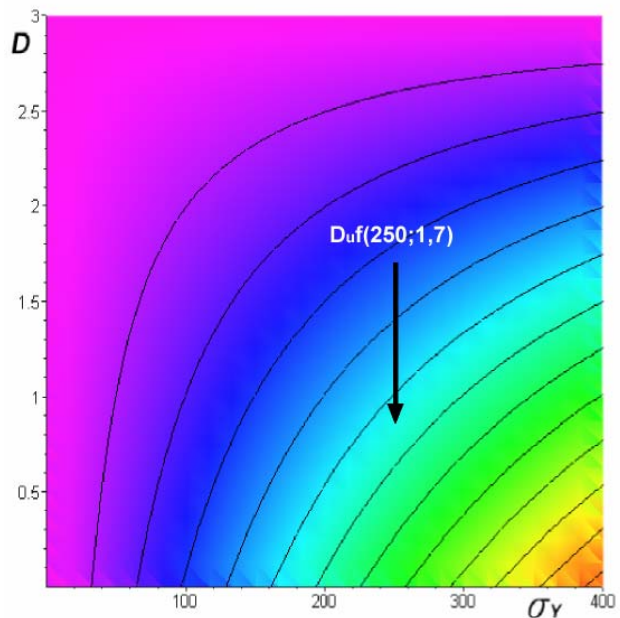


Figura 5.14

Esempi di trafilatura di un filo

Gli esempi che seguono, mostrano la variazione del diametro di uscita D_a , nel processo di trafilatura, al variare delle caratteristiche meccaniche dei metalli.

E' preferibile non ridurre il diametro del filo di uscita al di sotto del valore, indicato nelle tabelle che seguono, ed espresso dalla equazione:

$$\begin{cases} D_a = D_b \cdot \left(\frac{2 \cdot \sigma_Y \cdot (B+1) - B \cdot (\sigma_R + \sigma_Y)}{2 \cdot \sigma_Y \cdot (B+1)} \right)^{\frac{1}{2 \cdot B}} \\ \sigma_{xa} = \frac{\sigma_R + \sigma_Y}{2} \end{cases}$$

che è ottenuta sostituendo alla più generica equazione:

$$D_a = D_b \cdot \left(\frac{\sigma_Y \cdot (B+1) - B \cdot \sigma_{xa}}{\sigma_Y \cdot (B+1)} \right)^{\frac{1}{2 \cdot B}}$$

il valore dello sforzo applicato σ_{xa} , come la media aritmetica tra la tensione di snervamento σ_Y e lo sforzo di rottura σ_R .

ESEMPIO 1

METALLO	ACCIAIO
NORMA	ASTM-A36

DATI	
TENSIONE DI SNERVAMENTO [MPa]	250
TENSIONE DI ROTTURA [MPa]	400
DIAMETRO SEZIONE DI INGRESSO [mm]	3,0
SEZIONE DI INGRESSO [mm ²]	7,07
SFORZO APPLICATO [MPa]	325
COSTANTE B	0,476
ATTRITO μ	0,05
ANGOLO α°	6,0

ESITO DEI CALCOLI	
DIAMETRO SEZIONE DI USCITA [mm]	1,695
RIDUZIONE DIAMETRO DI INGRESSO %	43,50
SEZIONE DI USCITA [mm ²]	2,26
RIDUZIONE SEZIONE DI INGRESSO %	68,07

ESEMPIO 2

METALLO	ACCIAIO
NORMA	Fe 00 UNI 3983

DATI	
TENSIONE DI SNERVAMENTO [MPa]	314
TENSIONE DI ROTTURA [MPa]	407
DIAMETRO SEZIONE DI INGRESSO [mm]	3,0
SEZIONE DI INGRESSO [mm ²]	7,07
SFORZO APPLICATO [MPa]	361
COSTANTE B	0,476
ATTRITO μ	0,05
ANGOLO α°	6,0

ESITO DEI CALCOLI	
DIAMETRO SEZIONE DI USCITA [mm]	1,846
RIDUZIONE DIAMETRO DI INGRESSO %	38,48
SEZIONE DI USCITA [mm ²]	2,68
RIDUZIONE SEZIONE DI INGRESSO %	62,15

ESEMPIO 3

METALLO	ACCIAIO
NORMA	C 16 UNI 5331

DATI	
TENSIONE DI SNERVAMENTO [MPa]	637
TENSIONE DI ROTTURA [MPa]	833
DIAMETRO SEZIONE DI INGRESSO [mm]	3,0
SEZIONE DI INGRESSO [mm ²]	7,07
SFORZO APPLICATO [MPa]	735
COSTANTE B	0,476
ATTRITO μ	0,05
ANGOLO α°	6,0

ESITO DEI CALCOLI	
DIAMETRO SEZIONE DI USCITA [mm]	1,840
RIDUZIONE DIAMETRO DI INGRESSO %	38,67
SEZIONE DI USCITA [mm ²]	2,66
RIDUZIONE SEZIONE DI INGRESSO %	62,39

ESEMPIO 4

METALLO	ACCIAIO
NORMA	C 40 UNI 5332

DATI	
TENSIONE DI SNERVAMENTO [MPa]	274
TENSIONE DI ROTTURA [MPa]	564
DIAMETRO SEZIONE DI INGRESSO [mm]	3,0
SEZIONE DI INGRESSO [mm ²]	7,07
SFORZO APPLICATO [MPa]	419
COSTANTE B	0,476
ATTRITO μ	0,05
ANGOLO α°	6,0

ESITO DEI CALCOLI	
DIAMETRO SEZIONE DI USCITA [mm]	1,469
RIDUZIONE DIAMETRO DI INGRESSO %	51,02
SEZIONE DI USCITA [mm ²]	1,70
RIDUZIONE SEZIONE DI INGRESSO %	76,01

ESEMPIO 5

METALLO	ACCIAIO INOSSIDABILE
NORMA	AISI 430 UNIX12C17

DATI	
TENSIONE DI SNERVAMENTO [MPa]	652
TENSIONE DI ROTTURA [MPa]	760
DIAMETRO SEZIONE DI INGRESSO [mm]	3,0
SEZIONE DI INGRESSO [mm ²]	7,07
SFORZO APPLICATO [MPa]	706
COSTANTE B	0,476
ATTRITO μ	0,05
ANGOLO α°	6,0

ESITO DEI CALCOLI	
DIAMETRO SEZIONE DI USCITA [mm]	1,910
RIDUZIONE DIAMETRO DI INGRESSO %	36,32
SEZIONE DI USCITA [mm ²]	2,87
RIDUZIONE SEZIONE DI INGRESSO %	59,45

ESEMPIO 6

METALLO	ACCIAIO INOSSIDABILE
NORMA	AISI 410 UNIX15C13

DATI	
TENSIONE DI SNERVAMENTO [MPa]	735
TENSIONE DI ROTTURA [MPa]	1029
DIAMETRO SEZIONE DI INGRESSO [mm]	3,0
SEZIONE DI INGRESSO [mm ²]	7,07
SFORZO APPLICATO [MPa]	882
COSTANTE B	0,476
ATTRITO μ	0,05
ANGOLO α°	6,0

ESITO DEI CALCOLI	
DIAMETRO SEZIONE DI USCITA [mm]	1,794
RIDUZIONE DIAMETRO DI INGRESSO %	40,20
SEZIONE DI USCITA [mm ²]	2,53
RIDUZIONE SEZIONE DI INGRESSO %	64,23

ESEMPIO 7

METALLO	ACCIAIO EUTETTOIDICO
NORMA	AISI – SAE 1080

DATI	
TENSIONE DI SNERVAMENTO [MPa]	373
TENSIONE DI ROTTURA [MPa]	614
DIAMETRO SEZIONE DI INGRESSO [mm]	3,0
SEZIONE DI INGRESSO [mm ²]	7,07
SFORZO APPLICATO [MPa]	494
COSTANTE B	0,476
ATTRITO μ	0,05
ANGOLO α°	6,0

ESITO DEI CALCOLI	
DIAMETRO SEZIONE DI USCITA [mm]	1,672
RIDUZIONE DIAMETRO DI INGRESSO %	44,26
SEZIONE DI USCITA [mm ²]	2,20
RIDUZIONE SEZIONE DI INGRESSO %	68,93

ESEMPIO 8

METALLO	ACCIAIO INOSSIDABILE FERRITICO
NORMA	AISI – SAE 446

DATI	
TENSIONE DI SNERVAMENTO [MPa]	345
TENSIONE DI ROTTURA [MPa]	552
DIAMETRO SEZIONE DI INGRESSO [mm]	3,0
SEZIONE DI INGRESSO [mm ²]	7,07
SFORZO APPLICATO [MPa]	449
COSTANTE B	0,476
ATTRITO μ	0,05
ANGOLO α°	6,0

ESITO DEI CALCOLI	
DIAMETRO SEZIONE DI USCITA [mm]	1,695
RIDUZIONE DIAMETRO DI INGRESSO %	43,50
SEZIONE DI USCITA [mm ²]	2,26
RIDUZIONE SEZIONE DI INGRESSO %	68,07

ESEMPIO 9

METALLO	ACCIAIO INOSSIDABILE MARTENSITICO
NORMA	AISI 410

DATI	
TENSIONE DI SNERVAMENTO [MPa]	276
TENSIONE DI ROTTURA [MPa]	517
DIAMETRO SEZIONE DI INGRESSO [mm]	3,0
SEZIONE DI INGRESSO [mm ²]	7,07
SFORZO APPLICATO [MPa]	397
COSTANTE B	0,476
ATTRITO μ	0,05
ANGOLO α°	6,0

ESITO DEI CALCOLI	
DIAMETRO SEZIONE DI USCITA [mm]	1,560
RIDUZIONE DIAMETRO DI INGRESSO %	47,99
SEZIONE DI USCITA [mm ²]	1,91
RIDUZIONE SEZIONE DI INGRESSO %	72,95

ESEMPIO 10

METALLO	ACCIAIO INOSSIDABILE AUSTENITICO
NORMA	AISI 410

DATI	
TENSIONE DI SNERVAMENTO [MPa]	276
TENSIONE DI ROTTURA [MPa]	759
DIAMETRO SEZIONE DI INGRESSO [mm]	3,0
SEZIONE DI INGRESSO [mm ²]	7,07
SFORZO APPLICATO [MPa]	518
COSTANTE B	0,476
ATTRITO μ	0,05
ANGOLO α°	6,0

ESITO DEI CALCOLI	
DIAMETRO SEZIONE DI USCITA [mm]	1,132
RIDUZIONE DIAMETRO DI INGRESSO %	62,27
SEZIONE DI USCITA [mm ²]	1,01
RIDUZIONE SEZIONE DI INGRESSO %	85,77

ESEMPIO 11

METALLO	LEGA DI ALLUMINIO
NORMA	UNI 3567 - 66

DATI	
TENSIONE DI SNERVAMENTO [MPa]	37
TENSIONE DI ROTTURA [MPa]	83
DIAMETRO SEZIONE DI INGRESSO [mm]	3,0
SEZIONE DI INGRESSO [mm ²]	7,07
SFORZO APPLICATO [MPa]	60
COSTANTE B	0,476
ATTRITO μ	0,05
ANGOLO α°	6,0

ESITO DEI CALCOLI	
DIAMETRO SEZIONE DI USCITA [mm]	1,379
RIDUZIONE DIAMETRO DI INGRESSO %	54,04
SEZIONE DI USCITA [mm ²]	1,49
RIDUZIONE SEZIONE DI INGRESSO %	78,88

ESEMPIO 12

METALLO	LEGA RAME - NICHEL
COMPOSIZIONE CHIMICA %	Cu 95 Ni 5

DATI	
TENSIONE DI SNERVAMENTO [MPa]	402
TENSIONE DI ROTTURA [MPa]	431
DIAMETRO SEZIONE DI INGRESSO [mm]	3,0
SEZIONE DI INGRESSO [mm ²]	7,07
SFORZO APPLICATO [MPa]	417
COSTANTE B	0,476
ATTRITO μ	0,05
ANGOLO α°	6,0

ESITO DEI CALCOLI	
DIAMETRO SEZIONE DI USCITA [mm]	1,957
RIDUZIONE DIAMETRO DI INGRESSO %	34,77
SEZIONE DI USCITA [mm ²]	3,01
RIDUZIONE SEZIONE DI INGRESSO %	57,45

Nel caso la tensione applicata nel processo di trafilatura coincidesse con la tensione di snervamento, si avrebbe:

$$\sigma_{xa} = \sigma_Y \Rightarrow \frac{1+B}{B} \cdot \left(1 - \left(\frac{D_a}{D_b} \right)^{2 \cdot B} \right) = 1 \Rightarrow D_a = D_b \cdot (B+1)^{\frac{1}{2 \cdot B}}$$

ESEMPIO 13

METALLO	ACCIAIO
NORMA	ASTM-A36

DATI	
TENSIONE DI SNERVAMENTO [MPa]	250
SFORZO APPLICATO [MPa]	250
DIAMETRO SEZIONE DI INGRESSO [mm]	3,0
SEZIONE DI INGRESSO [mmq]	7,07
COSTANTE B	0,476
ATTRITO μ	0,05
ANGOLO α°	6,0

ESITO DEI CALCOLI	
DIAMETRO SEZIONE DI USCITA [mm]	1,993
RIDUZIONE DIAMETRO DI INGRESSO %	33,57
SEZIONE DI USCITA [mmq]	3,12
RIDUZIONE SEZIONE DI INGRESSO %	55,87

ESEMPIO 14

METALLO	ACCIAIO
NORMA	Fe 00 UNI 3983

DATI	
TENSIONE DI SNERVAMENTO [MPa]	314
SFORZO APPLICATO [MPa]	314
DIAMETRO SEZIONE DI INGRESSO [mm]	3,0
SEZIONE DI INGRESSO [mmq]	7,07
COSTANTE B	0,476
ATTRITO μ	0,05
ANGOLO α°	6,0

ESITO DEI CALCOLI	
DIAMETRO SEZIONE DI USCITA [mm]	1,993
RIDUZIONE DIAMETRO DI INGRESSO %	33,57
SEZIONE DI USCITA [mmq]	3,12
RIDUZIONE SEZIONE DI INGRESSO %	55,87

Trafilatura di un tubo

Per la trafilatura di un tubo, possono aversi due casi, mostrati nelle figure 5.15 e 5.16.

Nel caso di riduzione del diametro della sezione interna del tubo (fig. 5.15), analogamente a quanto analizzato per un filo, si esprimono i contributi dovuti alla tensione longitudinale, alla pressione del punzone e agli attriti della matrice e del punzone stesso.

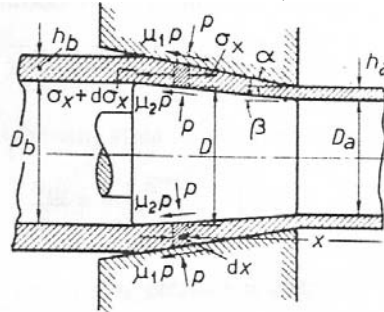


Figura 5.15

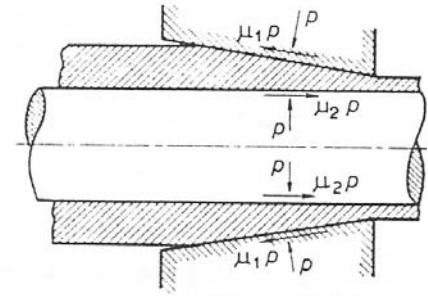


Figura 5.16

Assumendo la pressione della matrice uguale a quella esercitata dal punzone, le componenti assiali delle forze agenti sull'elemento di tubo, si esprimono:

$$(\sigma_x + d\sigma_x) \cdot (h + dh) \cdot \pi \cdot D - \sigma_x \cdot h \cdot \pi \cdot D = (\sigma_x \cdot dh + h \cdot d\sigma_x) \cdot \pi \cdot D \quad [5.5.1]$$

dovuta alla tensione longitudinale;

$$\int_0^{2\pi} p \cdot \left(\frac{dx}{\cos \alpha} \cdot \frac{D}{2} d\theta \right) \cdot \sin \alpha = p \cdot \pi \cdot D \cdot \tan \alpha \cdot dx \quad [5.5.2]$$

dovuta alla pressione della matrice (stampo);

$$-\int_0^{2\pi} p \cdot \left(\frac{dx}{\cos \beta} \cdot \frac{D}{2} d\theta \right) \cdot \sin \beta = -p \cdot \pi \cdot D \cdot \tan \beta \cdot dx \quad [5.5.3]$$

dovuta alla pressione del punzone;

$$\int_0^{2\pi} \mu_1 \cdot p \cdot \left(\frac{dx}{\cos \alpha} \cdot \frac{D}{2} d\theta \right) \cdot \sin \alpha = \mu_1 \cdot p \cdot \pi \cdot D \cdot dx \quad [5.5.4]$$

dovuta all'attrito della matrice (stampo);

$$\int_0^{2\pi} \mu_2 \cdot p \cdot \left(\frac{dx}{\cos \beta} \cdot \frac{D}{2} d\theta \right) \cdot \sin \beta = \mu_2 \cdot p \cdot \pi \cdot D \cdot dx \quad [5.5.5]$$

dovuta all'attrito del punzone.

Sotto trafilatura costante, le condizioni sopra espresse, devono trovarsi in equilibrio.

Così:

$$(\sigma_x \cdot dh + h \cdot d\sigma_x) \cdot \pi \cdot D + p \cdot \pi \cdot D \cdot (\tan \alpha - \tan \beta) \cdot dx + p \cdot \pi \cdot D \cdot (\mu_1 + \mu_2) \cdot dx = 0 \quad [5.5.6]$$

Dalla variazione dello spessore netto del tubo, si ha:

$$dh = dx \tan \alpha - dx \tan \beta \quad [5.5.7]$$

l'equazione [5.5.6] diventa:

$$(\sigma_x \cdot dh + h \cdot d\sigma_x) + p \cdot dh \cdot \left(1 + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\tan \alpha - \tan \beta} \right) = 0 \quad [5.5.8]$$

Indicando con:

$$B_{plug} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\tan \alpha - \tan \beta} \quad [5.5.9]$$

il parametro del punzone, l'equazione [5.5.8] può essere riscritta come:

$$h \cdot d\sigma_x + (\sigma_x + p \cdot (1 + B_{plug})) \cdot dh = 0 \quad [5.5.10]$$

Imponendo:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_x \\ \sigma_2 = -p \end{cases} \quad [5.5.11]$$

dal criterio di Von Mises (fig. 3.3) si ha:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\zeta}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \sigma_Y \approx 1,155 \cdot \sigma_Y \quad [5.5.12]$$

da cui:

$$\sigma_x + p = \frac{\zeta}{2} \quad [5.5.13]$$

Dalla sostituzione di p nella [5.5.10] si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{d\sigma_x}{\sigma_x + \left(\frac{\zeta}{2} - \sigma_x\right) \cdot (1 + B_{plug})} = -\frac{dh}{h} \quad [5.5.14]$$

che sviluppata diventa:

$$\frac{d\sigma_x}{\sigma_x \cdot B_{plug} - \frac{\zeta}{2} \cdot (1 + B_{plug})} = \frac{dh}{h} \quad [5.5.15]$$

Per risolvere questa equazione differenziale è sufficiente integrare ambo i membri, quindi:

$$\int \frac{d\sigma_x}{\sigma_x \cdot B_{plug} - \frac{\zeta}{2} \cdot (1 + B_{plug})} = \int \frac{dh}{h} \quad [5.5.16]$$

e si ottiene:

$$\frac{1}{B_{plug}} \cdot \ln \left(\sigma_x \cdot B_{plug} - \frac{\zeta}{2} \cdot (1 + B_{plug}) \right) = \ln h + kost \quad [5.5.17]$$

Applicando le proprietà elementari dei logaritmi a questa equazione, si giunge alla forma:

$$\sigma_x \cdot B_{plug} - \frac{\zeta}{2} \cdot (1 + B_{plug}) = kost \cdot h^{B_{plug}} \quad [5.5.18]$$

Per determinare la costante di integrazione $kost$, si deve operare dalle condizioni di ingresso del tubo da trafilare; si assume:

$$\begin{cases} h = h_b \\ \sigma_x = \sigma_{xb} = 0 \end{cases} \quad [5.5.19]$$

Sostituendo le condizioni, indicate nella [5.5.19], nell'equazione [5.5.18] si determina la costante di integrazione $kost$:

$$kost = -\frac{\zeta}{2} \cdot (1 + B_{plug}) \cdot h_b^{-B_{plug}} \quad [5.5.20]$$

Per cui la [5.5.18] può risciversi come:

$$\frac{2 \cdot \sigma_x}{\zeta} = \frac{1 + B_{plug}}{B_{plug}} \cdot \left(1 - \left(\frac{h}{h_b} \right)^{B_{plug}} \right) \quad [5.5.21]$$

Ricordando che (fig. 3.3):

$$\zeta = 2 \cdot \overline{OF_1} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \sigma_Y$$

la [5.5.21] diventa:

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_Y} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot (1 + B_{plug})}{3 \cdot B_{plug}} \cdot \left(1 - \left(\frac{h}{h_b} \right)^{B_{plug}} \right) \quad [5.5.22]$$

per $h = h_a$:

$$\frac{\sigma_{xa}}{\sigma_Y} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot (1 + B_{plug})}{3 \cdot B_{plug}} \cdot \left(1 - \left(\frac{h_a}{h_b} \right)^{B_{plug}} \right) \quad [5.5.23]$$

Nel caso illustrato in figura 5.16 si imposta l'equazione differenziale:

$$d(h \cdot \sigma_x) + p \cdot dh \cdot \left(1 + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\tan \alpha - \tan \beta} \right) = 0 \quad [5.5.24]$$

E' comunemente assunto $\mu_1 = \mu_2$, quindi risolvendo l'equazione differenziale:

$$\frac{\sigma_{xa}}{\sigma_Y} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \left(1 - \left(\frac{h_a}{h_b} \right) \cdot e^{2 \cdot \mu \cdot (H_a - H_b)} \right) \quad [5.5.25]$$

In cui:

$$\begin{cases} H_a = 2 \cdot \sqrt{\frac{R}{h_a}} \cdot \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{R}{h_a}} \cdot \alpha_a \right) \\ H_b = 2 \cdot \sqrt{\frac{R}{h_a}} \cdot \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{R}{h_a}} \cdot \alpha_b \right) \end{cases}$$

PARTE VI: micrografie e macrografie



Figura 6.1



Figura 6.2

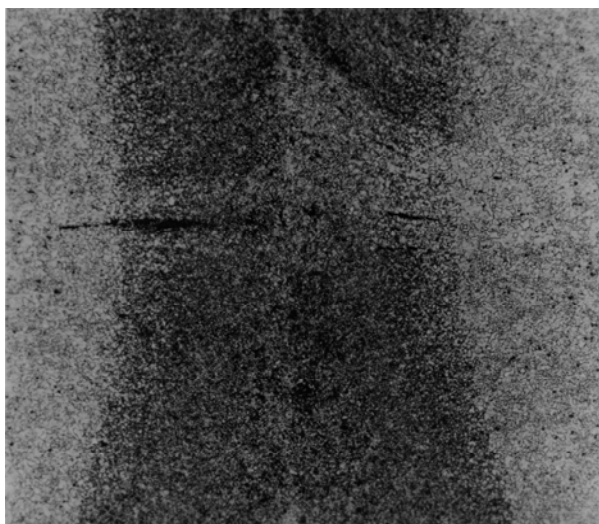


Figura 6.3

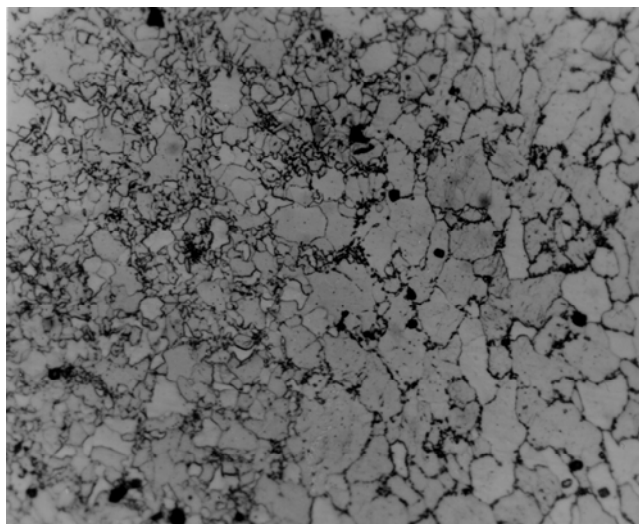


Figura 6.4

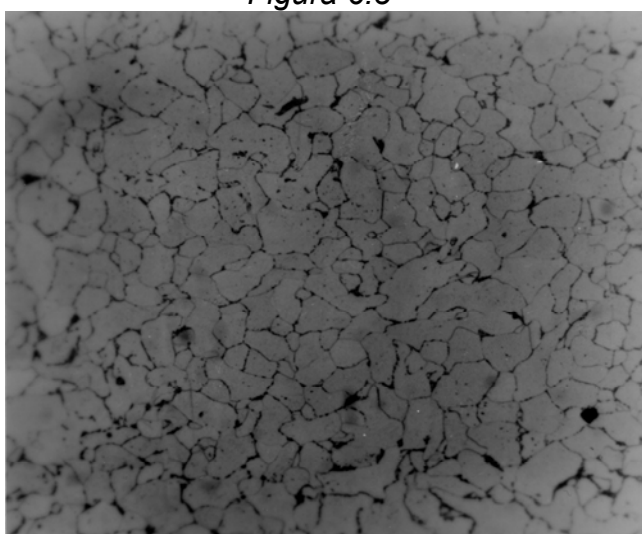


Figura 6.5

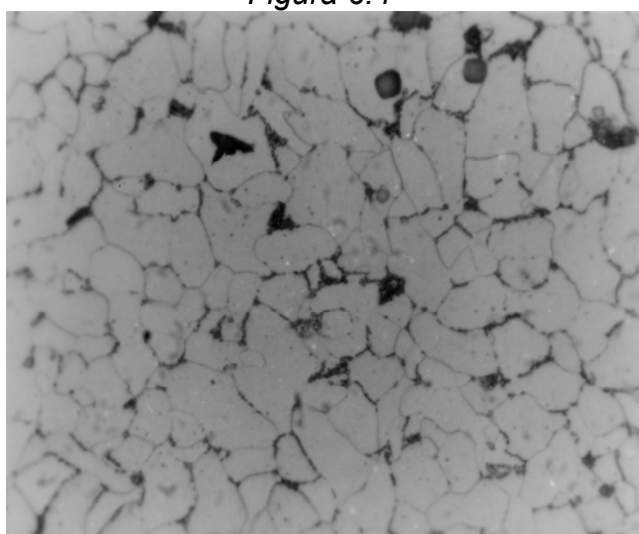


Figura 6.6

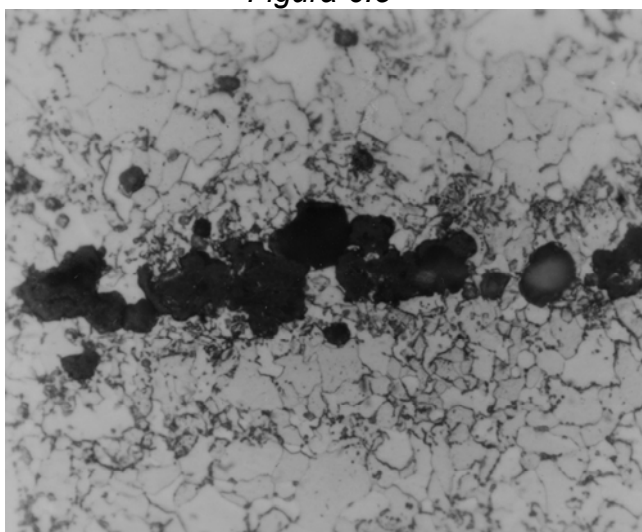


Figura 6.7

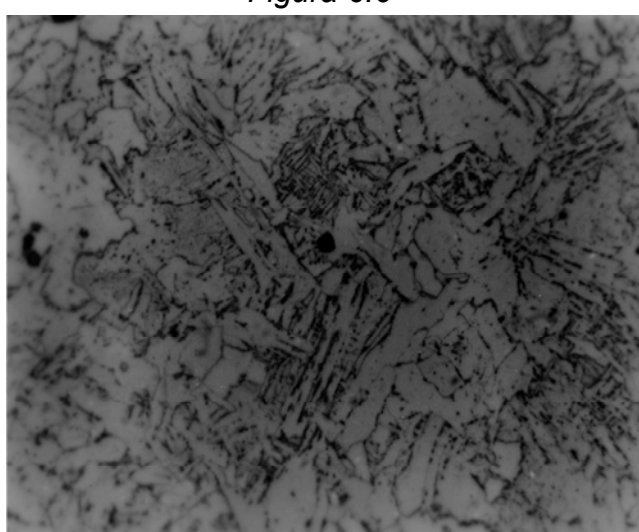


Figura 6.8

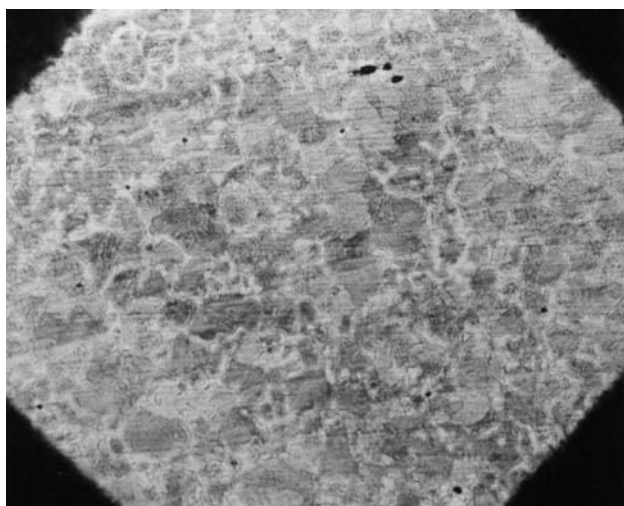


Figura 6.9

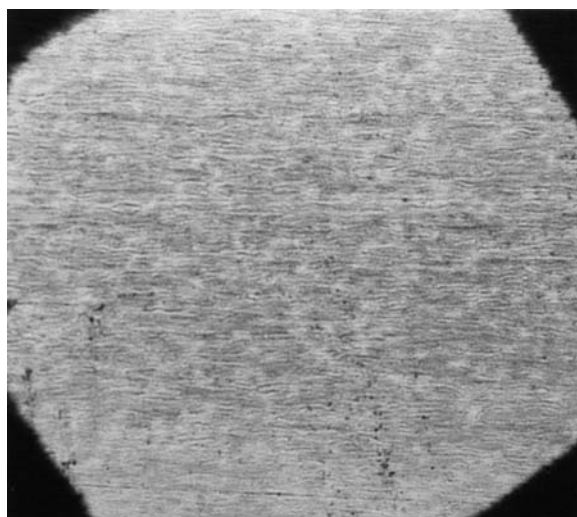


Figura 6.10

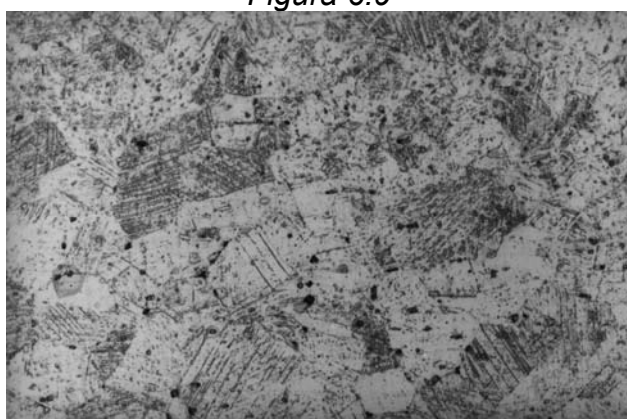


Figura 6.11

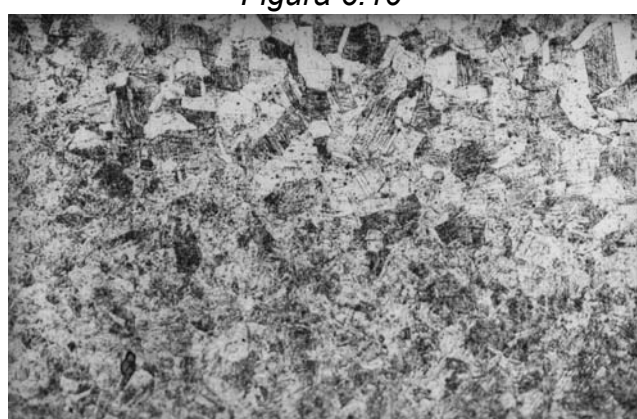


Figura 6.12

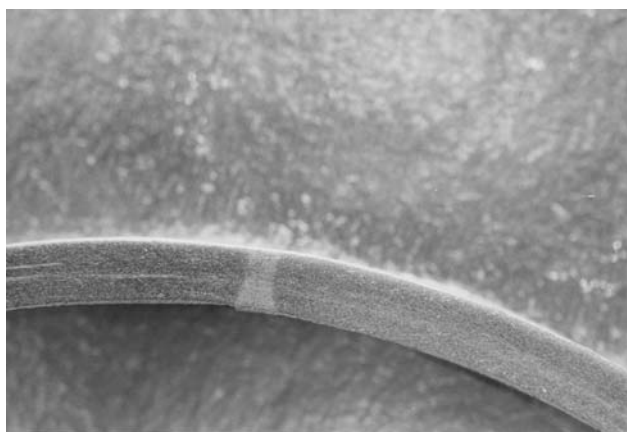


Figura 6.13

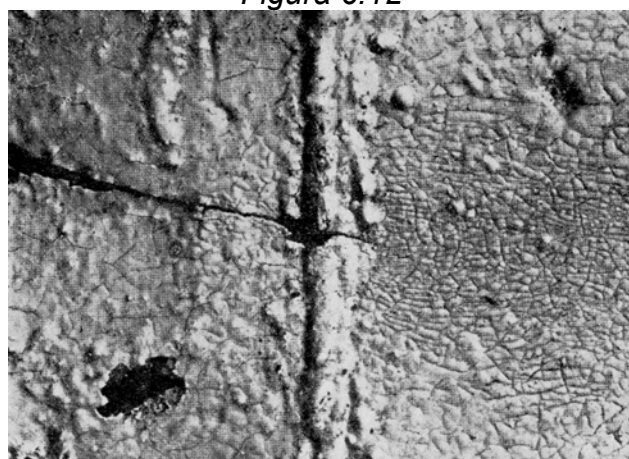


Figura 6.14

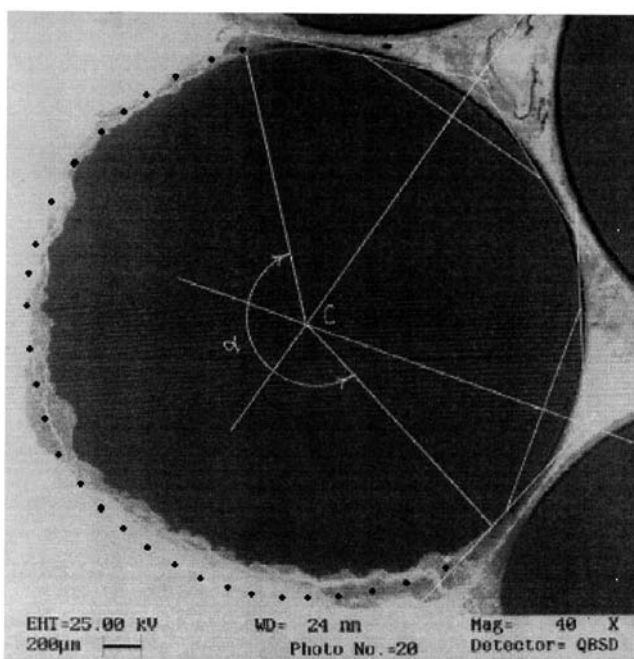


Figura 6.15

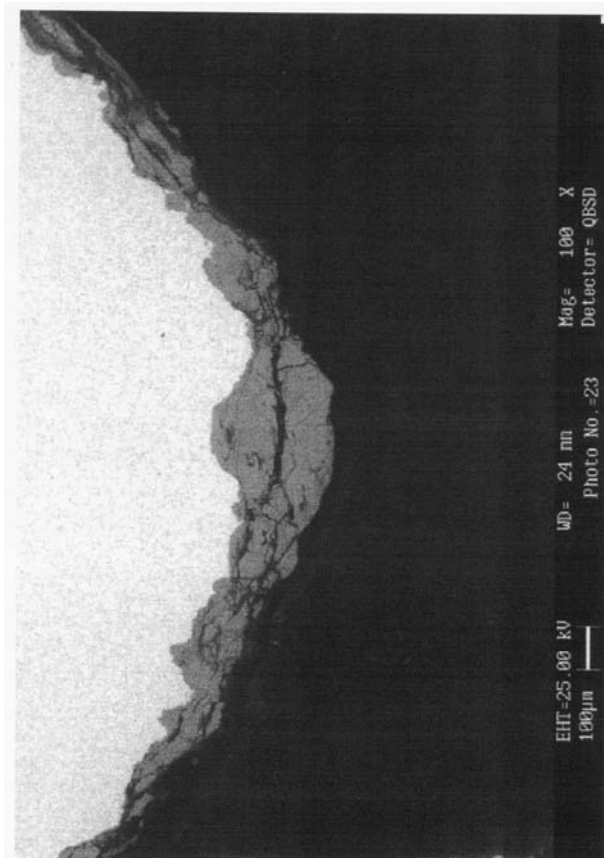


Figura 6.16

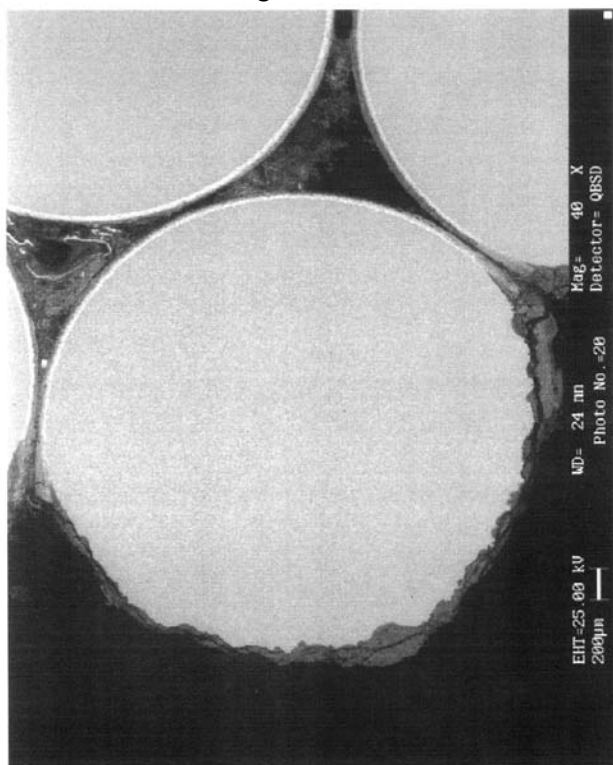


Figura 6.17

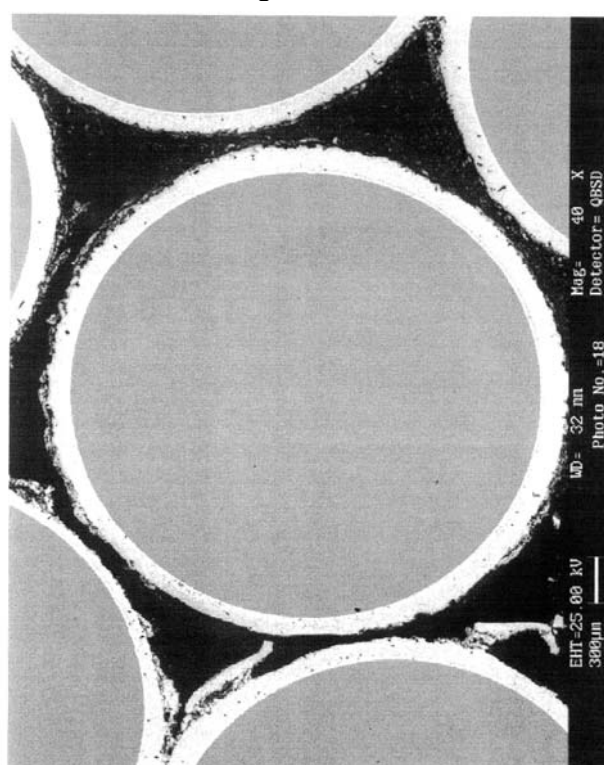


Figura 6.18

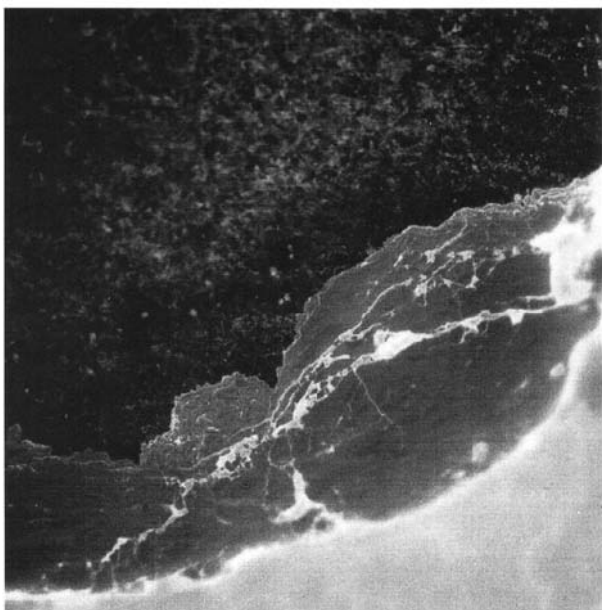


Figura 6.19

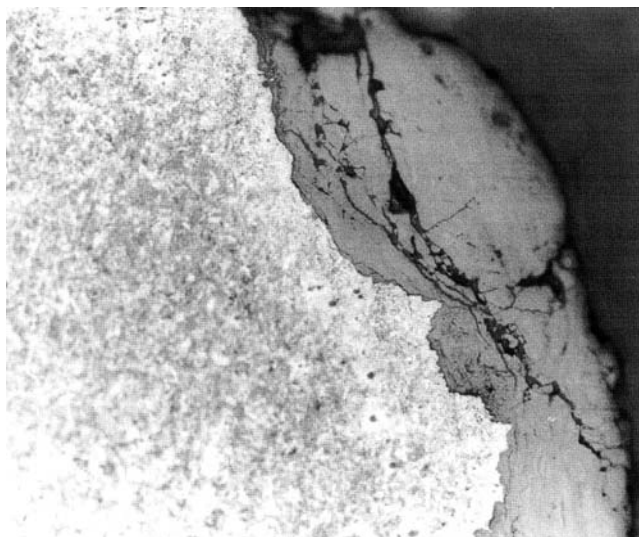


Figura 6.20

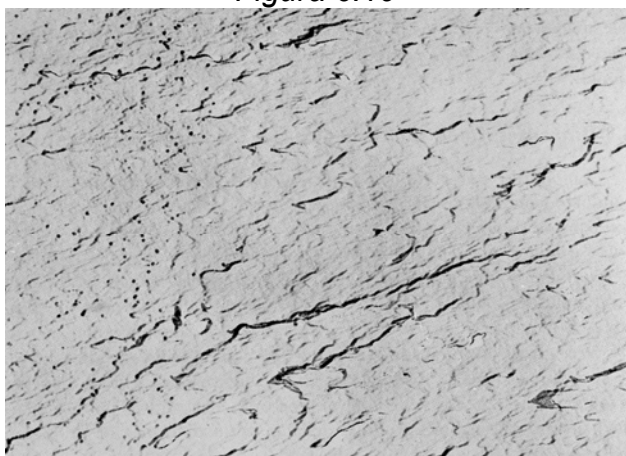


Figura 6.21

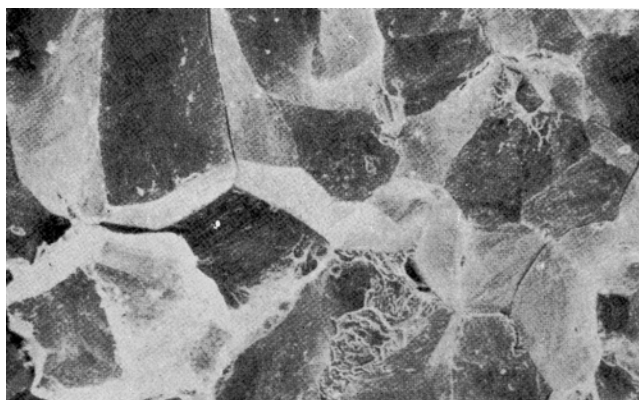


Figura 6.22

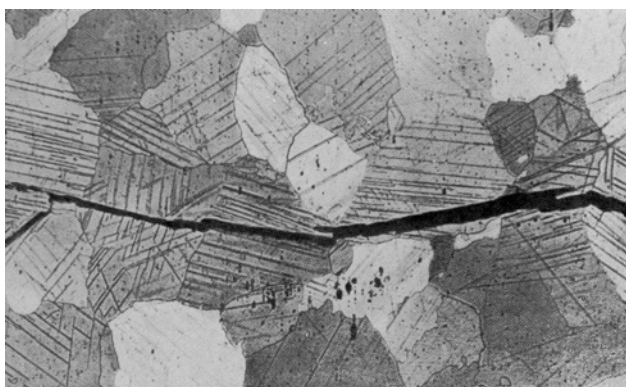


Figura 6.23

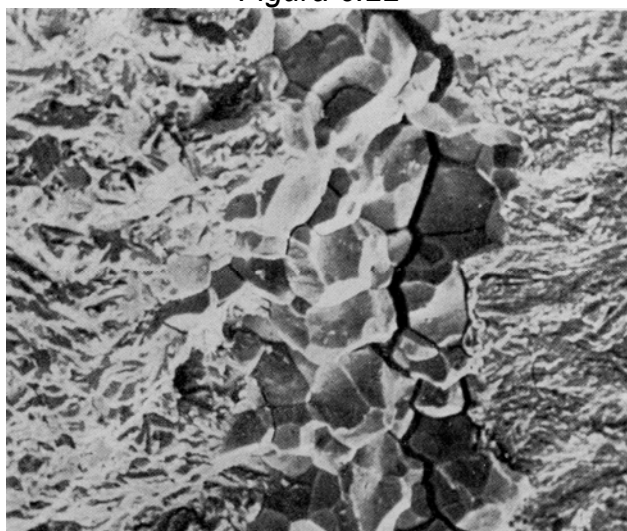


Figura 6.24

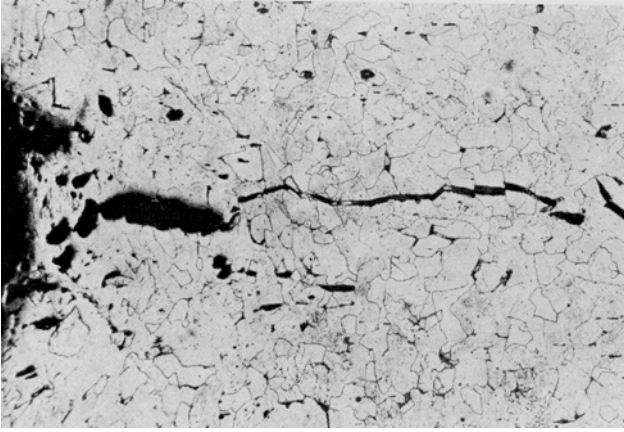


Figura 6.25

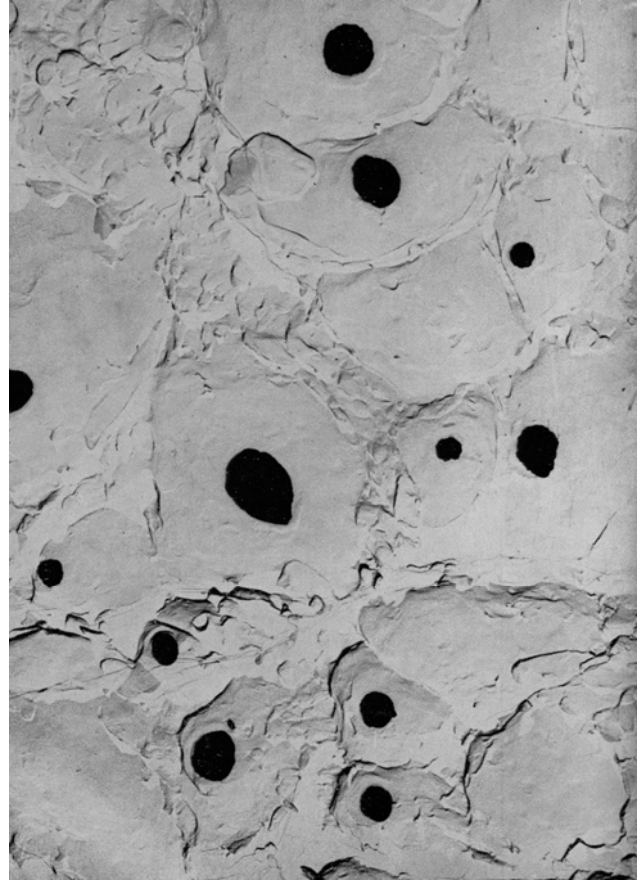


Figura 6.29

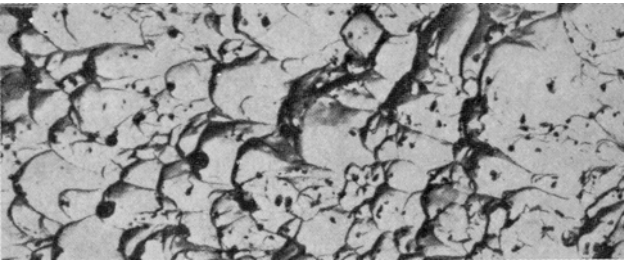


Figura 6.26

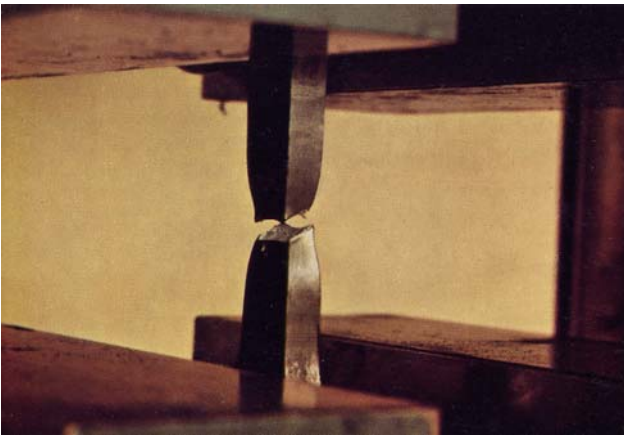


Figura 6.27

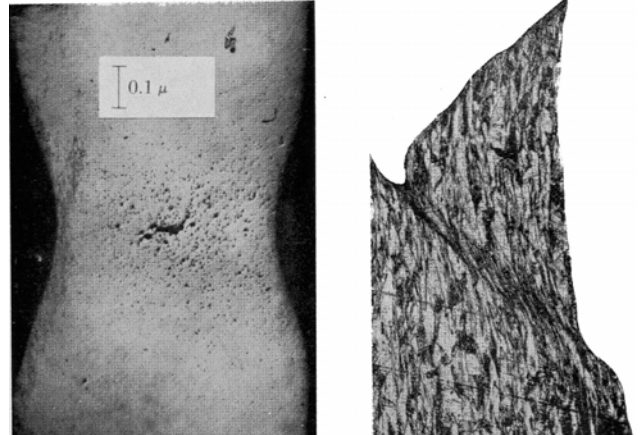


Figura 6.30

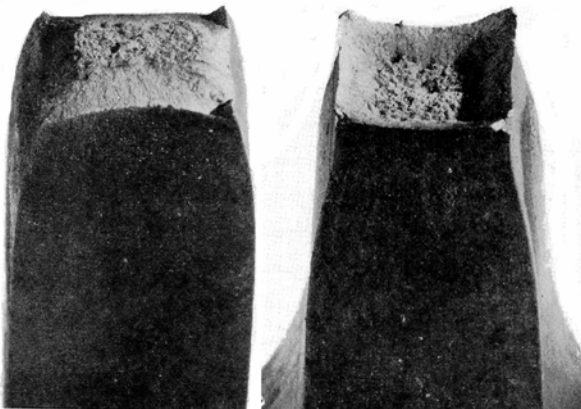


Figura 6.28



Figura 6.31

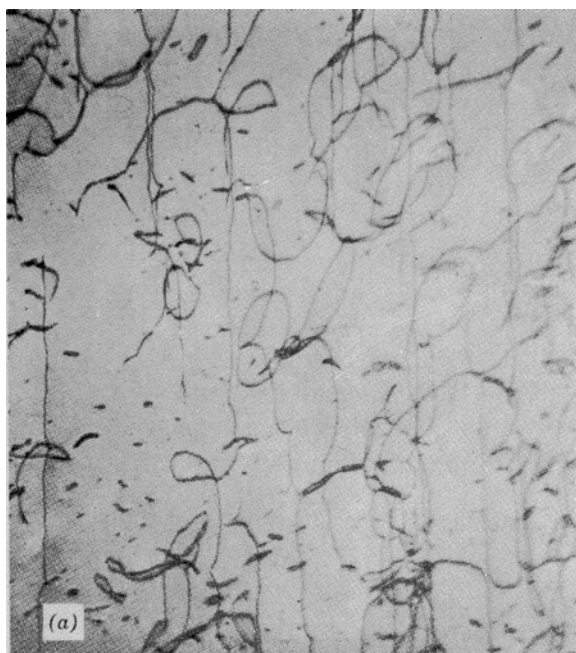


Figura 6.32

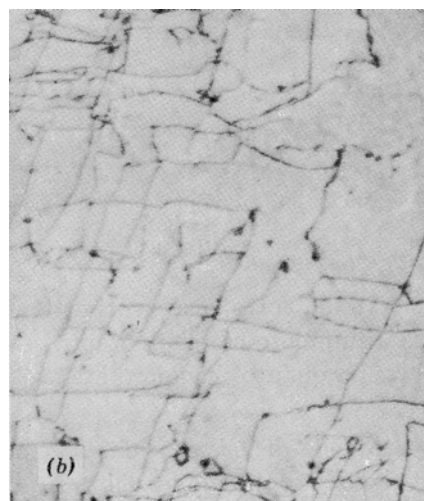


Figura 6.33

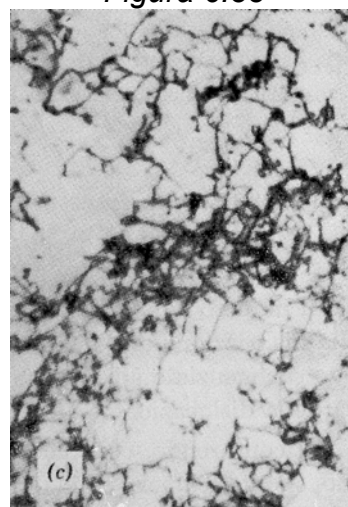


Figura 6.34

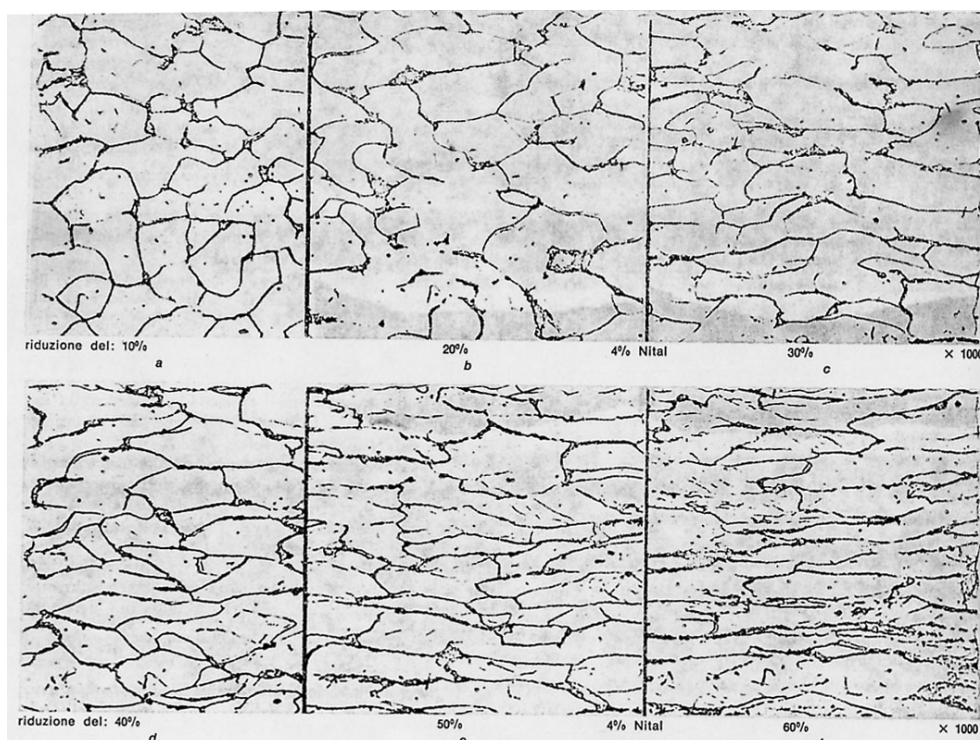


Figura 6.35

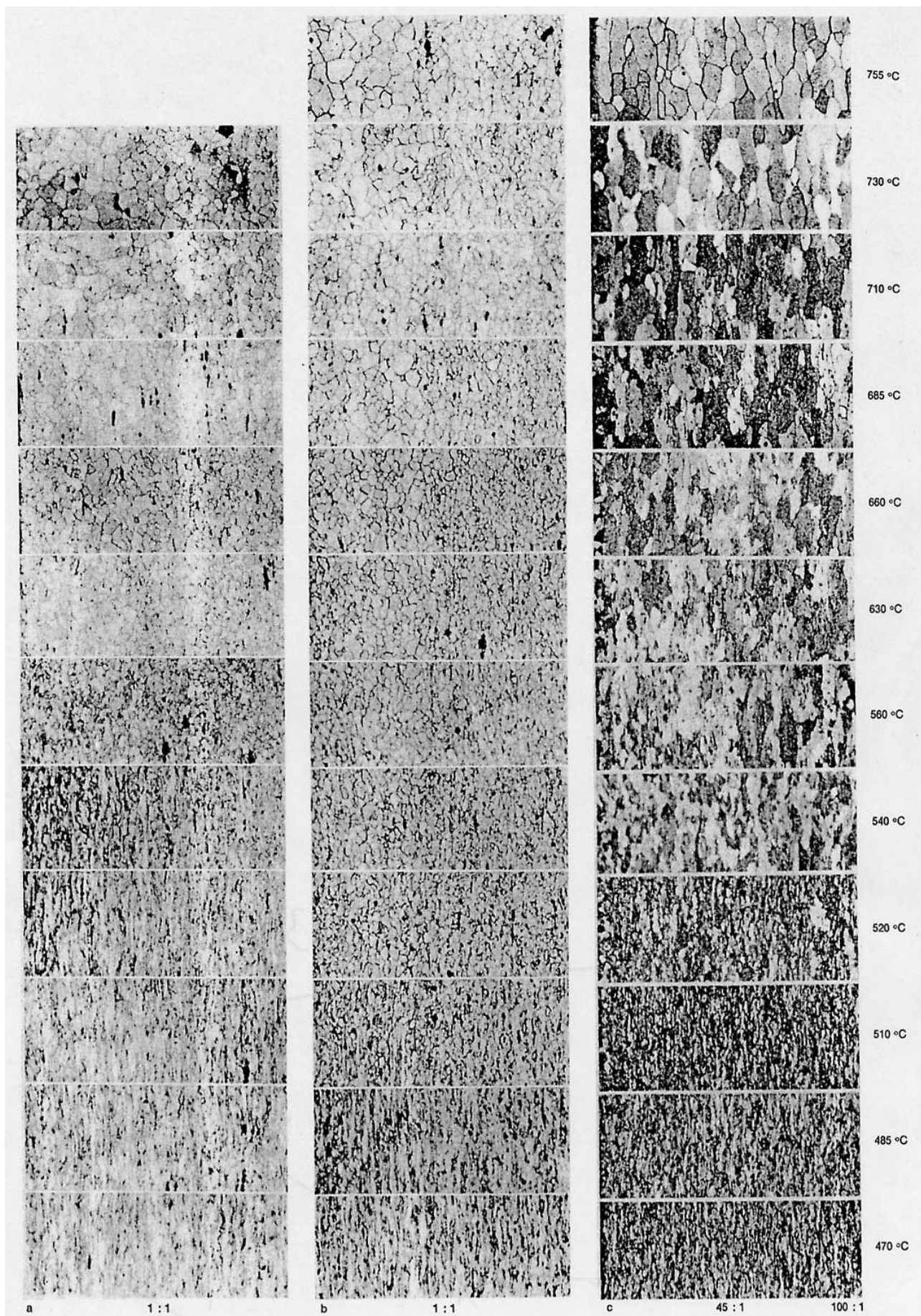


Figura 6.36

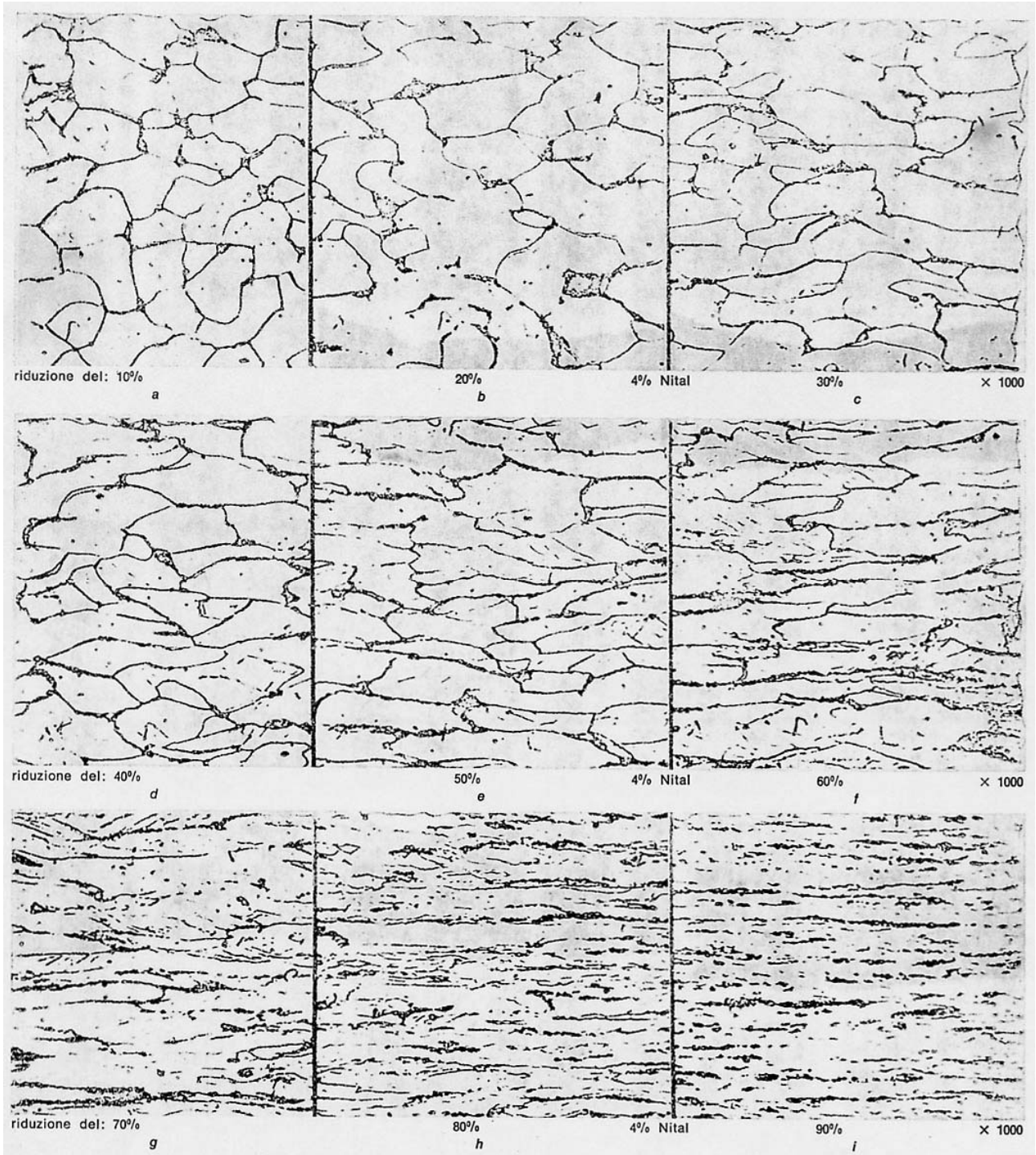


Figura 6.37

- Figura 6.1** Trefolo di acciaio zincato, del diametro di 3 mm, utilizzato per la messa a terra di un parafulmine. E' completamente corrosivo dopo 20 anni di esercizio.
- Figura 6.2** Tubo laminato a caldo, piegato e saldato.
- Figura 6.3** Particolare della saldatura del tubo di figura 6.2; la parte scura è la zona termicamente alterata e al centro sono visibili le inclusioni. Ingrandimento 50 X.
- Figura 6.4** Zona di confine, tra la parte chiara e scura della figura 6.3, in cui è ben visibile lo stato di ricristallizzazione in cui i grani enucleano sul bordo del grano preesistente. Ingrandimento 500 X.
- Figura 6.5** Attacco nital del metallo base, del tubo, lontano dalla zona alterata. Ingrandimento 500 X.
- Figura 6.6** Attacco nital del metallo base, del tubo, lontano dalla zona alterata. Ingrandimento 1000 X.
- Figura 6.7** In prossimità delle inclusioni (zona scura) si trova una struttura fine derivante dal processo di ricristallizzazione. Quando le inclusioni sono già presenti, le impurezze (ossidi) rallentano il processo di accrescimento del grano e accelerano il processo di enucleazione di nuovi grani. Ingrandimento 1000 X della zona alterata del tubo di figura 6.2.
- Figura 6.8** Struttura del tubo di figura 6.2 nella zona termicamente alterata e di tipo prevalentemente ferritica. Ingrandimento 500 X.
- Figura 6.9** Acciaio ricotto con una evidente struttura ferritica - perlitica, ma con una prevalenza di quest'ultima.
- Figura 6.10** Sezione di acciaio deformato plasticamente al 90%; in questa immagine è messo in evidenza l'orientamento lamellare perlitico a direzione privilegiata dovuta alla laminazione (pratica in laboratorio dopo patentamento).
- Figura 6.11** Saldatura senza metallo d'apporto di un acciaio inossidabile austenitico. Particolare della figura 6.12.
- Figura 6.12** In questa micrografia è visibile il confine tra la zona termicamente alterata e la zona che non ha subito il ciclo termico (non alterata).
- Figura 6.13** Particolare di saldatura del tubo di figura 6.2 ottenuto con un macroattacco; spessore di 3 mm.
- Figura 6.14** Arresto di una frattura in una struttura navale, dovuto ad una lamiera di tenacità superiore alla media. Le numerose screpolature della pitturazione rivelano l'elevata deformazione plastica del metallo sottostante.
- Figura 6.15** Filo di acciaio corrosivo, osservato attraverso una micrografia a scansione elettronica SEM. Con semplici calcoli trigonometrici è possibile determinare l'area corrosa che è pari a $5,62 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$.
- Figura 6.16** Filo di acciaio (per funivie) corrosivo dopo 10 anni di attività, osservato attraverso una micrografia a scansione elettronica SEM. Nella parte centrale di questa immagine si nota un'area in cui è presente una crepa, il cui profilo rappresenta la parte più esterna dell'acciaio non ancora intaccato; a sinistra della frattura vi è la zona corrosa mentre a destra è visibile il tipico "rigonfiamento" dovuto ad essa.
- Figura 6.17** Filo di acciaio (per funivie) corrosivo dopo 10 anni di attività, osservato attraverso una micrografia a scansione elettronica SEM. E' evidente l'azione corrosiva ed erosiva imputabile ad umidità, polveri e gas di varia natura. Il metallo malgrado la patina protettiva ha subito nel corso degli anni un deterioramento con conseguente diminuzione della sezione. Tutto ciò in virtù del fatto che la corrosione rallentata temporaneamente dal materiale di apporto ha successivamente avuto via libera una volta superata la barriera protettiva. In assenza di quest'ultima, la velocità di sviluppo delle reazioni chimiche corrosive è notevole. In questo caso, gli interstizi colmi di polveri e terra hanno svolto un'azione benefica impedendo l'avanzamento della corrosione.
- Figura 6.18** Filo di acciaio del diametro di 2,91 mm osservato attraverso una micrografia a scansione elettronica SEM. Il filo è circondato nella sua parte esterna da uno strato superficiale di un elemento legante (colore chiaro) il cui spessore è pari a 0,15 mm. Lo scopo è di proteggere l'acciaio (colore grigio) senza modificarne sostanzialmente le proprietà meccaniche. Le sbavature che si vedono, sono dovute al taglio trasversale reso necessario al fine di poter effettuare l'analisi della sezione. Negli interstizi non si nota alcuna presenza di polveri visto e considerato che questa foto è riferita al cavo all'inizio della sua messa in opera.
- Figura 6.19** Profilo corrosivo e ben delineato, soprattutto nella parte centrale, di un acciaio.
- Figura 6.20** Stesso acciaio della fig. 6.19, in cui è messo in evidenza l'attacco corrosivo nei confronti del precipitato (zone chiaro - scure); la sua formazione può avvenire con aumento o diminuzione di volume. Nel primo caso (aumento di volume), il precipitato tende ad espandersi sottoponendo la matrice circostante a compressione; nel secondo caso (diminuzione del volume), il precipitato tende a contrarsi sottoponendo la matrice

circostante a trazione. In entrambi i casi, queste tensioni contribuiscono ad aumentare localmente l'energia del sistema.

Figura 6.21 Formazione di solchi in una frattura per clivaggio^{*}; foto eseguita al microscopio elettronico a 16000X.

Figura 6.22 Frattura intergranulare di un acciaio legato al cromo – molibdeno; foto eseguita al microscopio elettronico a 1500X.

Figura 6.23 Frattura intergranulare del ferro; 15 X.

Figura 6.24 Superficie di frattura di un acciaio inossidabile sottoposto a corrosione sotto tensione. La frattura è iniziata a sinistra dove si è prodotta una lesione per fatica. Al contorno di quest'ultima si è innescata una cricca intergranulare, ben visibile per l'aspetto a blocchi dei grani interi, che si è poi trasformata nuovamente in transgranulare con un avanzamento rapido per clivaggio.

Figura 6.25 Natura discontinua della propagazione di una cricca per clivaggio in acciaio dolce a temperatura prossima alla NDT^{**}; ingrandimento 60 X.

Figura 6.26 Frattura di taglio nella saldatura di un acciaio basso – legato; ingrandimento 2000X.

Figura 6.27 Prova di trazione.

Figura 6.28 Frattura duttile a coppa di cono di provini in acciaio saldabile ad alta tenacità, si noti la strizione localizzata e la notevole deformazione plastica prima del distacco; barretta prismatica.

Figura 6.29 Frattura duttile di un acciaio 38 NCD12 fotografata al microscopio elettronico; ingrandimento 16X.

Figura 6.30 Formazione di una cricca interna alla fase di strizione di un campione di rame elettrolitico, puro al 99% (immagine a sinistra). Nella foto a destra, si nota una frattura normale a coppa dello stesso materiale (rame elettrolitico) dopo un attacco acido. Si nota la forte deformazione per taglio su un piano diagonale di 45°.

Figura 6.31 Frattura duttile a coppa di cono di provini in acciaio saldabile ad alta tenacità, si noti la strizione localizzata e la notevole deformazione plastica prima del distacco; barretta cilindrica.

Figura 6.32 Tipici intrecci di linee di dislocazioni osservati al microscopio elettronico. La densità delle dislocazioni cresce con l'entità della deformazione plastica; Fe-3% deformato al limite di snervamento a temperatura ambiente. Ingrandimento 19000X.

Figura 6.33 Ferro policristallino deformato al 7% alla temperatura di 78°C. Ingrandimento 25000X.

Figura 6.34 Ferro policristallino deformato al 13% alla temperatura di 78°C. Ingrandimento 25000X.

Figura 6.35 Effetto del diverso livello di laminazione a freddo sui grani di un acciaio. Attacco Nital.

Figura 6.36 Effetto della laminazione a caldo (temperatura indicata alla destra della figura) sui grani di un acciaio effervescente, ricotto (15 ore) e raffreddato. Attacco Nital.

Figura 6.37 Effetto del diverso livello di laminazione a freddo sui grani di un acciaio. Attacco Nital.

^{*}Clivaggio

^{**}NDT

Fessurazione.

Acronimo di Nil Ductility Transition Temperature, definita come la temperatura al disopra della quale non sono più rilevabili effetti di deformazione plastica ai bordi dell'intaglio.

Al disotto di questa temperatura si può avere l'innescò e la propagazione di fratture fragili in campo elastico.

PARTE VII: appendice

Il patentamento

E' un trattamento di tempra "blanda" che si realizza raffreddando il pezzo, dopo l'austenitizzazione, a una temperatura superiore a M_s e notevolmente inferiore ad A_{cl} (trasformazione della perlite in austenite) in un bagno di piombo fuso. Si mantiene a tale temperatura (intorno ai 600°C) per il tempo sufficiente a completare la trasformazione nelle strutture desiderate, favorevoli alle lavorazioni di deformazioni a freddo. L'omogeneità strutturale é la caratteristica principale di questo trattamento: se il patentamento viene eseguito in modo corretto, si riesce ad ottenere (come nel nostro caso) una struttura omogenea di tipo perlitico fine, come risulta anche dall'analisi dei diagrammi TTT. Sullo stato strutturale finale del metallo hanno grandissima importanza i parametri di processo, vale a dire tutte quelle variabili che entrano in gioco nel trattamento termico: temperatura di trasformazione di fase, velocità di raffreddamento, dimensioni del grano della struttura di partenza. Raffreddando troppo lentamente oppure innalzando eccessivamente la temperatura di trasformazione, accanto alla perlite si ottiene della ferrite indesiderata, che comporta un abbassamento della resistenza agli sforzi.

Quanto più bassa é la temperatura di trasformazione di fase nel campo di formazione della perlite, più fine é la microstruttura risultante, nel senso che diminuisce l'interdistanza delle lamelle di cementite, con conseguente aumento della resistenza. E' molto importante in questo tipo di trattamento ottenere perlite in quanto la resistenza dell'acciaio con struttura perlitica é proporzionale all'inverso della radice quadrata dell'interdistanza lamellare.

La misura dell'interdistanza λ fra le lamelle perlitiche é complicata dal fatto che, anche supponendo che si mantenga costante entro ogni colonia di perlite e su tutto il volume di materiale, essa possa apparire diversa da una colonia all'altra, sulla superficie di un provino metallografico, semplicemente per effetto del sezionamento.

Per il calcolo dell'interdistanza λ si considera il metodo di Pellisier :

Una volta determinata la distribuzione delle distanze apparenti, λ , misurate su alcune centinaia di colonie perlitiche, si é ricavata con il metodo del Point Counting, per ogni valore di λ , la percentuale f_λ di tutte le colonie che presentano un'interdistanza apparente minore o uguale a λ .

L'interdistanza effettiva λ_0 viene calcolata tramite l'espressione:

$$\lambda = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2} \Rightarrow \lambda_0 = \lambda \cdot \sqrt{1 - f_\lambda^2}$$

Se, come in pratica, anche λ_0 é variabile, si può ricavare il valore medio $\overline{\lambda_0}$ con lo stesso procedimento, purché si considerino valori f_λ abbastanza grandi. Come già accennato in precedenza, i valori dell'interdistanza lamellare dipendono dalla temperatura di formazione della perlite. Più bassa é questa temperatura, più piccolo é il valore di λ_0 . La microstruttura influenza notevolmente la resistenza meccanica del metallo in quanto σ_r cresce fortemente al diminuire della distanza delle lamelle, come dimostra la relazione di Gladman:

$$\sigma_r = 721 + \frac{3,55}{\sqrt{\lambda_0}} + 97(\%Si)$$

Tuttavia i valori di σ_r ricavati sperimentalmente risultano superiori (dal 5 al 15%) a quelli ottenibili applicando la formula di Gladman.

Il termine M_s citato nella pagina precedente è la temperatura alla quale inizia la formazione della martensite, determinabile mediante la formula di Carapella:

$$M_s = 514^\circ\text{C}(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6)$$

$$K_1 = 1 - 0,620 (\%C)$$

$$K_2 = 1 - 0,092 (\%M_n)$$

$$K_3 = 1 - 0,070 (\%C_r)$$

$$K_4 = 1 - 0,045 (\%N_i)$$

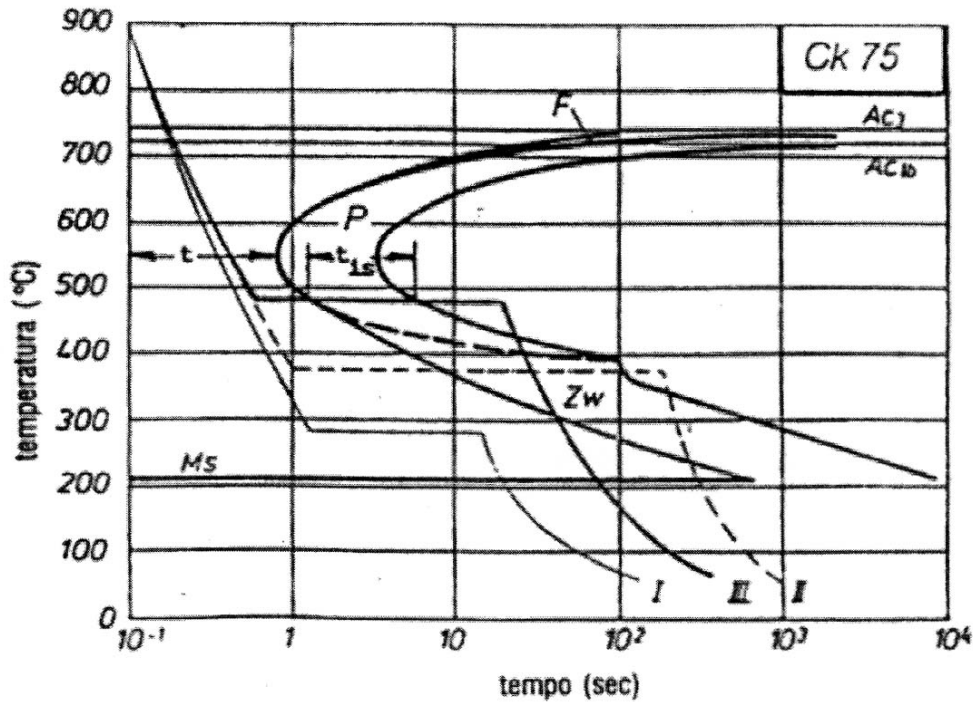
$$K_5 = 1 - 0,033 (\%S_i)$$

$$K_6 = 1 - 0,013 (\%W)$$

Relativamente alla composizione chimica del nostro acciaio: $M_s = 256^\circ\text{C}$

La durezza della perlite ottenuta mediante il patentamento è così stimata: $HRC \approx 30$

Nella figura di sotto, il diagramma *TTT* (temperatura – tempo – trasformazione) nel quale si mette in risalto la struttura perlitica corrispondente:



- I Tempra
- II Bonifica isoterma
- III Patentamento
- t Tempo disponibile di tempra
- t_{is} Tempo necessario di permanenza

Il microscopio

Il microscopio è uno strumento capace di fornire un'immagine ingrandita di un piccolo oggetto osservato attraverso di esso. A seconda della radiazione utilizzata per “illuminare” il campione, si distinguono due tipi principali di microscopio, quello ottico e quello elettronico: nel primo si impiega radiazione visibile (luce), nel secondo un fascio di elettroni accelerati. Il microscopio ottico fu inventato tra il XVI e il XVII secolo; la sua paternità è controversa, ma la maggior parte delle fonti la attribuisce all'olandese Zacharias Jansen, che avrebbe costruito il primo esemplare nel 1595. Per l'invenzione del microscopio elettronico, invece, che vanta prestazioni di gran lunga superiori a quello ottico, si è dovuto aspettare la messa a punto della tecnologia elettronica: la sua invenzione risale al 1931.

Microscopi ottici

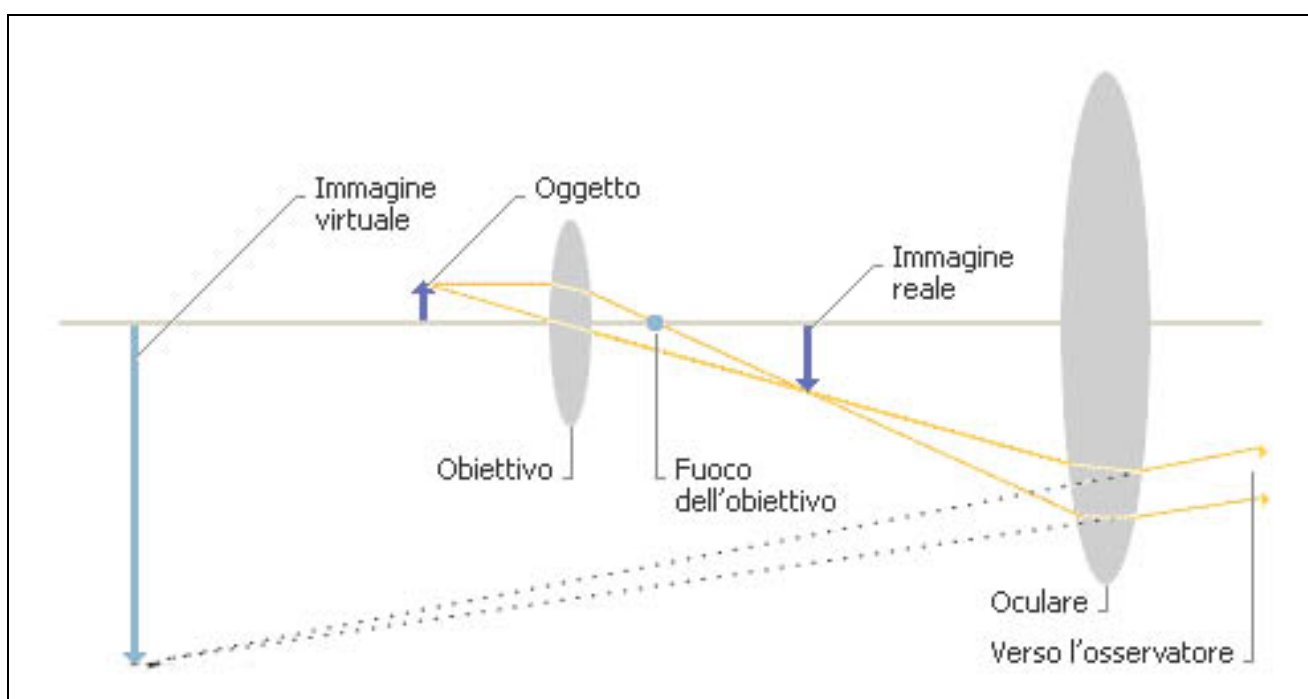


Figura 7.1

In figura 7.1: due lenti convergenti bastano a costruire un microscopio semplice. L'obiettivo, posto vicino all'oggetto da osservare, produce un'immagine reale, ingrandita e capovolta, che viene osservata attraverso l'oculare. Nel microscopio professionale, invece, sia l'obiettivo che l'oculare sono composti, ovvero costituiti da diverse lenti, che nell'insieme forniscono un'immagine di alta qualità.

Il nome completo del microscopio ottico è “microscopio ottico composto” (MOC), denominazione che permette di distinguerlo dal cosiddetto microscopio semplice, lo strumento ottico meglio noto come lente di ingrandimento.

Nella sua forma più essenziale, il microscopio composto è costituito da una combinazione di due lenti convergenti – l'obiettivo e l'oculare – montate a distanza fissa alle estremità di un tubo chiuso. L'obiettivo raccoglie la luce proveniente dal campione e ne fornisce un'immagine reale, capovolta e ingrandita; l'oculare riceve questa immagine nel proprio fuoco e la trasforma nell'immagine finale, che è virtuale, capovolta e ingrandita rispetto all'immagine reale.

Quella descritta è la struttura essenziale del microscopio composto. Va tenuto presente, tuttavia, che nella realtà l'obiettivo e l'oculare non sono singole lenti, ma più complicati sistemi di lenti combinate, che nel complesso producono l'effetto di singole lenti convergenti, prive dei difetti di aberrazione cromatica.

Strumentazione accessori

Il tubo che porta l'ottica del microscopio è montato su una struttura chiamata statore. L'attrezzatura accessori di un microscopio comprende inoltre il piano portacampioni e alcuni dispositivi di regolazione della distanza dell'obiettivo dall'oggetto, per la messa a fuoco. In genere il campione da osservare viene posto fra due vetrini sottili e fissato al portacampioni. La luce che lo illumina può provenire da una sorgente diretta o da uno specchio che la indirizza sul campione. I modelli più sofisticati sono provvisti inoltre di un sistema di viti micrometriche per la regolazione fine della posizione del campione, e di tre o più obiettivi montati su una testa girevole, che consentono di variare rapidamente il potere di ingrandimento dello strumento.

Nel caso in cui il microscopio venga utilizzato per realizzare microfotografie, è predisposto per ospitare l'oculare di una macchina fotografica. Per questa applicazione il sistema è studiato in modo che l'immagine che impressiona l'emulsione fotografica sia reale, e non virtuale. Si utilizza quindi direttamente l'immagine fornita dall'obiettivo che, appunto, è reale, capovolta e ingrandita.

Illuminazione

Esistono diversi sistemi di illuminazione del campione, a seconda delle sue caratteristiche di trasparenza o opacità. I sistemi più utilizzati sono quello a trasmissione (o a campo chiaro) e a diffusione (o a campo scuro). Nel primo caso, la luce proveniente da una lampada a incandescenza attraversa completamente il campione; nel secondo, colpisce il campione e ne viene diffusa. Più precisamente, nel sistema a diffusione il fascio incide sul campione lungo una direzione quasi perpendicolare all'asse dello strumento, per cui l'obiettivo raccoglie solo la luce diffratta dal campione. Il risultato è che le parti libere del campione appaiono come un fondo scuro su cui risaltano i particolari in esame. La tecnica è particolarmente utile per l'osservazione di campioni biologici limpidi e trasparenti, e per oggetti talmente piccoli da risultare invisibili con il sistema di illuminazione normale.

Nel caso in cui il preparato sia completamente opaco, infine, si adotta un sistema a riflessione, nel quale la radiazione che giunge all'obiettivo è quella riflessa dalla superficie del campione.

Prestazioni

Il potere di ingrandimento di un microscopio ottico è dato dal prodotto di quello dell'obiettivo per quello dell'oculare. I modelli più sofisticati sono in grado di ingrandire l'immagine del campione fino a circa 1000 volte (1000x). Il potere di risoluzione, invece, è limitato dal fenomeno della diffrazione, e dipende dalla lunghezza d'onda della radiazione impiegata; per la luce bianca, la minima distanza percettibile è di 0,2 micron (0,2 millesimi di millimetro), che equivale a un potere risolutivo 1000 volte migliore di quello dell'occhio umano.

La più alta risoluzione per un microscopio ottico è stata raggiunta da un gruppo di ricercatori statunitensi, che hanno perfezionato una tecnica nota come “*microscopia Raman a campo vicino*”. La tecnica, applicata a campioni di nanotubi di carbonio, ha reso possibile l'osservazione di strutture delle dimensioni di 30 nanometri. La tecnologia Raman

consiste essenzialmente nell’inviare sul campione luce laser e nell’osservare come questo la defletta, misurando i modi vibrazionali delle molecole analizzate; per focalizzare il fascio laser, in questo caso la luce è stata inviata sulla punta di un cavo d’argento di 10 nanometri, quindi utilizzata per esplorare il “vetrino” a 1 nanometro di distanza dalla sua superficie.

Microscopi ottici per usi particolari

Esistono numerose varianti del microscopio ottico composto, diverse per tecniche di illuminazione, radiazione impiegata, disposizione delle lenti.

Il microscopio stereoscopico è una di queste: è costituito da due microscopi a basso potere di ingrandimento, affiancati e puntati sullo stesso campione. Con questo impianto, sebbene l’ingrandimento non superi le 100 volte, è possibile ottenere immagini tridimensionali. Il microscopio binoculare, invece, reca due oculari in luogo di uno solo. La variante rende più agevole l’osservazione, che può essere effettuata con entrambi gli occhi.

Il microscopio a ultravioletti utilizza radiazione con lunghezza d’onda minore della luce visibile, vale a dire, luce ultravioletta. L’accorgimento produce un aumento del potere di risoluzione, ma impone alcune modifiche: poiché il vetro non è trasparente agli ultravioletti, gli elementi ottici devono essere realizzati con altri materiali, quali quarzo, fluorite o specchi alluminizzati. Essendo gli ultravioletti invisibili all’occhio umano, inoltre, per essere visualizzata, l’immagine deve essere resa per fosforescenza o per scansione elettronica.

Il microscopio polarizzatore è un microscopio ottico corredato di due nicol, di cui uno polarizzatore e uno analizzatore. Viene utilizzato principalmente in mineralogia, per il riconoscimento dei minerali in base alle loro proprietà ottiche. Il prisma polarizzatore è posizionato tra la sorgente luminosa e il campione, l’analizzatore tra l’obiettivo e l’oculare; entrambi sono montati su supporti girevoli e graduati.

Il microscopio a contrasto di fase sfrutta l’interferenza tra la luce diretta proveniente dalla sorgente e quella diffratta dal preparato, per far risaltare meglio i particolari del campione. Un dispositivo di forma anulare riduce l’intensità della luce diffusa e, contemporaneamente, introduce uno sfasamento di un quarto di lunghezza d’onda tra due raggi paralleli incidenti sul campione. Particolarmente indicato per lo studio di tessuti biologici, questo tipo di microscopio trova largo impiego in biologia e in medicina; presenta infatti il vantaggio di non dover ricorrere a colorazioni artificiali, consentendo l’osservazione di preparati viventi.

Uno degli strumenti ottici più avanzati, infine, è il *microscopio a campo vicino*, che permette la visualizzazione di dettagli di dimensioni anche inferiori a quelle della lunghezza d’onda della luce impiegata. Si tratta di uno strumento di recente invenzione, messo a punto nel 1993. Il superamento del limite di risoluzione imposto dalla diffrazione è reso possibile dall’adozione di una sorta di filtro, una sonda costituita da uno schermo opaco recante un foro di dimensioni inferiori alla lunghezza d’onda della luce impiegata. Questa sonda lambisce la superficie del campione a poche decine di nanometri di distanza, raccogliendo soltanto la luce che attraversa il forellino. La risoluzione, in questo modo, scende a circa 50 nm.

I microscopi elettronici

Lo schema di un microscopio elettronico è analogo a quello di un microscopio ottico: una sorgente produce la radiazione che incide sul campione e, passando attraverso specifici sistemi che fungono da lenti, va a comporre l'immagine ingrandita. La radiazione, tuttavia, non è di natura elettromagnetica, ma corpuscolare: si tratta infatti di un fascio di elettroni accelerati nel vuoto; le lenti convergenti, quindi, non sono di tipo ottico, ma “elettromagnetico”: sono costituite da campi elettrici e magnetici che, come è noto, sono in grado di modificare la traiettoria delle particelle cariche. Il tutto è protetto da un contenitore, all'interno del quale è praticato il vuoto. L'immagine viene composta su uno schermo fluorescente o, in alternativa, mediante sistemi fotografici o televisivi.

L'uso di elettroni in luogo di luce visibile porta notevoli vantaggi ai fini delle prestazioni dello strumento. La lunghezza d'onda minima della luce visibile, infatti, è di circa 400 nm (400 milionesimi di millimetro), mentre la lunghezza d'onda associata all'elettrone in questi strumenti può essere di soli 0,05 nm. Il potere di risoluzione del microscopio elettronico è pertanto notevolmente maggiore di quello dei microscopi ottici: si arrivano a percepire dettagli di qualche decimo di nm.

Esistono essenzialmente due tipi di microscopio elettronico: quello a trasmissione (Transmission Electron Microscope, TEM) e quello a scansione (Scanning Electron Microscope, SEM).

TEM

In un TEM, gli elettroni che costituiscono il fascio attraversano completamente il campione. Questo, dunque, deve avere uno spessore estremamente ridotto, compreso tra 5 e 500 nm. Il potere d'ingrandimento arriva fino a un milione di volte.

SEM

A differenza del TEM, che può esaminare zone estese, un SEM analizza la superficie del campione porzione per porzione, mediante un “pennello” elettronico di sezione paragonabile alla risoluzione del microscopio (dell'ordine del nm). Gli atomi della superficie, colpiti dagli elettroni del fascio, emettono elettroni secondari (riflessi o diffratti) che, insieme agli elettroni trasmessi, vengono raccolti da un rivelatore e convertiti in segnali elettrici. Ogni punto del campione analizzato corrisponde a un pixel dello schermo televisivo, cosicché, man mano che il fascio elettronico scorre sul campione, sullo schermo si costruisce un'immagine completa. Un SEM ha fattore di ingrandimento pari a circa 100.000 e fornisce un'immagine tridimensionale molto dettagliata. Con i modelli più recenti, è possibile anche seguire l'evolversi di un processo dinamico, come la reazione di un campione a una variazione di temperatura, a una trasformazione chimica o a una sollecitazione meccanica.

Altri microscopi elettronici

Nell'ambito della microscopia elettronica, sono state messe a punto diverse altre tecniche, che consentono prestazioni ancora migliori di quelle dei modelli tradizionali. Il microscopio elettronico a scansione e a trasmissione (Scanning Transmission Electron Microscope, STEM), ad esempio, combina le caratteristiche di un SEM con quelle di un TEM e ha potere risolutivo estremamente elevato, tale da arrivare a distinguere perfino gli atomi del campione.

Il microscopio analitico a sonda elettronica è dotato di un dispositivo che analizza i raggi X ad alta energia emessi da un campione bombardato da elettroni. Poiché i raggi X emessi permettono di identificare gli atomi da cui provengono, questo strumento fornisce non solo un'immagine ingrandita del campione come il microscopio elettronico convenzionale, ma anche informazioni sulla sua composizione chimica.

Una delle tecniche più recenti di microscopia elettronica è la *cryo-ET*, o tomografia elettronica. Combina la tecnologia della microscopia elettronica tradizionale con le tecniche criogeniche, per creare immagini tridimensionali di campioni biologici delle dimensioni degli organelli cellulari. Mediante un fascio di elettroni indirizzato sul campione mantenuto a bassissima temperatura, vengono catturate più immagini bidimensionali, successivamente elaborate da un computer in un'unica immagine tridimensionale. Uno dei principali vantaggi della *cryo-ET* consiste nel non richiedere coloranti o trattamenti inquinanti di fissazione del campione.

Microscopi a sonda

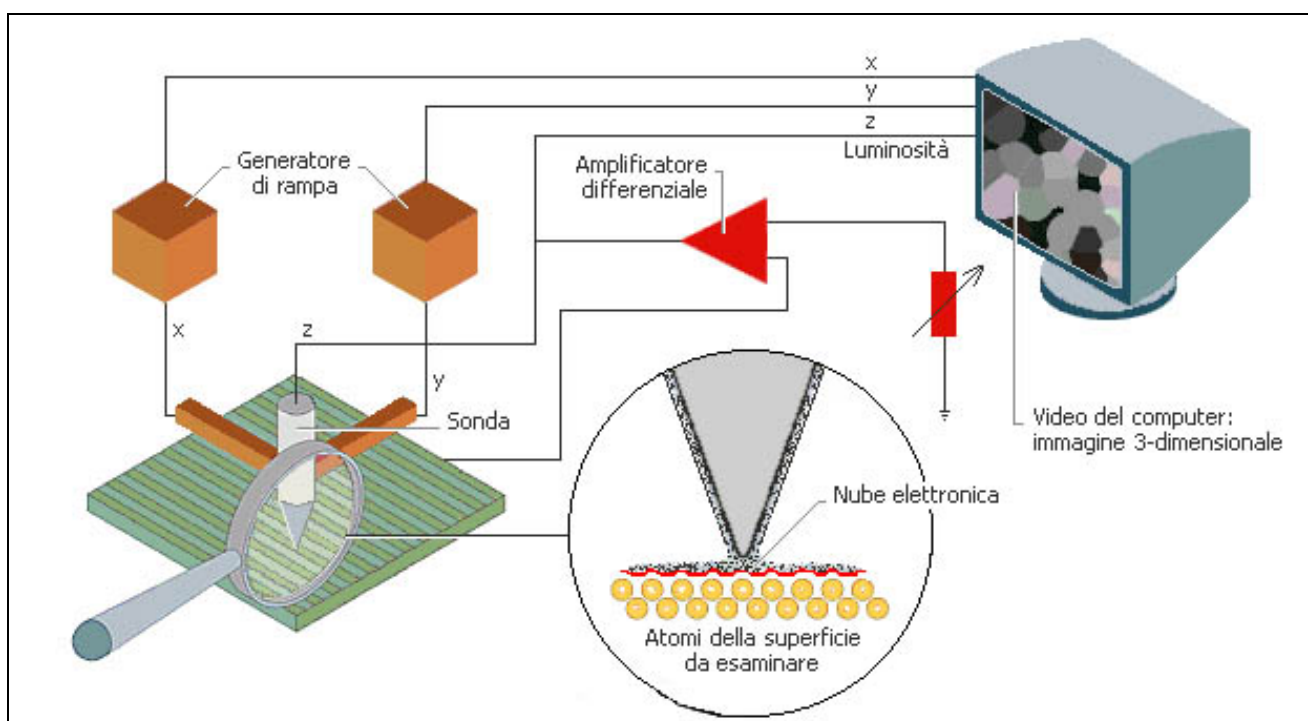


Figura 7.2

In figura 7.2 è rappresentato lo schema di funzionamento di un microscopio a effetto tunnel. In un microscopio elettronico a effetto tunnel (Scanning Tunnel Microscope, STM), una sottilissima punta metallica sonda il campione da esaminare a una distanza dalla superficie dell'ordine del decimo di nanometro. Tra la sonda e il campione (che deve essere necessariamente un materiale conduttore) è applicata una differenza di potenziale, che produce una corrente elettrica di intensità proporzionale alla distanza sonda-campione; dalle variazioni dell'intensità di corrente si risale alle irregolarità della superficie del campione, vale a dire alle sue caratteristiche morfologiche. Un amplificatore rende leggibili tali variazioni, che sono solitamente piccolissime in confronto alla tensione applicata. La sonda si muove lungo i due assi x e y, in modo da fornire un'immagine tridimensionale del campione.

I microscopi a sonda sono dotati di una punta metallica sensibile e sottilissima di diametro confrontabile alle dimensioni di un singolo atomo.

Il *microscopio a effetto tunnel* (Scanning Tunnel Microscope, STM), inventato nel 1981, sfrutta il fenomeno quantistico dell'effetto tunnel per fornire immagini dettagliate di sostanze conduttrici di elettricità. Tra la sonda e la superficie da ispezionare viene applicata una piccola differenza di potenziale; gli elettroni attraversano, per effetto tunnel, il ridottissimo spazio compreso tra la punta della sonda e l'oggetto, dando luogo a una corrente di tunnelling la cui intensità aumenta al diminuire della distanza tra la punta e gli atomi dell'oggetto. Il microscopio STM è dotato di un meccanismo di retroazione che mantiene costante la corrente, mentre la punta segue il profilo del campione. Le caratteristiche della superficie del campione sarebbero registrate come variazioni della corrente di tunnelling ma, attraverso i meccanismi di retroazione, vengono apprezzate come microspostamenti della punta della sonda.

Un altro tipo di microscopio a sonda è il *microscopio a forza atomica* (Atomic Force Microscope, AFM), che può analizzare anche campioni di materiale non conduttore. Quando la sonda di un AFM si muove lungo la superficie del campione, gli elettroni della sua punta metallica sono respinti dagli elettroni degli atomi del campione. I meccanismi di regolazione del microscopio aggiustano l'altezza della sonda rispetto alla superficie, in modo da mantenere costante la forza repulsiva tra le cariche negative. Un sensore registra i movimenti della sonda e li trasmette a un computer, che può così ricostruire un'immagine tridimensionale della superficie del campione.

BIBLIOGRAFIA

Titolo: Manuale dei materiali per l'ingegneria

Autore: A.I.M.A.T

Anno: 1996

Casa editrice: McGraw Hill

ISBN: 8838632111

Pagine: 1088

Titolo: Scienza e tecnologia dei materiali

Autore: William F. Smith

Anno: 1995

Casa editrice: McGraw Hill

ISBN: 8838607095

Pagine: 736

Titolo: Scienza delle costruzioni – introduzione alla meccanica dei materiali

Autore: Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston

Anno: 1997

Casa editrice: McGraw Hill

ISBN: 883860734-6

Pagine: 733

Titolo: Resistenza dei materiali e meccanica delle strutture

Autore: Alberto Carpinteri

Anno: 1995

Casa editrice: Pitagora

ISBN: 883710717X

Pagine: 400

Titolo: Materiali metallici

Autore: Ivo Daddi

Anno: 1972

Casa editrice: Tamburini editore

ISBN: -

Pagine: 247

Titolo: Meccanica delle strutture e controllo

Autore: Attilio Carotti

Anno: 2001

Casa editrice: Springer

ISBN: 8847001056

Pagine: 384